

ISSN: 2312-5810  
DOI: 10.6278/tjme

第 12 卷 第 1 期  
二〇二五年四月  
VOL. 12 NO. 1  
April 2025

# 臺灣數學教育期刊

## Taiwan Journal of Mathematics Education

數學教育新視角：新興研究技術的應用專刊

Special Issue for New Perspectives in Mathematics Education:  
Applications of Emerging Research Technologies



國立臺灣師範大學數學系  
Department of Mathematics,  
National Taiwan Normal University



台灣數學教育學會  
Taiwan Association  
for Mathematics Education

發行單位 | 國立臺灣師範大學數學系  
台灣數學教育學會

客座主編 | 許慧玉 國立清華大學數理教育研究所

編輯委員會

主編	吳昭容	國立臺灣師範大學教育心理與輔導學系
副主編	林原宏	國立臺中教育大學數學教育學系
編輯委員 (依姓氏筆劃排序)	王婷瑩	國立臺灣師範大學數學系
	吳中勤	國立屏東大學幼兒教育學系
	李源順	臺北市立大學數學系 (退休)
	侯雅齡	國立屏東大學特殊教育學系
	袁媛	國立臺中教育大學數學教育學系
	張宇樑	國立嘉義大學教育學系教育行政與政策發展碩士班
	許慧玉	國立清華大學數理教育研究所
	陳致澄	國立臺南大學應用數學系
	陳斐卿	國立中央大學學習與教學研究所
	黃幸美	臺北市立大學學習與媒材設計學系
	劉柏宏	國立勤益科技大學基礎通識教育中心
	譚克平	國立臺灣師範大學科學教育研究所 (退休)
國際編輯委員	余偉忠	澳洲墨爾本大學教育學院
	卓鎮南	新加坡南洋理工大學國立教育學院
	羅珍珍	美國西密西根大學數學系

---

地址	臺北市汀州路四段 88 號國立臺灣師範大學數學系 《臺灣數學教育期刊》
電話	886-2-7749-3678
傳真	886-2-2933-2342
電子郵件	TJME.taiwan@gmail.com
網址	<a href="https://toaj.stpi.niar.org.tw/index/journal/4b1141f98679f5ed018681ea933104f5">https://toaj.stpi.niar.org.tw/index/journal/4b1141f98679f5ed018681ea933104f5</a>

---

《臺灣數學教育期刊》第 12 卷第 1 期聚焦於新興教育研究技術於數學教育領域的應用。新興教育研究技術旨在將現代科技與方法導入教育研究領域，藉由提供多元而精確的研究數據，提升研究的可操作性與效率，並加深對師資培育、教學歷程與學習認知特徵的理解。透過多元數據分析，此類技術有助於為教學實踐提供具體參考，促進教育領域更有效且個別化的規劃與發展，以更好地回應社會需求。

尤其值得注意的是，「腦神經革命」的興起，對教育研究領域產生了深遠影響。腦神經革命意指近二十年來，隨著腦神經科學快速進展，搭配神經影像技術及其他神經回饋機制（如功能性磁振造影 fMRI、腦電圖 EEG、近紅外線光譜技術 fNIRS 及眼動追蹤技術）的精細化，人們得以以前所未有的精準度觀察學習歷程中的神經活動，進一步解讀潛藏於大腦內部的認知與情意處理機制。這股革命性的浪潮不僅重塑了認知科學研究面貌，更為數學教育的研究與實務應用帶來了全新的啟示與挑戰。

本專刊關注於數學教育領域中，新興教育研究技術之應用與可能發展。期望透過集結相關領域之實徵研究與理論探討，豐富對師資培育、教學現場與學生學習認知歷程的理解與掌握。專刊收錄三篇實徵研究論文及一篇學術瞭望文章。

三篇實徵研究論文分別為：

第一篇由傅培軒、徐柏棻與蔡孟蓉等人撰寫的〈國二學生閱讀數學幾何證明問題之視覺行為特徵〉，運用眼動追蹤技術分析國二學生在閱讀三角形全等性質證明教材時的視覺行為特徵。研究結合遲滯序列分析 (LSA)，揭示不同學習成效學生在認知歷程上的差異。傅培軒等人發現高學習成效學生在概念說明頁之圖形區投入較多閱讀時間與注意力；低學習成效學生則依賴從文字轉向圖形的視覺輔助。低學習成效學生於主旨訊息理解歷程中出現頻繁的注意力轉移，而高學習成效學生則未見此現象。此成果不僅展現了眼動技術與遲滯序列分析於台灣數學證明教學研究的應用潛力，亦為幾何證明教學提供了視覺輔助設計與個別化支持的重要參考。

第二篇由黃靖好與邱國力撰寫，題為〈以眼球追蹤技術探討數學焦慮與閱讀解題範例歷程之關聯—以微分為例〉。本研究聚焦於數學焦慮對學習歷程的影響，突破以往僅聚焦學業成就的研究侷限。透過眼球追蹤技術，客觀且即時記錄學生閱讀微分範例的視覺行為，並探討其與數學焦慮程度之關聯。黃靖好等人發現高低焦慮組在後測學習成效上無顯著差異，但學生數學焦慮程度與凝視公式區與解題步驟區之總凝視時間、凝視次數、平均凝視時間呈顯著正相關。特別是在基礎知識較弱的學生中，高焦慮學生展現出顯著較多的視覺投入。本研究揭示數學焦慮在學習歷程中可能引發干擾或過度投入效應，並指出原有知識基礎對此效應具有調節作用，對改善微積分學習困境提供了理論依據與介入方向。

第三篇為林勇吉撰寫之〈透過眼動探討國小與國中職前教師的數學課程覺察力：個案研究〉。本研究創新結合眼動技術與課程覺察力研究，透過即時記錄職前教師在課本閱讀過程中的凝視行為，提供更細緻且客觀的課程覺察力資料。研究首次以眼動數據探討台灣國小與國中職前教師在「注意」、「解釋」與「回應」三個層面的異同，並聚焦於教師如何從教科書擷取訊息與轉化教案設計。研究結果對師資培育政策與課程設計提供了具體的啟發，呼應國際間對於教科書使用與學習機會關聯性的重視。

學術瞭望部分，由許慧玉、于靖、丁志堅、姚在府與潘柏宇等跨領域團隊合撰之〈數學教育的神經革命：腦科學新興技術之理論與實務應用〉，切入數學教育與神經科學交會的前沿議題。文章指出，傳統數學教育研究方法難以掌握學生即時且內隱的認知歷程，並提出透過 fMRI、EEG、fNIRS 等腦科學技術結合被動式腦機介面（passive BCI）與人工智慧分析的新興策略，建立精準診斷與個別化教學的新模式。此研究不僅呼應全球教育神經科學之發展趨勢，亦為台灣數學教育研究開拓了創新且具前瞻性的發展方向。

本期專刊期許透過新興技術與數學教育研究的深度結合，推動研究視野的拓展與教育實務的革新，為未來數學教育的創新發展注入新的動能與啟發。

「數學教育新視角：新興研究技術的應用」主編

許慧玉 謹誌

# 臺灣數學教育期刊

第 12 卷 第 1 期

2014 年 4 月創刊

2025 年 4 月出刊

## 目錄

- 國二學生閱讀數學幾何證明問題之視覺行為特徵 1  
／ 傅培軒、徐柏棻、蔡孟蓉
- 以眼球追蹤技術探討數學焦慮與閱讀解題範例歷程之關聯—  
以微分為例 39  
／ 黃靖妤、邱國力
- 透過眼動探討國小與國中職前教師的數學課程覺察力：個案  
研究 71  
／ 林勇吉
- 學術瞭望**
- 數學教育的神經革命：腦科學新興技術之理論與實務應用 109  
／ 許慧玉、于靖、丁志堅、姚在府、潘柏宇

# Taiwan Journal of Mathematics Education

Vol. 12 No. 1

First Issue: April 2014

Current Issue: April 2025

---

## CONTENTS

Eighth Graders' Visual Behavior Characteristics When Reading  
Mathematical Geometry Proof Problems 1

／ Pei-Hsuan Fu, Po-Fen Hsu, Meng-Jung Tsai

Exploring the Relationships Between Mathematics Anxiety and  
the Process of Reading Differentiation Worked Examples: An  
Eye-tracking Study 39

／ Jing-Yu Huang, Guo-Li Chiou

Using Eye-Tracking to Investigate Curricular Noticing Among  
Pre-service Elementary and Secondary Mathematics Teachers: A  
Case Study 71

／ Yung-Chi Lin

### **Academy Observatory**

The Neuroscience Revolution in Mathematics Education:  
Theoretical and Practical Applications of Emerging Brain  
Technologies 109

