學術瞭望

許慧玉、于靖、丁志堅、姚在府、潘柏宇（2025）。
數學教育的神經革命：腦科學新興技術之理論與實務應用。
臺灣數學教育期刊，**12**（1），109–124。
https://doi.org/10.6278/tjme.202504_12(1).004

數學教育的神經革命：腦科學新興技術之理論與實務應用

許慧玉[1]　于靖[2]　丁志堅[3]　姚在府[4]　潘柏宇[5]

[1]國立清華大學數理教育研究所/教育與心智科學研究中心
[2]中研院數學院士/國立清華大學理學院講座教授
[3]國立清華大學環境與文化資源學系
[4]國立清華大學教育心理與諮商學系/竹師教育學院/教育與心智科學研究中心
[5]東吳大學數學系

本研究探討教育神經科學在數學教育中的應用潛力與挑戰，並嘗試透過魔術方塊的操作過程，闡述空間推理及問題解構能力等認知歷程與其對應的神經基礎。傳統數學教育研究侷限於外顯行為觀察與結果分析，難以掌握學生即時且內隱的認知歷程；而腦科學技術（如 fMRI、EEG、fNIRS）則能深入探索數學學習時的神經機制，彌補傳統方法不足。此外，國際間已有專刊及書籍積極討論神經理解、神經預測及神經介入的跨領域研究架構，反映數學教育與神經科學整合的趨勢。本文進一步提出被動式腦機介面（passive BCI）技術，結合 AI 分析腦波訊號，可即時診斷學生在數學解題中的多元認知策略與視覺化歷程，提升教師對學生解題歷程的掌握。此文章期望推動台灣在數學教育神經科學的創新發展，提供更精準的個別化教學模式與教學現場實用之重要參考。

關鍵字：數學教育、神經革命、腦科學、被動式腦機介面

通訊作者：潘柏宇，e-mail：pan740102@gmail.com
收稿：2025 年 4 月 24 日；
接受刊登：2025 年 4 月 24 日。

Hsu, H. Y., Yu, J., Ding, T. J., Yao, Z. F. & Pan, B. Y. (2025).
The neuroscience revolution in mathematics education: Theoretical and practical applications of emerging brain technologies.
Taiwan Journal of Mathematics Education, *12*(1), 109–124.
https://doi.org/10.6278/tjme.202504_12(1).004

The Neuroscience Revolution in Mathematics Education: Theoretical and Practical Applications of Emerging Brain Technologies

Hui-Yu Hsu　Jing Yu　Tsu-Jen Ding　Zai-Fu Yao　Bo-Yu Pan

This study reports the potential and challenges of educational neuroscience applications in mathematics education. By analyzing cognitive processes such as spatial reasoning and problem solving through the analogy of solving a Rubik's Cube, we elucidate their underlying neural mechanisms. Traditional mathematics education research relies primarily on observable behaviors and outcome analyses, limiting insights into students' real-time and implicit cognitive processes. In contrast, neuroscience techniques (e.g., fMRI, EEG, fNIRS) offer deeper exploration into the neural foundations of mathematical learning, overcoming traditional methodological limitations. Internationally, special journal issues and book chapters actively discuss interdisciplinary frameworks including neuro-understanding, neuro-prediction, and neuro-intervention, reflecting growing trends toward integrating neuroscience into mathematics education. This article further proposes the application of passive Brain-Computer Interface (passive BCI) technology combined with artificial intelligence for real-time analysis of neural signals. This approach aims to diagnose diverse cognitive strategies and visualization processes employed by students during mathematical problem-solving, thereby enhancing teachers' understanding of students' cognitive processes. Ultimately, this paper seeks to foster innovative developments in Taiwanese educational neuroscience research and provide practical insights for individualized mathematics instruction in classroom contexts.

Keyword: Mathematics Education, Educational Neuroscience, Passive BCI

Corresponding author：Bo-Yu Pan，e-mail：pan740102@gmail.com
Received：24 April 2025;
Accepted：24 April 2025.

壹、前言

近年來，隨著神經科學與教育學的跨領域整合逐漸成熟，「教育神經科學」（educational neuroscience）已成為全球教育研究的重要發展趨勢之一（Ansari et al., 2011; Howard-Jones, 2014）。特別是在數學教育領域，過去以行為觀察與學習成效為主的傳統研究方法，雖提供了豐富的知識累積，卻難以揭示學生在解題過程中潛藏的即時與內隱認知歷程。面對數學教學現場中日益強調素養導向與個別差異回應的挑戰，導入腦科學的新興技術，提供了一種創新的觀察與解析學習歷程的視角（Hawes & Ansari, 2020; Leikin, 2018）。透過腦造影技術、腦電圖監測、神經調節工具等方式，我們不僅能夠追蹤學生在數學活動中神經系統的活化模式，還能進一步建立與學習策略、能力發展以及教學介入成效相關的神經指標。

本篇論文由跨領域團隊合力撰寫，嘗試從神經科學與數學教育的跨領域對話，探索腦科學技術在數學教育領域中的應用潛力與實務挑戰。首先，本文將透過魔術方塊的操作歷程與數學認知策略進行類比，闡述其對於空間推理與問題解構能力的啟發，作為橋接神經科學與數學教育思索脈絡的開端。接著分析當前數學教育研究方法的限制，並指出腦科學技術在補足其不足之處的角色與價值。隨後，我們介紹幾項核心腦科學技術，包括 fMRI、EEG 與 fNIRS 等，並說明其在數學學習歷程中所觀察到的神經機制。同時我們也將探討神經科學與數學教育整合研究的現況與發展趨勢，並提出未來可能的研究方向。最後，透過被動式腦機介面（passive BCI; Aricò et al., 2017; Beauchemin et al., 2024; Belo et al., 2021; Dehais et al., 2019）與神經回饋訓練的實務案例，我們論述腦科學技術實際進入數學教育場域的可能形式與影響，期望為未來數學教育改革與科技輔助學習模式提供新的思維理路與應用的可能性。

貳、數學認知的腦科學歷程：從魔術方塊談起

魔術方塊（Rubik's Cube）是一種廣為人知的三維益智玩具，其外觀看似簡單，實則內蘊龐大且結構嚴謹的組合邏輯。對教育工作者而言，魔術方塊提供了一個引發學生對數學興趣的實作工具，因其解題過程涉及空間視覺操作、圖案與顏色模式識別、序列規劃、錯誤修正與解題策略調整等多重認知歷程。從神經科學的觀點來看，這些歷程涵蓋了多個腦區的神經細胞參與，包括頂葉皮質（特別是右側頂下小葉）參與空間關係的整合與視覺圖形轉換，前額葉皮質（特別是背外側前額葉）則負責維持工作記憶、抑制錯誤反應與策略調整（Krawczyk, 2002; Woolgar et al., 2010）。具體而言，解魔術方塊的能力與流體智力（fluid intelligence）和工作記憶容量（working memory capacity）呈正相關，這些認知能力在數學問題解決中亦扮演關鍵角色 。此外，魔術方塊訓練已被證實能提升學生的二維與三維心像操作能力（如：心像旋轉、視角轉換），此能力在幾何概念與空間推理上扮演著重要的角色。

解魔術方塊時，大腦需在龐大的「問題空間」中（可能狀態數量高達天文數值）快速搜尋解決路徑，這過程仰賴對顏色排列模式的識別和步驟序列的推演，類似於數學家面對複雜問題時將其拆解並轉譯成許多子問題的求解方式。事實上，善用此類遊戲化的類比引導，有助於激發學生對數學結構與推理的興趣：例如教師可藉由討論魔術方塊的解法策略，引導學生體會群論中的置換概念或空間對稱性，進而培養數學上的抽象思考與問題解構能力。這樣的跨領域類比不僅提供了親身體驗數學推理的機會，也突顯了將腦認知科學融入數學教育的契機與挑戰（De Smedt et al., 2010）。這些發現突顯了將魔術方塊作為教學工具的潛力，不僅能激發學生對數學結構與推理的興趣，還能培養其抽象思考與問題解構能力。

以生活化的例子來說，當學生試圖將魔術方塊某一面的顏色歸整為同一色塊時，必須先觀察旋轉後魔術方塊色塊、藉由經驗或外在協助瞭解魔術方塊操作與色塊改變的對應關係，再將其應用於觀察到的排列組合中，並藉由回饋修改操作策略。這類「先觀察－再策略性行動－再修正」的循環思維正是數學問題解題的縮影。例如當學生練習 “十字架法”（cross method）或 “CFOP 解法”（Cross, F2L, OLL, PLL）時，需將複雜的轉動序列轉換為具邏輯性的步驟，此與數學證明中拆解命題、提出中介引理、逐步邏輯推演的過程如出一轍。同時魔術方塊的操作歷程可完美對應到高等數學內容（Cornock, 2015; Davis, 1982）。儘管魔術方塊的解法最終並不需形式化的數學證明，但其本質上的解構（decomposition）、規則內推（rule-based induction）與圖像推理（visuospatial reasoning）正是數學思維所倚賴的核心能力（Uttal et al., 2013）。若能將魔術方塊解題過程結合腦科學研究，例如透過功能性磁振造影（fMRI）觀察學生在學習前後頂葉與前額葉活化差異，如圖 1 所示，將有助於理解策略學習與認知控制在數學理解上的神經基礎（Qin et al., 2004）。

圖 1

魔術方塊之神經回饋系統示意圖

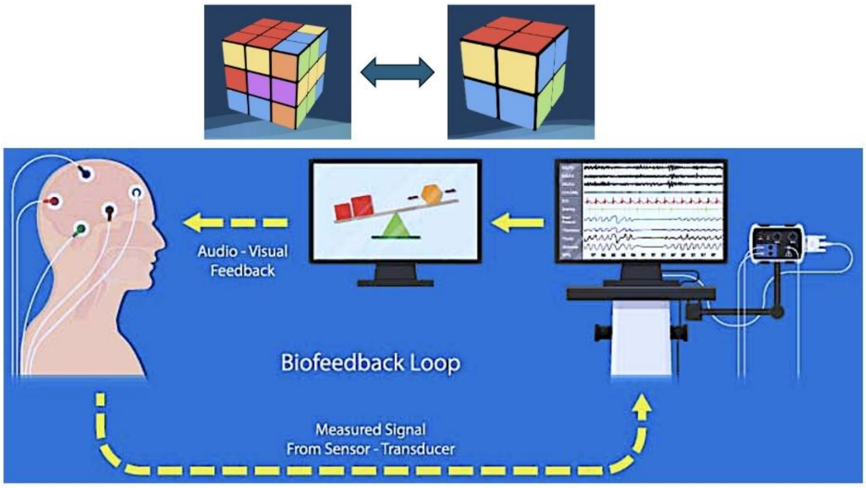


圖 1 示意學生在操作魔術方塊時，以其所歷經的空間關係整合、視覺圖形轉換、策略選擇與錯誤監控等認知歷程進行系統性建模。

進一步而言，當我們從腦科學的角度重新檢視學生在解魔術方塊過程中的行為與思維歷程，會發現其中蘊含著高度可觀測、可量化且具教育意涵的神經模式，而且可進一步對應至高等數學的定理。這也正顯示出一種新的數學教育思維轉向的可能：從結果導向的評量，轉為歷程導向的認知理解；從靜態的學科知識，轉為動態的神經歷程追蹤。在這樣的背景下，魔術方塊所代表的不僅是一項遊戲式學習活動，更是一個教育與神經科學對話的起點，為我們開啟一條通往更深層次數學學習理解的途徑。未來若能結合神經影像技術與教育實作經驗，發展出具診斷性、介入性與預測性的整合研究模式，將可能徹底改寫我們對數學學習、理解與教學介入。

參、傳統數學教育研究的侷限

當前數學教育研究的方法大致可分為質性研究、量化研究與混合方法。質性研究常透過課堂觀察、訪談、個案、社會學相關研究等方式，深入探討學生的思考方式與解題歷程、課室文化、師生互動等。另一方面，量化研究則以測驗、問卷等工具為主，目的是藉由數據的收集、量化統計分析以掌握群體性的學習成效與行為特徵。數學教育也常混合質性研究與量化研究的方法，結合兩者的優點，兼顧數據的廣度與深度。這些傳統方法為數學教育研究奠定了重要的基礎，尤其在課室文化、學生解題策略、錯誤類型與學習成效的分析上提供了大量寶貴資料。

然而，這些方法在理解學生「即時」且「內隱」的認知行為上仍存在明顯限制。首先，這些方法多依賴外顯行為的觀察與事後推論，無法直接掌握學生在解題歷程中腦內所發生的認知變化。其次，學生對自身思考過程的描述往往不夠精準或存在回憶偏差，使研究結果可能產生誤判。此外，傳統方法多聚焦於學生在特定任務上的表現結果，較難深入剖析學生概念理解、知識提取、注意分配與視覺加工等認知機制及過程細節，也難以判斷學生失誤背後的真正原因是來自哪一種認知子系統的障礙。