／ Hui-Yu Hsu, Jing Yu, Tsu-Jen Ding, Zai-Fu Yao, Bo-Yu Pan

---

傅培軒、徐柏茶、蔡孟蓉 (2025)。  
國二學生閱讀數學幾何證明問題之視覺行為特徵。  
臺灣數學教育期刊, 12 (1), 1-37。  
[https://doi.org/10.6278/tjme.202504\\_12\(1\).001](https://doi.org/10.6278/tjme.202504_12(1).001)

## 國二學生閱讀數學幾何證明問題之視覺行為特徵

傅培軒<sup>1</sup> 徐柏茶<sup>2</sup> 蔡孟蓉<sup>2</sup>

<sup>1</sup>臺北市立仁愛國民中學

<sup>2</sup>國立臺灣師範大學學習科學學士學位學程

本研究旨在利用眼動追蹤技術追蹤國二學生閱讀數學幾何證明問題時的閱讀歷程，探討視覺行為特徵和學習成效之間的關係。本研究採眼動實驗研究方法，從 90 名國二學生依數學段考成績，篩選出 17 名已認識基本幾何符號，但未學過幾何證明的學生，參與幾何證明教材閱讀的眼動實驗。受試者在實驗中需要閱讀九頁關於三角形全等性質 (SSS、ASA、SAS) 的學習教材，每個全等性質皆含有三個頁面 (概念說明頁、簡單例題頁、困難例題頁)，每個頁面皆含有三個興趣區塊 (主旨區 (T)、說明區 (S)、圖形區 (G))。本研究採資料為本的研究取向，根據後測成績將學生分成高低學習成效兩組，比較兩組學生在不同教材頁面和不同興趣區塊的所有眼動指標，並運用遲滯序列分析 (Lag Sequential Analysis [LSA]) 辨識出兩組學生在教材閱讀歷程中的視覺行為特徵。研究結果發現：在概念說明頁的圖形區塊，高學習成效組具有顯著較長的總閱讀時間、總凝視時間、平均凝視時間、閱讀時間比例、凝視次數比例、重複閱讀時間、和重複凝視時間，顯示高學習成效的學生在理解概念時會花費較多的心力處理圖形資訊；而在簡單例題頁的說明區的文字，高學習成效學生的平均凝視時間則顯著較短，代表較易於理解簡單例題的文字說明。此外，LSA 結果顯示，高學習成效組在三個頁面均無明顯的注意力轉移特徵，然而，低學習成效組的學生在概念說明頁和困難例題頁的主旨區皆與空白區有顯著的來回反覆思考的視覺行為特徵，顯示理解主旨訊息有一定的困難，且其在概念說明頁說明區的注意力會明顯地轉移到圖形區，顯示低學習成效學生在理解概念說明文字時，可能很需要圖片訊息的輔助。本研究透過眼動資料的探勘分析，找出學習成效高低的學生，尤其有學習困難的學生，在閱讀數學幾何證明教材歷程中，有關注意力分布和注意力轉移的視覺行為特徵。本研究發現應可提供未來促進個別化數學學習的數位學習平台的開發。

**關鍵字：**幾何證明、眼球追蹤、學習歷程、視覺行為特徵

---

通訊作者：蔡孟蓉，e-mail：mjtsai99@ntnu.edu.tw

收稿：2024 年 5 月 20 日；

接受刊登：2025 年 3 月 15 日。

---

Fu, P. H., Hsu, P. F., & Tsai, M. J. (2025).

Eighth graders' visual behavior characteristics when reading mathematical geometry proof problems.

*Taiwan Journal of Mathematics Education*, 12(1), 1–37.

[https://doi.org/10.6278/tjme.202504\\_12\(1\).001](https://doi.org/10.6278/tjme.202504_12(1).001)

## **Eighth Graders' Visual Behavior Characteristics When Reading Mathematical Geometry Proof Problems**

Pei-Hsuan Fu<sup>1</sup>    Po-Fen Hsu<sup>2</sup>    Meng-Jung Tsai<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Taipei Municipal Ren Ai Junior High School

<sup>2</sup> Program of Learning Sciences, National Taiwan Normal University

This study aims to track the reading process of eighth-grade students when reading mathematical geometry proof problems using eye-tracking technology and to explore the visual behavior characteristics associated with different learning outcomes. Using an eye-tracking experimental research method, this study selected 17 subjects from 90 Taiwanese eighth-graders based on their mathematics midterm exam scores. These students had a basic knowledge of geometric symbols but had not yet studied geometric proofs. They participated in an eye-tracking experiment while reading geometry-proof materials. During the experiment, participants were asked to read learning materials on triangle congruence properties (SSS, ASA, SAS). Each congruence property consisted of three pages: a concept explanation page, a basic example page, and an advanced example page. Each page contained three information zones: Main Idea Zone, Explanation Zone, and Diagram Zone. Based on a data-driven approach, this study divided the subjects into high and low learning outcome groups based on post-test scores. The study then compared all eye-tracking metrics among different information zones across different material pages. Additionally, for each group, Lag Sequential Analysis (LSA) was applied to identify visual behavior characteristics of students' reading processes. The results revealed that, on the concept explanation page's Diagram Zone, the high-performance group exhibited significantly longer total reading time, total fixation duration, average fixation duration, percent of reading time, percent of fixation count, secondary passing time, and revisited fixation duration, suggesting that students with higher learning outcomes invested more effort in processing graphical information when comprehending the concepts. On the simple example page's Explanation Zone, high-performance students showed a significantly shorter average fixation duration, indicating that they perceived it easier than the low-performance group to understand the textual explanations of simple examples. On the other hand, LSA results surprisingly indicated that high-performance students exhibited no significant attentional shifts among different information zones. In contrast, low-performance students displayed frequent back-and-forth inter-scanning between the Main Idea Zone and blank spaces on both the concept explanation and difficult example pages, suggesting difficulty in understanding the core information. Moreover, low-performance students shifted their attention from the Explanation Zone to the Diagram Zone on the concept explanation page, indicating a greater reliance on visual aids to comprehend textual explanations. Through the learning analytics of eye-tracking data, this study identified the visual behavior characteristics of attentional distributions and attentional shifts for students with different learning outcomes, especially for students with learning difficulties, in reading mathematical geometry proof materials. The findings of this study may contribute to the future development of personalized digital learning platforms to improve students' mathematics learning.

**Keyword:** Geometric proof, eye tracking, learning process, visual behavior characteristics

---

Corresponding author : Meng-Jung Tsai · e-mail : [mjtsai99@ntnu.edu.tw](mailto:mjtsai99@ntnu.edu.tw)

Received : 20 May 2024;

Accepted : 15 March 2025.

## 壹、緒論

### 一、研究背景

在數學領域中，「證明」是追求真理與確定性的主要工具，許多學者已經投入大量心力研究與探索有關學習證明的相關議題（Knuth et al., 2019; Lesseig, 2016; Mirza et al., 2022; Weber & Mejía-Ramos, 2014）。證明的過程是透過已知條件來推導待證明的目標，學習證明技巧和思維方式是理解數學本質的關鍵。在 K-12 數學領域學習中，有些學生在學習數學時，往往僅將重點放在「得到答案」，因此在學習過程中，學生可能會傾向於依賴形式上的記憶。例如：對於類似的練習題，只按照題目的既定做法進行數字代換就能得到答案，而此情況容易讓學習者誤以為數學學習僅是「算出答案」的假象。當數學教學進入證明問題的學習階段後，學生才能逐漸體會到，數學學習的精隨在於對題目脈絡的深入理解以及邏輯思考過程。因此，學生在閱讀證明問題和學習解題過程中的脈絡，是值得關注和討論的議題。

在數學證明中，幾何證明涉及圖形和空間概念，不同於代數證明主要依賴符號計算和抽象推理，幾何證明則經由圖形使得證明較為具體且形象化。此種特性使得幾何證明在數學教育中扮演著特別角色，不僅能加深學生對數學概念的理解，還能培養他們的空間能力。而幾何圖形的證明過程會提供學習者豐富的訊息，如線段長度、角度……資訊，由於數學證明需要運用邏輯推理能力、除了觀察概念元素之間的相互關係外，更需將證明過程藉由文字清楚描述，對於國中學生而言是個相當複雜的學習任務，故而不易掌握數學證明的論證手法與涵義（左台益等人，2011）。學習幾何證明的過程中，常需要運用多層次的認知能力來理解和應用幾何概念（Yang & Lin, 2008），在涉及幾何證明的閱讀過程中，圖形的閱讀相當重要，林采雯與吳昭容（2016）研究結果指出大學生在閱讀有符號表徵的文本時會與圖形有所對照。Shahbari 與 Daher（2020）的研究發現對於中學生來說，完整證明三角形全等是一項困難的挑戰。許多學生在解題過程中，往往未能提供充分的條件或未能指明所根據的三角形全等性質，而是直接得出答案，這樣的作法可能揭露了解題過程中所遭遇的難處，或是對目標的誤解。