因此，在面對日益強調素養導向、深層理解與個別化學習需求的當代教育現場，我們急需一種能夠跨越外顯行為限制，深入探查學生即時認知歷程的技術。這項技術必須能捕捉學生在解題歷程中的細微變化，具備時間解析度高、非侵入性且可自然融入課堂情境的特性。尤其是在數學學習這類高度依賴抽象推理與視覺空間加工的領域，更需要一種能即時追蹤大腦運作模式的研究工具，以彌補傳統研究在掌握「思維進行中」這一層次的不足。也唯有如此，我們才能真正理解學生在數學問題解決過程中所歷經的注意轉換、錯誤監控、策略選擇與概念轉換等關鍵環節，並進一步設計更有針對性的教學介入與學習支持。

肆、數學學習歷程中的腦科學新興技術

為了回應上述對即時且內隱認知的數學思索歷程理解的需求，神經科學的新興技術逐漸成為補足傳統數學教育研究侷限的關鍵利器，包括功能性磁振造影（functional magnetic resonance imaging [fMRI]）、正子斷層掃描（positron emission tomography [PET]）、腦電圖（electroencephalography [EEG]）、近紅外光譜儀（functional near-infrared spectroscopy [fNIRS]），以及神經調節技術（如經顱直流電刺激 [tDCS]；與經顱磁刺激 [TMS]）。

根據生理機制，神經元活化時會消耗葡萄糖與氧氣，導致局部血流變化，這正是功能性磁振造影（fMRI）與正子斷層掃描（PET）偵測訊號的基礎理論依據（Raichle & Mintun, 2006）。例如當神經元大量放電時會消耗葡萄糖與氧氣，導致局部血流增加以供能（Raichle & Mintun, 2006）。透過這些技術，研究者得以觀察學生在解題時大腦哪些區域被活化，進而探索數學認知的神經基礎與學習歷程。例如，功能性腦造影已運用於比較有無專業訓練者在數學任務上的腦區差異，甚至觀察經過一段認知訓練後大腦網絡的可塑性變化（Supekar et al., 2015）。透過這些技術，研究者已能區辨在數字比較、數學推理、代數運算與幾何理解等不同任務中，大腦所招募的神經元活化及迴路，例如雙側頂葉與額葉迴路即常與數學運算相關（Dehaene et al., 2004）。這些技術為我們打開一扇窗，使我們能觀察到學生在數學學習歷程中如何逐步建構內在表徵、運用注意資源、進行錯誤修正與策略選擇，進而了解其學習瓶頸及潛在能力。

此外，非侵入性的腦功能監測技術如腦電圖（EEG）和近紅外光譜（fNIRS）因設備相對簡便，也開始引入教育情境：前者以毫秒等級的時間解析度記錄大腦電活動，不僅用於注意力與認知負荷的即時測量，也應用在「神經回饋（Neurofeedback）」訓練，透過即時呈現學生專注程度來增進其學習表現；後者則利用近紅外光監測皮質區域的血氧變化，可在自然教室環境下評估學生思考時的大腦反應（Ferrari & Quaresima, 2012），已開始被應用於教育現場以偵測學生在課堂中專注力的波動、認知負荷變化與問題解題歷程（Ferrari & Quaresima, 2012; Kovelman et al., 2009）。例如，研究指出，解決數學難題時學生的 θ 波活動會上升，而當進入熟練階段後則轉為 α 波活動主導，這表示神經系統由高負荷控制轉為自動化程序（Borghini et al., 2016）。除了量測工具，神經調節技術如經顱直流電刺激（tDCS）與經顱磁刺激（TMS）亦逐漸被用於數學學習研究，部分研究顯示針對左頂葉進行低劑量刺激能顯著提升初學者對於符號與數字規則的敏感度，並促進其後測表現（Kadosh et al., 2010）。更前瞻的神經調節（Neuromodulation）技術亦逐漸融入教育研究，例如經顱直流電刺激（tDCS）可溫和地調控大腦特定區域的興奮性，有研究發現對頂葉施以適當的 tDCS 可提升被試者對新數字符號的掌握能力，且效果可持續數月之久（Kadosh et al., 2010）。類似地，針對數學學習困難的兒童，結合腦造影與神經回饋訓練的初步研究也顯示出改善認知表現的潛力（Hashemian & Hashemian, 2015）。

值得注意的是，目前多數研究仍集中於短期神經可塑性與小樣本實驗設計，未來尚需更大規模的縱貫研究來驗證神經影像指標與數學學習成效之穩定性與預測性。此外，這些技術的應用亦涉及教育公平、神經倫理與教學實踐可行性等重要議題，尤其在台灣推動 STEM 教育與新課綱素養導向的背景下，跨域合作顯得更加關鍵。數學教育的本質並非要求人人成為數學家，而是協助學習者建立穩固的數學邏輯與抽象推理能力，就如同魔術方塊的解題歷程不需數學證明卻要求高度的模式分析與策略選擇一般。因此，未來數學教育

的推展應善用腦科學所觀察到的神經機制，設計出更具神經效能導向的學習介入方案，推動具體可行的腦基礎數學教學模式。

伍、數學教育與神經科學整合研究的全球趨勢

近年來，數學教育與神經科學的跨領域研究已日益成為國際教育研究的重要趨勢之一。透過將腦造影技術和認知測量工具引入教育現場，研究者期待能更精確地理解學生的數學學習歷程與個體差異背後的神經機制（De Smedt et al., 2011; Grabner, 2022; Grabner & Ansari, 2010; Yu, 2023; Zacks, 2008）。例如，神經科學的方法不僅可用於診斷學生的學習狀態，更進一步支持規劃個人化的教學介入方案，以滿足不同年級和學習水準學生的需求（Stavy & Babai, 2010; Yu, 2023）。然而，在神經科學與數學教育整合的早期階段，許多研究者抱持懷疑態度，質疑此跨領域合作是否能有效促進教育實踐的進步。尤其研究者認為神經科學知識如何真正轉化為教育課程與教學實務，是存在最大的挑戰。其包括學習歷程、學習環境影響、教師同儕互動等變因，致使神經科學轉換教育實務現場存在巨大落差（Bowers, 2016; Clement & Lovat, 2012）。