在國民基本教育中，學生首次接觸較為嚴謹的數學證明通常是在國中學習階段，而三角形全等證明則是學校幾何學的關鍵學習主題，因為三角形全等在幾何定理的證明過程中具有其有用性（Jones et al., 2013）。然而，目前關於三角形全等的教學研究並不多（Jones et al., 2013; Shahbari & Daher, 2020），在課室教授三角形全等證明時，教師通常要求學生嚴格運用已知條件進行推理，以滿足兩個三角形全等的要求。由於全等三角形的充分條件相對形式化且易於記憶，這對於學習其他幾何證明命題具有重要的助益。因此，本研究旨在探討三角形全等證明的初學者，在閱讀學習素材時的閱讀模式，藉由對眼動資料進行探勘分析，從視覺注意力的分布情形以及視覺注意力的轉移焦點，來探討不同閱讀理解程度的學生，在閱讀教材內容時，是否具有相同或不同的視覺行為特徵。

## 二、研究動機

證明是數學的核心精髓 (Markel, 1994)，在國中數學教學中，「說明」和「證明」是經常讓教師與學生面臨巨大挑戰的兩個環節。學習「證明」不僅是數學學習的一部分，更是培養學生能有縝密思考與正確邏輯思維的基石。美國數學教師協會 (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]) 的數學教育原則與標準 (Principles and Standards for School Mathematics) 也包含了推理與證明 (NCTM, 2000)，從其所制定的原則與標準不難看出，NCTM 對於數學教育的看法並不全然在於計算，更重視於邏輯推理的過程並希望能實際應用。

在台灣，Lin 與 Cheng (2003) 的研究指出學習幾何證明是一項相當困難且複雜的任務，Cheng 與 Lin (2007) 發現接近三分之一的國中三年級學生無法寫出幾何證明過程，而另有三分之一的學生僅能寫出不完整的幾何證明。英國學者也有相似的研究，Healy 與 Hoyles (1998, 2000) 以英國九年級學生為研究對象，要求學生敘述證明的意義並完成解答，研究發現能簡單證明的學生僅占 28% 至 56%。這些研究結果顯示，對於國中學生來說，學習數學證明存在一定難度。有學者也強調在數學課程中，應加強學習證明，並且提出適當的課程材料開發 (Hanna & De Villiers, 2012)。然而，即使教師們在教學時使用相同的教材，學生的學習成效卻仍存在個別差異，而這些個別差異是否與學生閱讀教材內容的方式有關，本研究認為是值得進一步探討的方向。為了探究學習成效的差異是否與學生閱讀教材資料的方式有關，這些閱讀模式是否有顯著的特徵，目前並不清楚，仍需要更多相關的研究佐證。雖然三角形全等性質的學習是國中學習幾何證明的重要主題，但關於三角形全等的研究也不多 (Jones et al., 2013; Shahbari & Daher, 2020)，因此本研究選定三角形全等性質做為學習內容的主題。

眼動追蹤技術能夠測量自然閱讀過程中的即時訊息處理，直接反映閱讀者的視覺行為 (Rayner et al., 2006)，該技術已廣泛運用於閱讀研究 (Rayner, 2009)，至今已有不少數學相關研究採用眼動技術，先前學者回顧過去幾年在數學教育中使用眼動追蹤技術的相關研究 (吳昭容, 2019; Perttula, 2017; Strohmaier et al., 2020)，結果發現，自 2006 年以來，數學領域利用眼球追蹤的研究已快速增加 (Strohmaier et al., 2020)。研究內容多涉及數字和算術的部分，雖也有與幾何證明相關之研究 (Alqassab et al., 2018; Muldner & Burlison, 2015)，但僅占其少部分 (Strohmaier et al., 2020)，而研究對象又以大學生為主，針對初學幾何證明的國中生之相關研究，仍然十分闕如，而學習成就較高的國中生是否能顯示如具有幾何證明學習經驗的大學生一樣的視覺行為模式，與學習成就較低的學生之間是否會有顯著的差別，應該是值得關注的研究議題。

許多先前研究曾經探討影響數學幾何證明學習成效的因素，如圖示著色與否會影響受試者的回憶率 (陳琪瑤、吳昭容, 2012)，林采雯與吳昭容 (2016) 所進行的研究指出，大部分讀者的閱讀順序是先閱讀文字再閱讀圖形，且違反「已知—新訊息」的文本排序會降低閱讀效率，但鮮少討論視覺行為模式與學習成效的關聯性或是對於學習成效的影響。眼動研究能在短時間之內收集大量眼動資料，以往多是以不同閱讀材料作為研究變項進行眼

動指標分析比較，而本研究的興趣在於了解不同學習成效群組的學生，是否具有不同的閱讀行為模式，因此，本研究將以學習成效作為分組依據，來觀察不同學習成效學生在教材閱讀歷程中的視覺行為模式。

整體而言，本研究有以下幾點特色：(一) 不同於傳統在實驗室裡進行的眼動研究，本研究進入一般學校教室進行眼動實驗，在一般自然的學習閱讀情境中進行眼動資料收集；

(二) 本研究以資料為本的機器學習研究取向 (Rajendran et al., 2022)，根據學生學習成效進行分組，再運用資料探勘方法分析不同群體眼動資料的特徵，將眼動數據納入大數據分析和機器學習的研究範疇，對創新與前瞻的研究領域進行初探。

### 三、研究問題

根據以上的研究背景及研究動機，本研究旨在探討未學習過數學幾何證明的國中二年級學生閱讀數學幾何證明的學習歷程，分析不同學習成效之學生在閱讀學習教材時，其注意力的分布情形以及注意力的轉移焦點，因此，本研究欲探討的研究問題如下：

- (一) 對於尚未學習幾何證明之國中生，在數學幾何證明問題的閱讀歷程中，不同學習成效的學生是否會有不同的注意力分布情形？
- (二) 對於尚未學習幾何證明之國中生，在數學幾何證明問題的閱讀歷程中，不同學習成效的學生是否會有不同的注意力轉移特徵？

## 貳、文獻探討

### 一、數學幾何證明的學習與其圖文閱讀理解相關研究

證明為數學學習中重要角色 (Stylianides et al., 2017)，且證明和推理是數學的基本面 (Martin et al., 2005)。Hanna 等人 (2009) 提出數學證明含有「推理鏈」與「符號、語法的表徵」兩個要素，即使證明過程是以文字敘述，敘述語法也與其他學科有相當程度的相異。換句話說，即使學生能對他的老師論證或解釋某數學證明題，但學生仍需要學習以特定的證明格式加以紀錄，才算完成數學證明的學習 (謝佳叡、唐書志，2017)。在教學現場，常見學生在計算證明題因未能完整描述理由而導致表現不佳，觀察其原因可能是學生對於數學語法表徵不夠熟悉所導致的結果。幾何學不僅是研究中小學學生證明和論證的重要領域 (Campbell et al., 2020)，幾何證明更是經常被用作學習數學證明的入門課程 (左台益等人，2011)，幾何圖形中有豐富的訊息，學習者能夠直接觀察圖形特徵，然而依舊需要學習者從中識別並提取所需要素，進一步利用這些要素推論幾何性質，這對於剛開始學習數學證明的初學者來說，是一個極具難度的學習挑戰。而許多研究也發現幾何證明問題中，學生很難將語言、符號和圖形及視覺之間建立聯繫 (Alcock & Weber, 2010; Zazkis et al., 2016)。由上述可知，學習數學證明具有一定難度。

在數學教育中，幾何證明的教學是一個具有挑戰性的領域。Herbst 等人（2010）觀察三位數學教師在幾何課堂中使用不同教學情境與策略，但不論是何種教學策略或課室狀況，三位教師都相當注重幾何的邏輯與細節，特別是每個步驟之間的正確與關聯。Shahbari 與 Daher（2020）則發現學生在三角形全等的概念以及在相關證明過程中遇到了各種困難，而 Tsujiyama 與 Yui（2018）更是提到接受過關於三角形的定義和全等性質教學的學生，可能會更容易應對證明任務。