儘管如此，多位數學教育及神經科學重要學者仍試圖橋接兩個研究領域。國際重要期刊亦紛紛出版專刊以促進兩個領域之間的對話。包括 Anderson 等人（2014）於《International Journal of Science and Mathematics Education》期刊編輯的專刊。而《ZDM－Mathematics Education》期刊則是陸續提出三本專刊，分別由 Grabner 與 Ansari（2010）；De Smedt 與 Grabner（2016）；Leikin、Grabner 與 Vogel 預計 2026 年即將發行的神經科學和數學學習關係的研究成果。Anderson 等人（2014）編輯的專刊聚焦於運用眼動追蹤技術揭示學生解題歷程中的認知處理模式。Grabner 與 Ansari（2010）專刊關注在基礎數學能力，共收錄了 10 篇研究，探討不同年齡層及學業成就水準學生的數學能力與其大腦活動的相關性。就數學內容而言，多數研究聚焦於四則運算，例如 Menon（2010）探討運算活動與大腦區域定位的關聯；亦有三篇研究專注於數學推理歷程，例如 Bornemann 等人（2010）研究高認知能力學生如何解幾何類比題。只有少數研究處理進階數學內容，例如 Stavy 與 Babai（2010）探討學生在圖形與代數表徵（如一次與二次函數）間的轉換歷程。此專刊所使用的神經科學技術主要為功能性磁振造影（fMRI）與功能性近紅外線光譜儀（fNIRS）。基於這些研究與相關文獻回顧，Grabner 與 Ansari（2010）指出數學教育與神經科學整合研究中的潛在危機，包括研究參與者的選取、實驗設計於教育現場的可行性、以及基礎數字處理與高階數學技能之間的關聯性問題。

五年後，《ZDM－Mathematics Education》再度出版由 De Smedt 與 Grabner 主編的專刊，並依據他們提出的三種神經科學應用框架組織所收錄的研究（De Smedt & Grabner, 2015），分別為：神經理解（neuro-understanding）、神經預測（neuro-prediction）與神經介入（neuro-intervention）。其中，「神經理解」指運用神經科學技術來累積個體如何習得數學技能的知識，並理解其生物層次的表現與歷程；「神經預測」則關注於如何透過神經影像資

料預測學生未來數學能力發展及其對教育介入的反應；而「神經介入」則探討如何利用大腦影像設計針對數學學習的實驗性介入措施，並研究教育如何形塑與支持學校數學所需的神經網絡。

De Smedt 與 Grabner（2016）指出，該期專刊中大多數的九篇研究皆可歸類為神經理解取向。在研究內容方面，與前一期專刊主要集中於數感與運算不同，此期所涵蓋的數學主題更為多元。例如，Obersteiner 與 Tumpek（2016）透過眼動技術探討分數比較任務，Babai 等人（2016）則檢視在簡單幾何周長任務中，無關但顯著變項干擾對學生答題正確率的影響。僅有兩篇研究專注於較複雜的數學內容，包括 Leikin 等人（2016）運用事件相關電位（ERP）探討洞察力導向與基本數學課程數學問題解題歷程的腦波異同；及 Waisman 等人（2016）運用腦電圖（EEG）資料分析學生解幾何推理題時的邏輯推理歷程。

Grabner（2022）於《Cognitive Mathematics Handbook》中主編第三部分內容，歸納了數學教育與神經科學交叉研究的五大趨勢：其一為從數量處理發展至運算的腦部動態歷程（Vogel, 2022）；其二為分數處理的神經認知基礎（Wortha et al., 2022）；其三為數學能力與表現的個體差異（Caviola et al., 2022）；其四為數學焦慮及其心理與神經基礎（Pizzie, 2022）；其五為促進數學學習的神經認知介入方法（Kucian & Cohen Kadosh, 2022）。上述專刊與專書章節皆共同指出，有必要進行系統性的跨期刊文獻整合與評析，全面掌握數學教育與神經科學跨領域研究的發展趨勢，並識別當前所面臨的挑戰與未來研究方向。 例如，Clement 與 Lovat（2012）曾指出，神經科學知識如何轉化為實用且具教育影響力的知識，仍為一大挑戰；Ansari 與 Lyons（2016）則強調，需進一步探討如何透過神經影像技術驗證教育介入的效果，並利用神經指標預測學生的個體差異表現。

在國際數學教育大會（International Conference of Mathematics Education [ICME]）的演講中，Leikin（2018）試圖比較數學教育中的認知研究與認知神經科學中與數學處理相關的研究。她指出這兩個領域在研究目標、數學主題、所分析的表徵、研究參與者、研究條件與環境、使用的研究工具、所設計的任務，以及評估結果的指標等方面皆存在差異。這些差異可作為理解兩個研究領域之間鴻溝的框架。例如，就數學主題而言，數學教育中的認知研究涵蓋從小學到大學的廣泛數學主題、概念與性質；相對地，認知神經科學的研究則多聚焦於數感與四則運算等基礎內容，只有少數研究探討較進階的數學內容。Leikin 透過這些比較，突顯出兩個交錯研究領域之間的差距，並指出兩個領域未來應努力發展的方向。國際數學教育委員會（ICMI）亦高度關注這項發展，近期委託專家團隊撰寫《神經科學、心理學與數學教育的跨領域交流》專題報告（Leikin et al., 2024），進一步凸顯該領域未來發展的關鍵性。

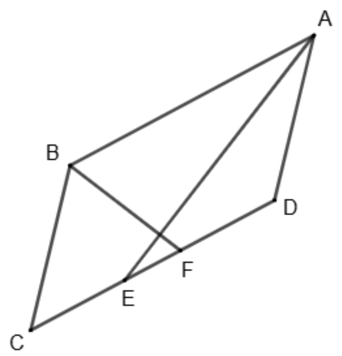
對於台灣而言，如何跟上國際研究趨勢並有效落實相關成果至本土教育情境，是當前的重要課題。在 108 課綱強調的素養導向與差異化教學背景下，台灣應積極選擇兼具理論價值與實務需求的研究主題，例如學生數學焦慮的神經基礎（Suárez-Pellicioni et al., 2016）或空間認知與數學能力的互動關係（Cheng & Mix, 2014; Mix, 2019），將有助於創造具有國際影響力且貼近教學現場需求的研究突破點。

陸、結合 AI 與腦訊號的教學診斷模式：被動式 BCI 於數學教育的實踐構想

被動式 BCI 定義為中央神經系統（central nervous system [CNS]）活動的量測工具，且具備將中央神經系統訊號轉換成其他可替換、儲存、增強、補充或改善的其他訊號系統的介面（Wolpaw & Wolpaw, 2012）。被動式 BCI 的其中一個重要研究方向則是利用腦部活動來監控正常受試者的認知和情感狀態（Aricò et al., 2018; Belo et al., 2021; Dehais et al., 2019; Khan & Hong, 2015）。

在數學教育評量逐漸走向歷程導向與個別化診斷的當下，我們認為以神經訊號為核心的被動式 BCI 技術，結合 AI 進行腦波數據的即時分析與解讀，研究者與教師將有機會建立具診斷性、預測性與適應性的教學診斷模式。舉例來說，以下為一道數學幾何題目：

如下圖所示，平行四邊形 $ABCD$ 中，線段 $\overline{AE}$ 和 $\overline{BF}$ 分別為角 $\angle BAD$ 和 $\angle CBA$ 的平分線，且 $\angle AED = 25°$。



根據上述題目敘述，下列選項何者正確：

(1) $\angle EAD = 15°$

(2) $\angle EAD = 25°$

(3) $\angle EAD = 65°$

(4) $\angle EAD = 155°$

根據題目已知和給定的幾何圖形，可以藉由多元推理歷程得到正確答案為(2) $\angle EAD = 25°$。以下為兩種學生可能使用的解題策略。

解題策略一：

觀察子圖由 $\overline{BA}$、$\overline{AE}$ 以及 $\overline{ED}$ 所形成的「Z 型圖」。因為 $\overline{BA} // \overline{ED}$，根據內錯角定理得 $\angle BAE = \angle AED = 25°$。又因 $\angle BAD$ 被角平分線 $\overline{AE}$ 平分，$\angle BAE = \angle EAD$，故 $\angle EAD = 25°$。

解題策略二：

設 $\angle BAD = 2x$。則由平行四邊形性質得 $\angle ADE = 180° - 2x$。又因 $\angle AED = 25°$，利用 $\triangle ADE$ 的內角，有：

$$\angle EAD + \angle AED + \angle ADE = 180°$$
$$x + 25° + 180° - 2x = 180° \Rightarrow x = 25°，$$

故 $\angle EAD = 25°$。

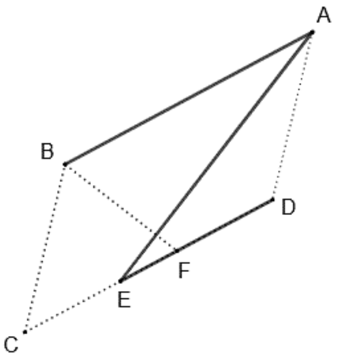
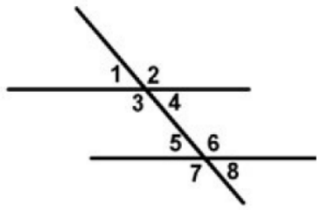
此範例題說明數學解題通常涉及多個的解題策略，一個題目可以藉由不同的推理方式來得到答案。這種多元性不僅彰顯了數學本身開放與彈性的特質，也提供了學生多角度理解與探索數學概念的機會。透過嘗試不同的解題方法，學生能逐步培養批判性思考與創造性思維，進而累積豐富的數學解題經驗，發展出靈活性與洞察力等關鍵能力。

然而，在實際的教學現場中，教師通常只能根據學生的最終答題結果判斷其正確性，難以深入瞭解學生在解題過程中究竟採用了何種策略，以及此過程中涉及的認知歷程為何。這樣的限制使得教師難以即時辨識學生的學習困難，更無法準確掌握學生思考過程中的誤解或盲點。例如，當題目條件提及角度為 25°時，有些學生可能僅因直覺而猜測答案為(2)，教師若只從答案上判斷，很容易忽略學生其實尚未具備關鍵的幾何推理能力。

實際上，幾何推理歷程並非僅僅是寫出正確計算步驟或有效的證明式子，而更關鍵的是學生如何有效地解構（decomposition）與重構（recomposition）幾何圖形，進一步正確視覺化（visualization）圖形中隱藏的幾何性質，並運用這些性質形成有效的解題策略。幾何圖形視覺化涉及許多重要的認知歷程，包括圖形重要訊息的辨識；抑制圖形不相關訊息的提取；長期記憶幾何性質圖形心像的提取；外在圖形訊息與長期記憶提取心像的對應及調整；同一給定圖形對應不同幾何性質的確認；不同辨識子圖與長期記憶中不同幾何性質的確認等。此外，幾何圖形視覺化過程也涉及空間工作記憶能力的有效運作，以維持和操控多個視覺元素之間的空間關係，並進行動態的心像旋轉或視角轉換。個體需要具備足夠的視覺注意力，以迅速聚焦於圖形中的關鍵結構與線索，同時排除不必要的干擾資訊。研究指出，圖形視覺化能力的高低，不僅影響學生解題的速度與正確性，亦影響學生在複雜幾何問題中能否成功整合不同的圖形資訊，從而進行有效推理（Duval, 1999; Waisman et al., 2023; Weckbacher & Okamoto, 2014; Zykova, 1975）。此外，個體的圖形視覺化歷程可能受到先備知識、問題情境或個體差異（例如空間能力、視覺空間處理速度與工作記憶容量）的影響。這樣的認知歷程正是當代數學教育關注的核心議題，也正是應用腦科學研究，尤其被動式 BCI 技術可提供重要協助之處。

以具體的幾何問題為例，學生必須能夠辨識出題目中 $\overline{AB}$、$\overline{AE}$ 和 $\overline{ED}$ 所共同形成的「Z 形圖案」，進而察覺此圖案所隱含的內錯角性質。然而，題目所提供的幾何圖形往往與學生平時課本中所熟悉的典型內錯角圖形有所差異。因此，學生需要在解題時能有效地抑制非必要的視覺訊息，精準提取關鍵視覺特徵 （如：$\overline{AB}$、$\overline{AE}$ 和 $\overline{ED}$），並對照以往所建構的幾何圖形心像（mental imagery）（如：內錯角性質、平行四邊形性質），靈活調整視覺訊息，進而確認並有效運用相應的幾何性質。這種視覺訊息的選擇與處理，以及對幾何性質的靈

活應用，正是幾何學習過程中的核心關鍵，也是腦科學透過被動式 BCI 工具協助研究的重要所在。透過分析學生解題歷程的神經訊號特徵，教師便能更精準地掌握學生在解題過程中真實的認知狀態，進一步發展出更具針對性且有效的數學教學策略。

本題目子圖	對應課本該性質對應的幾何圖形
	內錯角性質 

不同於傳統的主動式或反應式 BCI，被動式 BCI 不需使用者主動產生特定的腦波或透過外部刺激誘發反應，而是透過直接分析使用者在自然情境下的腦波特徵，揭示其認知與情緒狀態（Zander & Kothe, 2011）。這種特性使被動式 BCI 特別適合應用於教育場域，因為學生能在真實、自然且無干擾的情境中進行解題，從而讓教育者獲得更豐富且真實的認知資訊。