閱讀理解是學習過程中的必要環節，許多學者致力於研究數學中的閱讀理解（Akbaşlı et al., 2016; Österholm, 2006; Watkins, 1979），有研究則著重於幾何證明的閱讀理解（Anwar et al., 2021; Lin & Yang, 2007; Yang & Lin, 2008）。Selden 與 Selden（2003）研究結果指出應將閱讀與寫作視為一體，這對於讀懂數學證明與學習證明是相當重要的，而如何將閱讀與寫作融入數學教學，是一項至關重要的教學策略。Österholm（2006）探討數學的寫作敘述方法，對中學生與大學生在閱讀理解時的影響，發現閱讀文本敘述中當含有數學符號時，學習者需要有具備特定學科讀寫能力，該研究更建議應有進一步對於閱讀理解教學策略之研究。葉明達與柳賢（2007）更利用放聲思考研究方法，探討學生的「閱讀理解層級」及「數學解題階段」，進一步發展出「判讀理解層級」。Yang 與 Lin（2008）以閱讀理解的角度，探討學習者在閱讀幾何證明時的認知過程，以及知識與邏輯對其理解幾何證明的影響。更有對學生如何解讀數學單詞的相關研究，結果指出閱讀理解技巧在解讀數學詞語時發揮更大作用（Boonen et al., 2016）。Yang 與 Lin（2008）提出幾何證明閱讀模型（reading comprehension of geometry proof [RCGP]），指出理解幾何證明過程是多層次的，從基礎的理解到深入的邏輯分析與應用，其中包含了基本知識、邏輯系統、概念整合、一般性、應用與擴展、欣賞。此模型解釋了許多看得懂文句與要求，卻無法理解或辨認已知、應用、結論等相關幾何證明的高層次認知。

## 二、數學幾何證明圖文閱讀理解之眼動研究

眼動相關研究結果指出，影響學習者學習或閱讀模式的可能因素有很多，如：先備/先驗知識（Ho et al., 2014; Van Marlen et al., 2018; Yang et al., 2013）、圖文配置位置（賴孟龍、陳彥樺，2012; Yang et al., 2013）、學習素材差異（陳琪瑤、吳昭容，2012；簡郁芬、吳昭容，2012；Ott et al., 2018; Soemer & Schiefele, 2019）、動機或興趣（Catrysse et al., 2018; Soemer & Schiefele, 2019）、閱讀自我效能（Jian, 2017）、後設認知（Trevors et al., 2016）、認知負荷（Strobel et al., 2018）等。從以上討論可以發現，閱讀習慣會受到多重因素影響，而數學幾何證明的學習就常有文字與圖案同時出現的情況。過去文獻探討有關數學證明的學習，較多是透過操弄教學素材的準實驗研究法（左台益等人，2011；許瑋芷、陳明溥，2010）、問卷測量（Cheng & Lin, 2007; Healy & Hoyles, 2000）、放聲思考（葉明達、柳賢，2007）、訪談（Yang & Lin, 2008）……，經由所得之數據分析資料得出結果，但這些方法皆可能因為實驗對象對自我認識不足或由於事後訪談間隔了一段時間，甚至因不習慣或增加

工作負荷（如：放聲思考），而影響學習者的表現（Nisbett & Wilson, 1977）。上述可能所遇之難處，因眼球追蹤技術得以避免，賴於科技進步與眼球追蹤器材精進，用於實驗條件限制減少，遂成為探究學習者認知方式的較佳選擇。

然而縱覽這些研究會發現，大部分有關幾何學習的研究對象都是大學生（如：林宓雯、吳昭容，2016；陳琪瑤、吳昭容，2012；Alqassab et al., 2018; Lee & Wu, 2018; Muldner & Burleson, 2015），或是高中生（如：Schindler & Lilienthal, 2019），而在我國國中二年級的學生正是將要開始學習幾何證明的時候，且基於閱讀技能的成熟與認知功能的差異，經過升學篩選的大學生與已受過較為完整幾何證明訓練的高中生，都是已經對於幾何證明有一定熟悉度的實驗參與者，可能在面對相關的圖文敘述或是幾何證明時都已經是受過訓練的較佳閱讀模式，這些已經趨於成熟的閱讀者與尚未學習過嚴謹幾何證明的國中生相比，對於閱讀材料的處理方式不能直接由以往的研究來進行推論。

### 三、閱讀歷程的眼動指標分析

隨著科技的不斷進步，眼動技術相關設備逐漸成熟，研究者不再因昂貴的設備成本而對眼動實驗望而卻步。隨著眼動設備的使用門檻降低，快速推動了眼動相關研究的發展，這一趨勢使眼動技術在許多學科領域中的應用愈加廣泛。基於 Just 與 Carpenter(1976, 1980) 提出「心眼假設 (eye-mind hypothesis)」以及「立即性假設 (immediacy assumption)」，以及最基本的兩種眼球運動特徵 (Rayner, 1998)，也就是凝視 (Fixation) 和掃視 (Saccade)，研究者通常使用各種不同的眼動指標來解釋各種相關的認知意涵 (Rayner, 2009)，而 Lai 等人 (2013) 根據測量尺度將眼動指標分成時間指標、空間指標與次數指標等三大類別，時間類別的眼動指標常被用來分析有關「何時」和「多久」的研究問題 (Liversedge et al., 1998)；空間類別的眼動指標常被用來回答有關「何處」和「如何」的研究問題 (Liversedge & Findlay, 2000)；次數類別的眼動指標常被用來回答有關「連結」的研究問題。Lai 等人 (2013) 與楊芳瑩等人 (2018) 曾將眼動指標和認知意涵進行連結。本研究根據蔡孟蓉教授研究團隊所開發的即時眼動凝視辨識分析系統 (Real Gaze [RG]; Hsu et al., 2016) 所輸出的多項眼動指標，挑選出十一個在閱讀歷程中常見的眼動指標，以及其所代表的相關認知意涵 (詳見表 1)。這些指標有些是整體螢幕畫面的眼動指標 (Slide Metrics，例如：Total Time Shown [TTS])，有些是個別興趣區塊 (Area of Interest [AOI]) 相關的眼動指標 (AOI Metrics，例如：Proportion of Fixation Duration [PFD])，有些則是既適用於整體螢幕也適用於個別 AOI 的眼動指標 (例如：Total Fixation Duration [TFD]、Total Fixation Counts [TFC]、Average Fixation Duration [AFD])。

簡言之，這些眼動指標常用來代表線上學習時閱讀數位學習教材或與數位學習內容互動的視覺行為特徵。而且經常用來揭示學習著的視覺注意力分布情形。並且有時會再進一步用眼動熱圖參照佐證。因此，本研究採取此方法深入分析眼動指標，以更精準地了解學生的閱讀歷程。

表 1

常見的閱讀歷程相關眼動指標及其所屬類別和所代表的認知意涵

類別	眼動指標	認知意涵
時間指標	總閱讀時間 (TTS)	處理整體畫面或個別區塊訊息時所花費的總時間，包含所有凝視時間和掃視時間的總和。代表處理該訊息所需要的總資源。
	首次閱讀時間 (FPT)	第一次經過個別區塊所花費的時間，包含凝視時間和掃視時間。代表對該訊息進行初次處理或任務初期階段所投入的資源。
	重複閱讀時間 (SPT)	再次經過個別區塊所花費的總時間，包含凝視時間和掃視時間。代表對該訊息進行再次處理或任務後期階段所重複投入的資源。
	總凝視時間 (TFD)	對於整體畫面或個別區塊進行認知處理所花費的總時間，包含所有凝視時間的總和。代表處理該訊息所需要的總認知資源。
	凝視時間百分比 (PFD)	個別區塊相對於整體畫面的總凝視時間的比值。代表對區塊訊息進行認知處理所分配的認知資源比例或注意力分配比例，亦可代表處理該訊息的專注程度。
	平均凝視時間 (AFD)	處理整體畫面或個別區塊訊息時，平均每個凝視點的時間長度。代表對該區塊訊息進行認知處理所需的平均深度或認知努力的強度，有時亦代表處理該訊息的困難程度。AFD 愈高代表訊息內容愈困難，認知負荷愈高。
	重複凝視時間 (RFD)	再次對個別區塊進行認知處理所花費的總凝視時間。代表對該訊息進行再次認知處理或任務後期階段所重複投入的認知資源，亦可代表該訊息對認知活動的重要性或關鍵性。
空間指標	平均跳視長度 (ASL)	處理整體畫面或個別區塊訊息時，連續兩個凝視點之間的平均距離，代表平均每次跳視能夠處理的訊息量，代表對該訊息的熟悉程度。ASL 愈長代表對訊息內容愈熟悉，或認知負荷愈小。
次數指標	總凝視次數 (TFC)	處理整體畫面或個別區塊訊息時，凝視點出現的次數總和。代表對該訊息進行認知處理的總次數。TFC 愈高代表訊息愈重要
	凝視次數百分比 (PFC)	個別區塊相對於整體畫面的總凝視次數的比率。代表對該訊息區塊的聚焦程度或訊息的重要性。PFC 愈高代表此訊息區塊愈重要，愈聚焦於此訊息區塊。
	來回掃視次數 (ISC)	在兩個個別區塊之間來回的跳視次數。代表對兩個區塊訊息有進行連結、比較、或統整的資訊需求。ISC 次數愈高代表進行連結、比較和統整等高階認知活動愈多。