這樣的想法來自於許多研究的積累，在各種腦波訊號分析方法中，事件相關電位（Event-Related Potential, ERP）的 P300 成分已被證實與注意力資源的配置及工作記憶的更新過程具有密切的關聯（Polich, 2007）。近期的研究進一步指出，學生在進行科學問題解題時，其腦波中的不同 ERP 成分（如 N200 與 P300）能有效地反映視覺空間推理、注意力集中程度及記憶負荷等內在的認知歷程（Awh et al., 2000; Salillas et al., 2008）。因此，我們可以合理推測，學生在進行解題過程中的關鍵認知步驟，同樣可能伴隨著特定且可區分的腦波反應。以上述幾何問題的解題為例，當學生成功識別出隱藏的「Z 形圖案」、察覺平行四邊形 *ABCD* 的鄰角和為 180 度，或是以心像旋轉的方式成功將內錯角圖形進行旋轉後，皆可能會在其腦波數據中產生特定的 EEG 波形特徵。透過蒐集並分析大規模的腦波數據，結合人工智慧（AI）技術進行訓練與比對，研究者即可建構出一套標準化的解題思維模型。透過這套模型，結合被動式 BCI 技術，便可應用於個別學生的數學解題過程，精準地診斷該學生是否掌握了解題過程中各項關鍵的認知步驟。此種基於腦波數據而建構的標準化模型，在概念上類似於大型語言模型（LLM）透過大量文本訓練所建立的語言理解系統，可有效提供學生解題認知過程的基準參考。

不過，我們所提之將被動式 BCI 技術實際應用於數學教育現場可能存在許多的挑戰。這些挑戰包括腦波數據分析程序的複雜性、不同個體間腦波訊號的高度變異性，以及教育

實務現場對於此新技術的接受度與認可程度等重要考量因素（Beauchemin et al., 2024）。因此，未來的研究工作必須特別著重於提升腦波數據分析方法的準確性與穩定性，並建立能廣泛適用於不同數學教育解題情境的通用模型。此外，數學教育者與學生對此技術的接受度亦為關鍵因素。藉由提高教育相關人員對被動式 BCI 技術的理解，並設計易於操作與實際應用的工具與系統，將有助於此技術更有效且順利地融入現有的教學實踐之中。

透過被動式 BCI 技術建構以腦波為基礎的解題思維歷程模型，我們認為將能為數學教育提供嶄新的視野與實用工具。這種新穎的方法不僅能顯著提升教學過程中的個別化程度與診斷的精準性，更有望激發學生主動參與學習，全面提高教育的整體效能。此外，若學生透過更具創意的思維方式進行解題，其腦波特徵也將與標準模型有所不同，因此此模型的另一重要價值在於能辨識前瞻且創新的想法。這將有助於數學教育者與學生進行更具創造性的互動。隨著技術的逐漸成熟，以及教育現場對新科技的逐步接納，這種創新的教育模式必將成為未來數學教育發展的重要趨勢之一。

柒、結論

數學素有「科學之母」之稱，其邏輯結構與抽象思維能力的培養，對於跨領域知識的建構與創新應用具有根本性影響。過去三十年來，台灣在國際數學能力評比中表現名列前茅（Mullis et al., 2020; Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD], 2023），反映出台灣學生在數學認知策略上具備領先優勢。然而，這些優勢究竟源自於文化背景、教育系統設計，還是潛藏的認知特質，目前仍缺乏系統性的探究。若能善用腦科學技術與大數據分析工具，發展本土化的教學診斷模型，將有助於量化這些優勢背後的關鍵機制，進而釐清台灣學生數學表現亮眼的深層原因。

台灣在神經科學與資訊科學領域皆具備世界級的研究能量，若能進一步將這些技術應用於教育現場，特別是數學教學評量與學習支援系統的設計，將為數學教育帶來全新的突破。本文所提出結合被動式腦機介面（passive BCI）與人工智慧分析的教學診斷模式，即是一項具可行性、可擴展性與跨領域整合潛力的創新方向。

透過此類技術的應用，不僅能強化教師對學生學習歷程的掌握，提升個別化教學的準確性與實用性，更有機會促使台灣在「教育神經科學」領域的研究，成為全球學術領導地位，為全球教育轉型提供有利的科學與經驗支持，真正實踐數學教育的神經革命。

參考文獻

Anderson, O. R., Love, B. C., & Tsai, M.-J. (2014). Neuroscience perspectives for science and mathematics learning in technology-enhanced learning environments. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *12*(3), 467–474. https://doi.org/10.1007/s10763-014-9540-2

Ansari, D., & Lyons, I. M. (2016). Cognitive neuroscience and mathematics learning: How far have we come? Where do we need to go? *ZDM–Mathematics Education*, *48*(3), 379–383. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0782-z

Ansari, D., Donna, C., & De Smedt, B. (2011). Connecting education and cognitive neuroscience: Where will the journey take us? *Educational Philosophy and Theory*, *43*(1), 37–42. https://doi.org/10.1111/j.1469-5812.2010.00705.x

Aricò, P., Borghini, G., Di Flumeri, G., Sciaraffa, N., & Babiloni, F. (2018). Passive BCI beyond the lab: Current trends and future directions. *Physiological Measurement*, *39*(8), 08TR02. https://doi.org/10.1088/1361-6579/aad57e

Aricò, P., Borghini, G., Di Flumeri, G., Sciaraffa, N., Colosimo, A., & Babiloni, F. (2017). Passive BCI in operational environments: Insights, recent advances, and future trends. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, *64*(7), 1431–1436. https://doi.org/10.1109/TBME.2017.2694856

Awh, E., Anllo-Vento, L., & Hillyard, S. A. (2000). The role of spatial selective attention in working memory for locations: Evidence from event-related potentials. *Journal of Cognitive Neuroscience*, *12*(5), 840–847. https://doi.org/10.1162/089892900562444

Babai, R., Nattiv, L., & Stavy, R. (2016). Comparison of perimeters: Improving students' performance by increasing the salience of the relevant variable. *ZDM–Mathematics Education*, *48*(3), 367–378. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0766-z

Beauchemin, N., Charland, P., Karran, A., Boasen, J., Tadson, B., Sénécal, S., & Léger, P. M. (2024). Enhancing learning experiences: EEG-based passive BCI system adapts learning speed to cognitive load in real-time, with motivation as catalyst. *Frontiers in Human Neuroscience*, *18*, 1416683. https://doi.org/10.3389/fnhum.2024.1416683

Belo, J., Clerc, M., & Schön, D. (2021). EEG-based auditory attention detection and its possible future applications for passive BCI [Mini Review]. *Frontiers in Computer Science*, *3*, 661178. https://doi.org/10.3389/fcomp.2021.661178

Borghini, G., Aricò, P., Graziani, I., Salinari, S., Sun, Y., Taya, F., Bezerianos, A., Thakor, N. V., & Babiloni, F. (2016). Quantitative assessment of the training improvement in a motor-cognitive task by using EEG, ECG and EOG signals. *Brain Topography*, *29*(1), 149–161. https://doi.org/10.1007/s10548-015-0425-7

Bornemann, B., Foth, M., Horn, J., Ries, J., Warmuth, E., Wartenburger, I., & van der Meer, E. (2010). Mathematical cognition: Individual differences in resource allocation. *ZDM–Mathematics Education, 42*(6), 555–567. https://doi.org/10.1007/s11858-010-0253-x

Bowers, J. S. (2016). The practical and principled problems with educational neuroscience. *Psychological Review*, *123*(5), 600–612. https://doi.org/10.1037/rev0000025

Caviola, S., Toffalini, E., Giofrè, D., Ruiz, J. M., Szűcs, D., & Mammarella, I. C. (2022). Math performance and academic anxiety forms, from sociodemographic to cognitive aspects: A meta-analysis on 906,311 participants. *Educational Psychology Review, 34*, 363–399. https://doi.org/10.1007/s10648-021-09618-5

Cheng, Y.-L., & Mix, K. S. (2014). Spatial training improves children's mathematics ability. *Journal of Cognition and development*, *15*(1), 2–11. https://doi.org/10.1080/15248372.2012.725186

Clement, N. D., & Lovat, T. (2012). Neuroscience and education: issues and challenges for curriculum. *Curriculum Inquiry*, *42*(4), 534–557. https://doi.org/10.1111/j.1467-873X.2012.00602.x

Cornock, C. (2015). Teaching group theory using Rubik's cubes. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *46*(7), 957–967. https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1070442

Davis, T. (1982). Teaching mathematics with Rubik's cube. *The Two-Year College Mathematics Journal*, *13*(3), 178–185. https://www.jstor.org/stable/pdf/3027317.pdf

De Smedt, B., & Grabner, R. H. (2015). Applications of neuroscience to mathematics education. In R. Cohen Kadosh & A. Dowker (Eds.), *The Oxford Handbook of Numerical Cognition* (pp. 612–632). Oxford University Press. https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780199642342.013.48

De Smedt, B., & Grabner, R. H. (2016). Potential applications of cognitive neuroscience to mathematics education. *ZDM–Mathematics Education*, *48*(3), 249–253. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0784-x

De Smedt, B., Ansari, D., Grabner, R. H., Hannula, M. M., Schneider, M., & Verschaffel, L. (2010). Cognitive neuroscience meets mathematics education. *Educational Research Review*, *5*(1), 97–105. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2009.11.001

De Smedt, B., Ansari, D., Grabner, R. H., Hannula-Sormunen, M., Schneider, M., & Verschaffel, L. (2011). Cognitive neuroscience meets mathematics education: It takes two to Tango. *Educational Research Review*, *6*(3), 232–237. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2011.10.003

Dehaene, S., Molko, N., Cohen, L., & Wilson, A. J. (2004). Arithmetic and the brain. *Current Opinion in Neurobiology*, *14*(2), 218–224. https://doi.org/10.1016/j.conb.2004.03.008

Dehais, F., Rida, I., Roy, R. N., Iversen, J., Mullen, T., & Callan, D. (2019). A pBCI to predict attentional error before it happens in real flight conditions. *2019 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics (SMC)* (pp. 4155–4160). IEEE. https://doi.org/10.1109/SMC.2019.8914010

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking: Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 3–26). ERIC. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED433998.pdf

Ferrari, M., & Quaresima, V. (2012). A brief review on the history of human functional near-infrared spectroscopy (fNIRS) development and fields of application. *NeuroImage*, *63*(2), 921–935. https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2012.03.049

Grabner, R. H. (2022). Section III Cognitive neuroscience of mathematics. In M. Danesi (Ed.), *Handbook of cognitive mathematics* (pp. 251–256). Springer. https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-031-03945-4.pdf

Grabner, R. H., & Ansari, D. (2010). Promises and potential pitfalls of a 'cognitive neuroscience of mathematics learning'. *ZDM–Mathematics Education*, *42*(6), 655–660. https://doi.org/10.1007/s11858-010-0283-4

Hashemian, P., & Hashemian, P. (2015). Effectiveness of neuro-feedback on mathematics disorder. *Journal of Psychiatry*, *18*(2), 243.

Hawes, Z., & Ansari, D. (2020). What explains the relationship between spatial and mathematical skills? A review of evidence from brain and behavior. *Psychonomic Bulletin & Review*, *27*, 465–482. https://doi.org/10.3758/s13423-019-01694-7

Howard-Jones, P. A. (2014). Neuroscience and education: myths and messages. *Nature Reviews Neuroscience*, *15*(12), 817–824. https://doi.org/10.1038/nrn3817

Kadosh, R. C., Soskic, S., Iuculano, T., Kanai, R., & Walsh, V. (2010). Modulating neuronal activity produces specific and long-lasting changes in numerical competence. *Current Biology*, *20*(22), 2016–2020. https://doi.org/10.1016/j.cub.2010.10.007

Khan, M. J., & Hong, K.-S. (2015). Passive BCI based on drowsiness detection: An fNIRS study. *Biomedical Optics Express*, *6*(10), 4063–4078. https://doi.org/10.1364/BOE.6.004063

Kovelman, I., Shalinsky, M. H., White, K. S., Schmitt, S. N., Berens, M. S., Paymer, N., & Petitto, L.-A. (2009). Dual language use in sign-speech bimodal bilinguals: fNIRS brain-imaging evidence. *Brain and language*, *109*(2-3), 112–123. https://doi.org/10.1016/j.bandl.2008.09.008

Krawczyk, D. C. (2002). Contributions of the prefrontal cortex to the neural basis of human decision making. *Neuroscience & Biobehavioral Reviews*, *26*(6), 631–664. https://doi.org/10.1016/S0149-7634(02)00021-0

Kucian, K., & Cohen Kadosh, R. (2022). Neurocognitive interventions to foster mathematical learning. In M. Danesi (Ed.), *Handbook of cognitive mathematics* (pp. 385–411). Springer. https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-031-03945-4.pdf

Leikin, R. (2018). How can cognitive neuroscience contribute to mathematics education? Bridging the two research areas. In G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt, & B. X. (Eds.), *Invited lectures from the 13th International Congress on mathematical education* (pp. 363–384). Springer.