#### 四、視覺行為的遲滯序列分析

遲滯序列分析 (Lag Sequential Analysis [LSA]; Bakeman & Gottman, 1997) 是一種常見的行為分析統計方法，用於分析一連串行為事件發生序列中的顯著連續行為事件，在眼動資料分析中，一次凝視點位置的轉移代表一次事件。我們可以利用眼動儀器收集紀錄受試者的凝視點位置，並將閱讀內容以興趣區塊 (AOI) 進行編碼，透過觀察受試者凝視點在 AOI 中的轉移狀況，以代表受試者的視覺注意力的轉移順序。LSA 的資料分析最終 (Bakeman & Gottman, 1997) 會輸出一個  $z$  值表， $z$  值大於 1.96 的視覺注意力轉移則被視為顯著的注意力轉移特徵，我們可將顯著的注意力轉移行為，進一步使用進階眼動資料視覺化分析平台 (Web-based Eye-tracking Data Analyzer [WEDA]; Tsai et al., 2018) 輸出視覺化的眼動 LSA 分析結果，以清楚顯示個體或小組之視覺注意力在各 AOI 訊息之間的轉移特徵。本研究主要觀察學習者在不同 AOI 之間的注意力轉移狀況，因此採用去對角化演算法 (Bakeman & Gottman, 1997) 來呈現資料的分析結果。輸出圖形箭頭上的數字通常代表從一個 AOI 到另一個 AOI 的凝視轉移機率，通常界於 0 和 1 之間，數字愈大代表轉移機率愈高，亦代表此注意力轉移事件愈重要。

LSA 經常被使用在教育研究中，如 Hsu 等人 (2019) 探討了遊戲玩家的視覺行為分布和轉換模式與其自我效能的關係，結果表明自我效能較高的玩家更傾向於將注意力集中在成功完成任務所需的關鍵資訊上；Tsai 與 Wu (2021) 的研究則利用 LSA 得知不同模式的學習者在選擇資訊時會有差異，而且當視覺注意力分配到無關的資訊上時，會降低任務表現；Chiou 等人 (2022) 使用 LSA 的研究分析表明，表現較好的學生能更頻繁的在教學內容、控制面板和目標區域之間進行視覺注意力轉移，表示他們具有更有效的信息整合策略。Tsai 等人 (2022) 和 Tsai 等人 (2025) 更使用 LSA 揭示出批判性思考閱讀策略的視覺行為特徵，以及不同網路知識信念群組在閱讀網路衝突資訊時的視覺行為特徵。

簡言之，LSA 分析方法很適合用於了解研究學習認知歷程的注意力動態變化，相比於傳統方法如問卷、放聲思考、事後訪談或行為記錄等，可能存在著受試者或觀察者都無法察覺到的視覺注意力行為，將眼動數據透過 LSA 進行分析，分析結果可以用以了解學習者在處理訊息時的視覺注意力轉移特徵，更能夠有效的探討受試者的認知過程。這也是本研究為何採取此方法進行眼動資料分析的原因。

### 參、方法

#### 一、研究對象

本研究採用立意取樣，為避免因不識幾何符號而導致無法閱讀素材，研究對象是從臺灣台北市某國中 90 名沒有學習過「三角形全等性質」二年級生中，篩選其「基本幾何符號知識測驗」得分達 60 分以上之學生。挑選近五次段考成績排名前 25% 或後 25% 的學生共 18 名，資料分析過程刪除 1 名因眼睛視力而導致眼動資料不完整的研究對象，最後選出 7 位男學生、10 位女學生，針對 17 名研究對象來進行本實驗研究資料分析與結果討論。

## 二、研究工具

本研究使用的研究工具包括：實驗素材、基本幾何符號知識測驗問卷、學習成效測驗問卷、及眼動資料收集分析系統（Tobii 4C 眼動儀搭配 RG 軟體和 WEDA 平台）。

### （一）實驗素材

本研究實驗素材為三角形的全等性質，一般而言，國中教學會涵蓋五種三角形全等之狀況：SSS、SAS、ASA、AAS 和 RHS。考量到國中生的專注力持續時間通常不到 15 分鐘（Vawter, 2010），本研究從中選擇了部分全等性質作為實驗素材。SSS 是最基本的全等性質予以保留，SAS、ASA、AAS 則保留「夾角」、「夾邊」概念的 SAS 和 ASA，由於 RHS 僅適用於直角三角形，與一般的全等性質較為不同，為避免誤解因此不納入本研究實驗素材。因此，本研究選取了三種全等性質（SSS、SAS、ASA）作為實驗素材。

為回答本研究之研究問題，經兩位現職國中教師以及一名數理教育專家討論後，分別設計了概念說明頁、簡單例題頁、困難例題頁，以觀察不同學習成效學生在理解概念時、利用概念解釋全等時、處理較複雜的幾何任務時的注意力分布情形，並設計每頁均有明確的主旨區、說明區以及圖形區的閱讀素材，以便後續分析注意力轉移模式，進一步討論學生可能在學習時採用的學習策略或是遭遇的學習困難。

實驗素材於教學頁面前，提供一複習頁（如圖 1），此頁為國小階段學過之全等相關符號名詞（如：對應邊、對應角、對應點及全等記號，以及介紹符號與用語，如：「S」表示邊、「A」表示角、夾邊與夾角之定義），此複習頁不予以分析。教學頁面（如圖 2），分別為概念說明頁、簡單例題頁、困難例題頁。概念說明頁包含內容為敘述該全等性質之定義和以尺規作圖說明該全等性質；簡單例題頁包含內容為兩個不重疊之三角形，示範如何依據題目所給的條件，利用三角形全等性質說明所指定的兩個三角形全等；困難例題頁與簡單例題頁面不同處為指定的兩個三角形是部分重疊，因此提高了題目之困難度。

圖 1  
複習頁面內容

**符號說明：**

國小曾經學習過，若兩個三角形 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 能夠完全重疊，則稱「 $\triangle ABC$ 全等於 $\triangle DEF$ 」可以記做「 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 」此時

(1) 疊合在一起的頂點：  
A和D、B和E、C和F稱為**對應點**

(2) 疊合在一起的邊：  
 $\overline{AB}$ 和 $\overline{DE}$ 、 $\overline{BC}$ 和 $\overline{EF}$ 、 $\overline{AC}$ 和 $\overline{DF}$ 稱為**對應邊**

(3) 疊合在一起的角：  
 $\angle A$ 和 $\angle D$ 、 $\angle B$ 和 $\angle E$ 、 $\angle C$ 和 $\angle F$ 稱為**對應角**

以下為方便起見，對於將使用到的符號與用語做說明

(1) 記號「S」表示三角形的**邊**(Side)

(2) 記號「A」表示三角形的**角**(Angle)

(3) **夾邊**：兩角所夾的邊，例如 $\angle A$ 與 $\angle B$ 夾邊為 $\overline{AB}$

(4) **夾角**：兩邊所夾的角，例如 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 的夾角是 $\angle A$

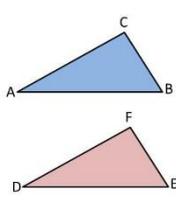


圖 2

教學頁面內容（以 SSS 全等性質為例）

概念說明頁

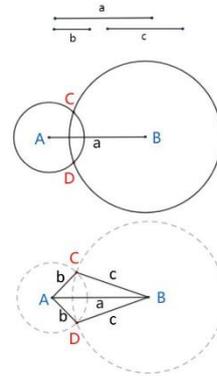
**三角形的SSS全等性質：**

若兩三角形中，三組對應邊分別等長，則兩三角形全等

三角形SSS全等性質的理由：

若給定三段固定的長度a、b、c，用這三段長度做出來的三角形是唯一的嗎？

- 1) 以線段a的左端A點為圓心，半徑為b畫一個圓，那麼這個圓上的每一個點到A的距離都是b
- 2) 以線段a的右端B點為圓心，半徑為c畫一個圓，那麼這個圓上的每一個點到B的距離都是c
- 3) 我們發現兩個圓交於兩個點C、D
- 4) 連接AC、AD、BC、BD
- 5) 可以發現 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 對折後能夠疊合
- 6) 用固定的三段長度為邊長做的三角形是唯一的
- 7) 於是發現：兩三角形中，三組對應邊分別等長，則兩三角形全等