Leikin, R., Waisman, I., & Leikin, M. (2016). Does solving insight-based problems differ from solving learning-based problems? Some evidence from an ERP study. *ZDM–Mathematics Education*, *48*(3), 305–319. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0767-y

Menon, V. (2010). Developmental cognitive neuroscience of arithmetic: implications for learning and education. *ZDM–Mathematics Education*, *42*(6), 515–525. https://doi.org/10.1007/s11858-010-0242-0

Mix, K. S. (2019). Why are spatial skill and mathematics related? *Child Development Perspectives*, *13*(2), 121–126. https://doi.org/10.1111/cdep.12323

Mullis, I. V. S., Martin, M., Foy, P., Kelly, D., & Fishbein, B. (2020). *TIMSS 2019 international results in mathematics and science*. https://timssandpirls.bc.edu/timss2019/international-results/

Obersteiner, A., & Tumpek, C. (2016). Measuring fraction comparison strategies with eye-tracking. *ZDM–Mathematics Education*, *48*(3), 255–266. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0742-z

Organisation for Economic Co-operation and Development. (2023). *PISA 2022 results: The state of learning and equity in Education, PISA* (Vol. 1). OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/53f23881-en

Pizzie, R. (2022). Mind, Brain, and Math Anxiety. In M. Danesi (Ed.), *Handbook of cognitive mathematics* (pp. 349–383). Springer. https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-031-03945-4.pdf

Polich, J. (2007). Updating P300: An integrative theory of P3a and P3b. *Clinical Neurophysiology*, *118*(10), 2128–2148. https://doi.org/10.1016/j.clinph.2007.04.019

Qin, Y., Carter, C. S., Silk, E. M., Stenger, V. A., Fissell, K., Goode, A., & Anderson, J. R. (2004). The change of the brain activation patterns as children learn algebra equation solving. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *101*(15), 5686–5691. https://doi.org/10.1073/pnas.0401227101

Raichle, M. E., & Mintun, M. A. (2006). Brain work and brain imaging. *Annual Review of Neuroscience*, *29*, 449–476. https://doi.org/10.1146/annurev.neuro.29.051605.112819

Salillas, E., El Yagoubi, R., & Semenza, C. (2008). Sensory and cognitive processes of shifts of spatial attention induced by numbers: An ERP study. *Cortex*, *44*(4), 406–413. https://doi.org/10.1016/j.cortex.2007.08.006

Stavy, R., & Babai, R. (2010). Overcoming intuitive interference in mathematics: Insights from behavioral, brain imaging and intervention studies. *ZDM–Mathematics Education*, *42*(6), 621–633. https://doi.org/10.1007/s11858-010-0251-z

Suárez-Pellicioni, M., Núñez-Peña, M. I., & Colomé, À. (2016). Math anxiety: A review of its cognitive consequences, psychophysiological correlates, and brain bases. *Cognitive, Affective, & Behavioral Neuroscience*, *16*(1), 3–22. https://doi.org/10.3758/s13415-015-0370-7

Supekar, K., Iuculano, T., Chen, L., & Menon, V. (2015). Remediation of childhood math anxiety and associated neural circuits through cognitive tutoring. *Journal of Neuroscience*, *35*(36), 12574–12583. https://doi.org/10.1523/JNEUROSCI.0786-15.2015

Uttal, D. H., Meadow, N. G., Tipton, E., Hand, L. L., Alden, A. R., Warren, C., & Newcombe, N. S. (2013). The malleability of spatial skills: A meta-analysis of training studies. *Psychological Bulletin*, *139*(2), 352–402. https://doi.org/10.1037/a0028446

Vogel, S. E. (2022). Developmental Brain Dynamics: From Quantity Processing to Arithmetic. In M. Danesi (Ed.), *Handbook of Cognitive Mathematics* (pp. 257–287). Springer. https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-031-03945-4.pdf

Waisman, I., Hsu, H.-Y., & Leikin, R. (2023). Complexity of geometry problems as a function of field-dependency and asymmetry of a diagram. In R. Leikin (Ed.), *Mathematical challenges for all* (pp. 501–520). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18868-8_26

Waisman, I., Leikin, M., & Leikin, R. (2016). Brain activity associated with logical inferences in geometry: focusing on students with different levels of ability. *ZDM–Mathematics Education*, *48*(3), 321–335. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0760-5

Weckbacher, L. M., & Okamoto, Y. (2014). Mental rotation ability in relation to self-perceptions of high school geometry. *Learning and Individual Differences*, *30*, 58–63. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2013.10.007

Wolpaw, J. R., & Wolpaw, E. W. (2012). Brain-computer interfaces: Something new under the sun. *Brain-computer interfaces: Principles and practice*, *14*, 3–12.

Woolgar, A., Parr, A., Cusack, R., Thompson, R., Nimmo-Smith, I., Torralva, T., Roca, M., Antoun, N., Manes, F., & Duncan, J. (2010). Fluid intelligence loss linked to restricted regions of damage within frontal and parietal cortex. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *107*(33), 14899–14902. https://doi.org/10.1073/pnas.1007928107

Wortha, S. M., Obersteiner, A., & Dresler, T. (2022). Neurocognitive foundations of fraction processing. In M. Danesi (Ed.), *Handbook of cognitive mathematics* (pp. 289–316). Springer. https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-031-03945-4.pdf

Yu, H. (2023). The neuroscience basis and educational interventions of mathematical cognitive impairment and anxiety: A systematic literature review. *Frontiers in Psychology*, *14*, 1282957. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2023.1282957

Zacks, J. M. (2008). Neuroimaging studies of mental rotation: A Meta-analysis and review. *Journal of Cognitive Neuroscience*, *20*(1), 1–19. https://doi.org/10.1162/jocn.2008.20013

Zander, T. O., & Kothe, C. (2011). Towards passive brain–computer interfaces: Applying brain–computer interface technology to human–machine systems in general. *Journal of Neural Engineering*, *8*(2), 025005. https://doi.org/10.1088/1741-2560/8/2/025005

Zykova, V. I. (1975). Operating with concepts when solving geometry problems. In J. Kilpatrick & I. Wirszup (Eds.), *The learning of mathematical concepts* (Vol. 1, pp. 93–148). University of Chicago Press.