簡單例題頁

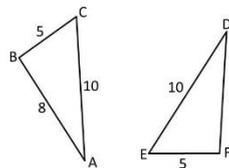
**SSS全等性質**

**例題1**

如圖， $\triangle ABC$ 中 $\overline{AB} = 8$ 、 $\overline{BC} = 5$ 、 $\overline{AC} = 10$ ，且 $\triangle DEF$ 中 $\overline{DE} = 10$ 、 $\overline{EF} = 5$ 、 $\overline{DF} = 8$ ，試說明 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 是否為全等關係？

<答>

$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中  
 因為 $\overline{AB} = \overline{DF} = 8$   
 $\overline{AC} = \overline{DE} = 10$   
 $\overline{BC} = \overline{EF} = 5$   
 所以 $\triangle ABC \cong \triangle DEF(SSS)$



困難例題頁

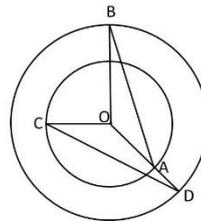
**SSS全等性質**

**例題2**

如圖，同心圓圓心為O，已知 $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，試說明 $\triangle OAB$ 和 $\triangle OCD$ 是否為全等關係？

<答>

$\triangle OAB$ 和 $\triangle OCD$ 中  
 因為 $\overline{AB} = \overline{CD}$  (已知條件)  
 $\overline{OA} = \overline{OC}$  (小圓半徑)  
 $\overline{OB} = \overline{OD}$  (大圓半徑)  
 所以 $\triangle OAB \cong \triangle OCD(SSS)$



## (二) 基本幾何符號知識測驗

本實驗閱讀素材內容為三角形的全等性質，內容包含一些數學符號，以基本幾何符號知識測驗來得知研究對象是否有足夠閱讀素材之先備知識，以避免因先備知識不足所導致實驗結果有所偏差的情況。基本幾何符號知識測驗題目是經兩名國中數學教師及一名數理教育專家審視，三名專家經多次會議討論後所確認的試題，基本幾何符號知識測驗共 7 題，共 20 個填充格（每格 5 分），滿分為 100 分（試題內容詳見附錄 1），詳細各題符號與所對應之實驗素材，如表 2。

**表 2**  
基本幾何符號知識測驗試題分析表

題號	符號呈現	對應實驗素材或成效測驗
1	單一角度的表示，如： $\angle A$	ASA 全等性質概念說明頁、簡單例題頁、困難例題頁。SAS 全等性質概念說明頁、簡單例題頁。
2	兩點距離的表示，如： $\overline{AB}$	SSS 全等性質概念說明頁、簡單例題頁、困難例題頁。ASA 全等性質簡單例題頁、困難例題頁。SAS 全等性質概念說明頁、簡單例題頁、困難例題頁。
3	有被切割開的角度表達，以避免誤解符號在圖中意義，如： $\angle ACD$	SAS 全等性質困難例題頁。
4	角度相加、線段相加之符號表達 如： $\angle EAD + \angle DAC$	ASA 全等性質困難例題頁。
5	對於正方形與正三角形性質之理解，包含邊長相等、內角相等	SAS 全等性質困難例題頁。
6	外角定理之應用	學習成效測驗。
7	正三角形高與面積	學習成效測驗。

## (三) 學習成效測驗

學習成效測驗是為了瞭解學生在閱讀實驗素材後之學習成效，經由兩名國中數學教師及一名數理教育專家審視，學習成效測驗中有選擇題、填充題、綜合題三種題型：選擇題 12 題（每題 4 分，共 48 分），評量研究對象對於三角形全等性質定義之記憶、理解與應用；填充題 1 題（共 6 格，每格 4 分，共 24 分），評量研究對象三角形全等性質之記憶與理解；綜合題 3 題（每題 7 分，共 21 分），內容為需利用三角形全等性質來說明題目中兩個

三角形全等之原因，評量研究對象對三角形全等性質之分析與評鑑能力，該題目依回答情況會給予相對應分數，詳見附件（試題內容詳見附錄 2），詳細所對應之全等性質與認知層次（Bloom et al., 1956），如表 3。評分綜合題時，由於可以部分給分，為求評分一致，是由兩名國中數學教師進行該大題之評分，若兩位教師評分相同即採計該成績；若出現評分不一的狀況，由第三名數學教師進行評分，若有與前兩位教師其中之一評分相同即為該相同分數；若三名數學教師評分皆不同則進行評判討論，最後三位數學教師達成評分共識。

**表 3**  
學習成效測驗試題分析表

題號	對應全等性質	認知層次	題號	對應全等性質	認知層次
選擇 1	ASA	記憶	選擇 11	SSS	應用
選擇 2	SSS	記憶	選擇 12	ASA	應用
選擇 3	SAS	記憶	填充題	SSS、 ASA、 SAS	理解
選擇 4	SSS	理解	計算證明 1	SSS	分析
選擇 5	SAS	理解	計算證明 2	ASA	分析
選擇 6	ASA	理解	計算證明 3	SAS	分析
選擇 7	ASA	應用			
選擇 8	SAS	應用			
選擇 9	SAS	應用			
選擇 10	SAS	應用			

#### （四）眼動資料收集與分析系統

本研究資料收集使用遠距可攜式 Tobii 4C 眼動儀器（取樣頻率為 90Hz），Tobii 4C 可直接固定於筆記型電腦螢幕下方（如圖 3），實驗時搭配蔡孟蓉教授團隊所開發的「即時眼動凝視辨識分析系統（RG）」（如圖 4）即可同時進行眼動原始資料（sampling point）的收集、凝視點（fixation）的辨識、以及客製化眼動指標的輸出，由於 RG 軟體提供了二次眼動校正的功能，因此使用 Tobii 4C 和 RG 進行實驗所輸出的眼動數據和指標均具有一定的精準程度，這項技術讓學習者能夠在一般的學習環境中進行眼動實驗（Hsu et al., 2016）。因此，本研究選擇用 Tobii 4C 搭配 RG 軟體（Hsu et al., 2016）到學校教室進行眼動實驗資料的收集。另外，為將收集到的眼動凝視順序資料進行遲滯序列分析（LSA），本研究亦使用蔡孟蓉教授團隊開發的「進階眼動資料視覺化分析平台（WEDA）」（如圖 5）進行眼動資料的進階分析，此平台可將凝視點資料轉化為個人和小組的掃視路徑、凝視熱圖、以及將 LSA 分析結果直接輸出凝視點轉移特徵，用以揭示學習個體或群體在學習歷程或閱讀歷程

中的注意力分布和注意力轉移等視覺行為特徵。因此本研究運用 WEDA 系統進行後續的眼動資料進階分析，將眼動資料視覺化呈現分析結果。

**圖 3**

眼動儀設置及實驗示意圖

**圖 4**

即時眼動凝視辨識分析系統介面 (RG)

**圖 5**

進階眼動資料視覺化分析平台介面(WEDA)



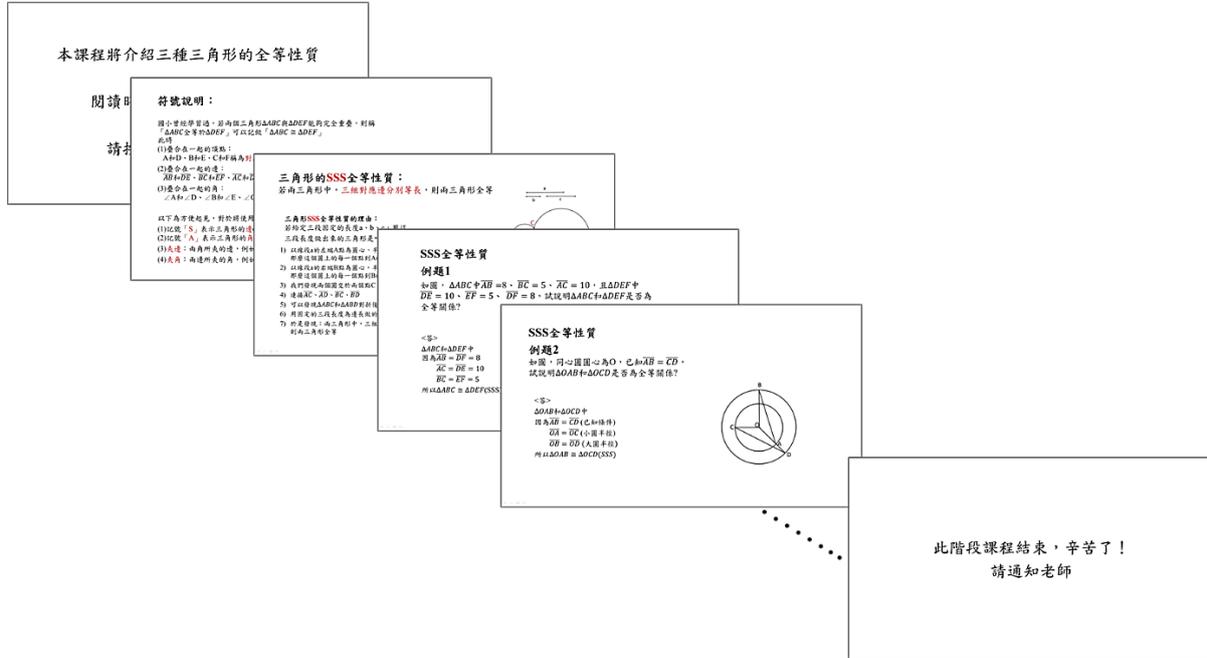
### 三、實驗流程

為使實驗能順利進行，且受試學生能完整看完實驗素材，並避免受試學生對於電腦操作的問題導致實驗中斷造成眼動資料遺失，在正式進行實驗前選取符合「沒有學習過三角形全等性質」且「通過基本幾何符號知識測驗」之學生三名，進行前導實驗以確認實驗流程細節以及所需時間。

研究流程為請學生填寫「基本幾何符號知識測驗問卷」，並依據基本幾何符號知識測驗成績達 60 分以上及近五次段考成績排名前 25%或後 25%者來進行後續的實驗素材閱讀之眼動資料收集。實驗素材閱讀前，研究者會協助研究對象使用 RG 系統進行眼動校正，通

過校正（確保所收集之視覺行為資料準確）後，會給予研究對象至多 20 分鐘的時間來閱讀實驗素材（如圖 6）。實驗素材閱讀完畢後請研究對象填寫學習成效測驗（至多 25 分鐘）。

圖 6 實驗素材呈現順序



### 四、資料處理與分析

#### (一) 研究對象分組

本研究依所收集到的學習成效測驗之結果，將研究對象依學習成效測驗成績平均將研究對象分為高學習成效組、低學習成效組。

#### (二) 教學頁面素材之興趣區編碼

本研究實驗主題為三角形的全等性質教學，實驗素材包含：複習頁（符號說明）、教學內容頁。教學內容頁類型區分為：概念說明頁、簡單例題頁、困難例題頁，每個三角形的全等性質皆有 1 頁概念說明頁、1 頁簡單例題頁和 1 頁困難例題頁。本研究將 3 個全等性質的概念說明頁歸為一組(共三個頁面)、簡單例題頁歸為一組(共三個頁面)、困難例題頁歸為一組(共三個頁面)，來形成不同教學內容類型的三組。為了進行視覺行為分析，本研究將每個教學內容頁分區定義：主旨區（T）、說明區（S）以及圖形區（G）三個興趣區（如圖 7），若不在上述三個興趣區域框內將視為空白區（Out）。針對上述之設計，用以進一步分析研究對象閱讀不同教學頁面時，其眼動指標及注意力轉移模式之差異。

圖 7  
頁面興趣區 (AOI) 定義

概念說明頁

簡單例題頁

困難例題頁

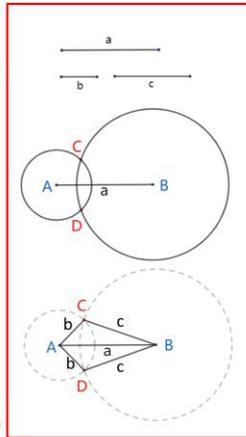
主旨區 (T)

**三角形的SSS全等性質：**  
若兩三角形中，三組對應邊分別等長，則兩三角形全等

三角形SSS全等性質的理由：

- 若給定三段固定的長度a、b、c，用這三段長度做出來的三角形是唯一的嗎？
- 1) 以線段a的左端A點為圓心，半徑為b畫一個圓，那麼這個圓上的每一個點到A的距離都是b
  - 2) 以線段a的右端B點為圓心，半徑為c畫一個圓，那麼這個圓上的每一個點到B的距離都是c
  - 3) 我們發現兩個圓交於兩個點C、D
  - 4) 連接AC、AD、BC、BD
  - 5) 可以發現 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 對折後能夠疊合
  - 6) 用固定的三段長度為邊長做的三角形是唯一的
  - 7) 於是發現：兩三角形中，三組對應邊分別等長，則兩三角形全等

說明區 (S)



圖形區 (G)

主旨區 (T)

**SSS全等性質**

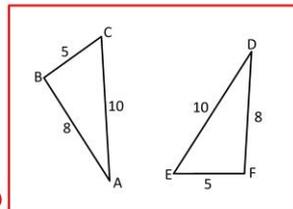
**例題1**

如圖， $\triangle ABC$ 中 $\overline{AB} = 8$ 、 $\overline{BC} = 5$ 、 $\overline{AC} = 10$ ，且 $\triangle DEF$ 中 $\overline{DE} = 10$ 、 $\overline{EF} = 5$ 、 $\overline{DF} = 8$ ，試說明 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 是否為全等關係？

<答>

$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中  
因為 $\overline{AB} = \overline{DF} = 8$   
 $\overline{AC} = \overline{DE} = 10$   
 $\overline{BC} = \overline{EF} = 5$   
所以 $\triangle ABC \cong \triangle DEF(SSS)$

說明區 (S)



圖形區 (G)

主旨區 (T)

**SSS全等性質**

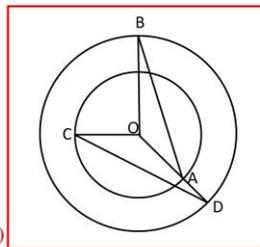
**例題2**

如圖，同心圓圓心為O，已知 $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，試說明 $\triangle OAB$ 和 $\triangle OCD$ 是否為全等關係？

<答>

$\triangle OAB$ 和 $\triangle OCD$ 中  
因為 $\overline{AB} = \overline{CD}$  (已知條件)  
 $\overline{OA} = \overline{OC}$  (小圓半徑)  
 $\overline{OB} = \overline{OD}$  (大圓半徑)  
所以 $\triangle OAB \cong \triangle OCD(SSS)$

說明區 (S)



圖形區 (G)

### (三) 眼動指標

依據前述的教學頁面的分類進行編碼，每一種教學頁面，觀察 5 個整體頁面的眼動指標 (TTS、TFD、PFD、TFC、AFD)，並對眼動指標進行重新計算，以概念說明頁為例 (表 4)。每個頁面興趣區分為：主旨區 (T)、說明區 (S)、圖形區 (G)，觀察 10 個 AOI 眼動指標，並對眼動指標進行重新計算，以概念說明頁的主旨區為例 (如表 5)。

**表 4**  
整體眼動指標編碼表

眼動指標	編碼 (眼動指標_教學頁面類別)	計算方式
概念說明頁的總閱讀時間	TTS_概念說明頁	三個概念說明頁頁面的閱讀時間總和
概念說明頁的總凝視時間	TFD_概念說明頁	三個概念說明頁頁面的凝視時間總和
概念說明頁的凝視時間比例	PFD_概念說明頁	閱讀過程中使用者凝視的時間佔總閱讀時間的比例 (總凝視時間/總閱讀時間)
概念說明頁的總凝視次數	TFC_概念說明頁	三個概念說明頁頁面的凝視次數總和
概念說明頁的平均凝視時間	AFD_概念說明頁	三個概念說明頁頁面的平均每次凝視所花的時間 (總凝視時間/總凝視次數)

註：「概念說明頁」可換成「簡單例題頁」、「困難例題頁」。

TTS：總閱讀時間、TFD：總凝視時間、PFD：凝視時間比例、TFC：總凝視次數、AFD：平均凝視時間。

**表 5**  
個別眼動指標編碼表

眼動指標	編碼 (眼動指標_教學頁面類別_興趣區域)	計算方式
概念說明頁主旨區 總閱讀時間	TTS_概念說明頁_T	三個概念說明頁頁面主旨區的閱讀時間總和
概念說明頁主旨區 總凝視時間	TFD_概念說明頁_T	三個概念說明頁頁面主旨區的凝視時間總和
概念說明頁主旨區 總凝視次數	TFC_概念說明頁_T	三個概念說明頁頁面主旨區的凝視次數總和
概念說明頁主旨區 平均凝視時間	AFD_概念說明頁_T	三個概念說明頁頁面主旨區的每次凝視所花的時間 (概念說明頁主旨區總凝視時間/概念說明頁主旨區總凝視次數)

表 5 (續)

眼動指標	編碼 (眼動指標_教學頁面類別_興趣區域)	計算方式
概念說明頁主旨區 閱讀時間比例	PTS_概念說明頁_T	三個概念說明頁頁面的主旨區 的閱讀時間佔總閱讀時間比例
概念說明頁主旨區 凝視時間比例	PFD_概念說明頁_T	三個概念說明頁頁面主旨區的 凝視時間佔該主題閱讀時間比 例(概念說明頁主旨區總凝視 時間/概念說明頁總凝視時間)
概念說明頁主旨區 凝視次數比例	PFC_概念說明頁_T	三個概念說明頁頁面的主旨區 的凝視次數佔總凝視次數比例 (概念說明頁主旨區總凝視次 數/概念說明頁總凝視次數)
概念說明頁主旨區 首次閱讀時間	FPT_概念說明頁_T	三個概念說明頁頁面的主旨區 第一次花的閱讀時間總和
概念說明頁主旨區 重複閱讀時間	SPT_概念說明頁_T	三個概念說明頁頁面的主旨區 再次花的閱讀時間總和
概念說明頁主旨區 重複凝視時間	RFD_概念說明頁_T	三個概念說明頁頁面的主旨區 再次凝視的時間總和

註：「概念說明頁」可換成「簡單例題頁」、「困難例題頁」。

主旨區 (T) 可換成說明區 (S)、圖形區 (G)。

TTS：總閱讀時間、TFD：總凝視時間、TFC：總凝視次數、AFD：平均凝視時間、PTS：閱讀  
時間比例、PFD：凝視時間比例、PFC：凝視次數比例、FPT：首次閱讀時間、SPT：重複閱讀  
時間、RFD：重複凝視時間。

#### (四) 統計分析

為探討不同研究對象分組在不同教學頁面的注意力分布情形及注意力轉移模式之情形，本研究將各項 RG 提供的眼動指標進行統計分析，本研究使用兩組獨立樣本無母數檢定 (Mann-Whitney  $U$  [U-test]) 比較具有不同學習成效的兩個群組，學生之注意力分布情形有無顯著差異；並使用 WEDA 平台 (Tsai et al., 2018) 進行遲滯序列分析 (LSA; Bakeman & Gottman, 1997)，瞭解不同學習成效群組其注意力轉移模式情況。

## 肆、研究結果

### 一、學習成效與注意力分布情形

本節為討論不同學習成效學生之注意力分布情形，依據學習成效測驗成績之平均 ( $M = 59.19$ )，分為高學習成效組 ( $N = 9$ ,  $M = 74.48$ ,  $SD = 10.40$ ) 與低學習成效組 ( $N = 8$ ,  $M =$

40.38,  $SD = 6.65$ ), 並對兩組之學習成效分數進行組間 Mann-Whitney  $U$  ( $U$ -test) 檢定, 檢定結果  $p < .001$ , 顯示確實達到顯著高、低的不同學習成效分組。接著對各項眼動指標進行 Mann-Whitney  $U$  ( $U$ -test) 檢定方法, 僅列出有顯著差異之眼動指標, 並進行各組間效果量 (Cohen's  $d$ ) 之計算。

### (一) 高、低學習成效學生閱讀概念說明頁之注意力分布情形的 $U$ -test 檢定結果

對高學習成效組與低學習成效組在概念說明頁中的眼動指標進行  $U$ -test 檢定, 檢定結果 (如表 6) 顯示高學習成效組在概念說明頁中圖形區的「總閱讀時間、總凝視時間、平均凝視時間、閱讀時間比例、凝視次數比例、重複閱讀時間和重複凝視時間」, 都顯著高於低學習成效組 ( $z = -2.02$  至  $-2.89$ ), 結果中 Cohen's  $d$  數值介於 1.08 至 1.61 之間, 顯示具有高度效果量 (Cohen's  $d \geq 0.8$ ), 因此該統計結果表示兩組之間有顯著的差異, 值得進一步探討其差異的原因及意義, 以下逐項說明個別眼動指標差異可能代表的意義。

概念說明頁與另兩頁例題頁不同, 概念說明頁是在使閱讀者理解透過部分角度或邊長相等的條件, 即可說明兩個三角形全等。高學習成效組在概念說明頁圖形區的總閱讀時間、總凝視時間、平均凝視時間以及閱讀時間比例都顯著高於低學習成效組, 表示高學習成效組花了更多的心力與時間在理解圖形的意涵; 而凝視次數比例則表示高學習成效組對於圖形區更有興趣, 給予圖形區的關注更多; 而重複閱讀時間與重複凝視時間的差異, 則代表了高學習成效組再次利用圖形進行統整的能力與行為。

**表 6**  
高、低學習成效學生閱讀「概念說明頁」眼動指標  $U$ -test (僅列出顯著)

眼動指標	學習成效	平均數	標準差	$z$ 值	Cohen's $d$
圖形區總閱讀時間	低	24.95	12.46	-2.12*	1.14
	高	46.41	23.48		
圖形區總凝視時間	低	5.14	4.45	-2.02*	1.23
	高	13.15	8.11		
圖形區平均凝視時間	低	0.29	0.03	-2.79**	1.44
	高	0.33	0.03		
圖形區閱讀時間比例	低	11.22	3.95	-2.89**	1.61
	高	18.76	5.30		
圖形區凝視次數比例	低	12.02	6.77	-2.55**	1.27
	高	21.53	8.10		
圖形區重複閱讀時間	低	22.67	12.76	-2.02*	1.08
	高	43.36	23.78		
圖形區重複凝視時間	低	3.45	4.43	-2.21*	1.32
	高	11.18	7.04		

註: \* $p < .05$ . \*\* $p < .01$ .

## (二) 高、低學習成效學生閱讀簡單例題頁之注意力分布情形的 *U*-test 檢定結果

對高學習成效組與低學習成效組在簡單例題頁中的眼動指標進行 *U*-test 檢定，檢定結果(如表 7)顯示低學習成效組在簡單例題頁中說明區的平均凝視時間，顯著高於高學習成效組 ( $z = 2.21$ )，結果中 Cohen's *d* 數值為 1.25，具有高度效果量 (Cohen's  $d \geq 0.8$ )。

在簡單例題頁的眼動資料發現，僅有說明區的平均凝視時間有顯著差異，且是低學習成效組的平均凝視時間高於高學習成效組，顯示低學習成效組在簡單例題頁的說明區付出了更多努力，這可能也代表對於低學習成效的學生，在接受利用全等性質說明全等這件事情上產生了基模 (Piaget, 1952) 同化或調適的困難，進而導致學習成效較低。

表 7

高、低學習成效學生閱讀「簡單例題頁」眼動指標 *U*-test (僅列出顯著)

眼動指標	學習成效	平均數	標準差	<i>z</i> 值	Cohen's <i>d</i>
說明區平均凝視時間	低	0.32	0.03	2.21*	1.25
	高	0.28	0.02		

註：\* $p < .05$ .

## (三) 高、低學習成效學生閱讀困難例題頁之注意力分布情形的 *U*-test 檢定結果

結果顯示在困難例題頁，高、低學習成效學生在整體眼動指標與各興趣區個別眼動指標皆無顯著差異。

## 二、學習成效與注意力轉移模式

本節依據前一小節之學習成效分組，為討論不同學習成效學生之注意力轉移模式是否有差異表格(如表 8-13)內容為經由遲滯序列分析後，所獲得之調整後的殘差 ( $z$  分數) 結果。表格內容記錄了凝視點從縱向興趣區轉移至橫向的興趣區的  $z$  分數。若調整後的殘差 ( $z$  分數) 數值大於 1.96，即說明有顯著的視覺注意力轉移行為，本研究將有顯著的視覺注意力轉移行為以箭頭方式繪製於圖中(如圖 8-13)，箭頭方向為興趣區轉移方向，箭頭旁所標註的數值為轉移至另一興趣區的轉移機率。LSA 結果如下。

### (一) 高、低學習成效學生閱讀概念說明頁之注意力轉移模式

表 8 與表 9 分別呈現高學習成效組與低學習成效組在概念說明頁中的調整後的殘差 ( $z$  分數) 結果，從  $z$  分數數值中可以發現，高學習成效組並無任何顯著的視覺注意力轉移行為 ( $z \leq 1.96$ )，低學習成效組則在  $S \rightarrow G$  ( $z = 3.28$ )、 $T \rightarrow \text{Out}$  ( $z = 3.80$ )、 $\text{Out} \rightarrow T$  ( $z = 5.32$ ) 有顯著的視覺注意力轉移 ( $z > 1.96$ )。

由於高學習成效組並無顯著視覺注意力轉移行為，因此圖 8 並未繪製箭頭。從圖 9 中可看出低學習成效組顯著轉移行為，在  $S \rightarrow G$  的轉移機率為 0.80，而從  $T \rightarrow \text{Out}$  和  $\text{Out} \rightarrow T$  的轉移機率分別為 0.17 和 0.31。

概念說明頁是在使閱讀者能夠理解全等性質的理由，低學習成效組從說明區到圖形區的視覺注意力轉移頻率顯著高於隨機情況下的預期，可能表示對於低學習成效的學生來說，要將文字說明與圖形表徵進行連結需要更多的心力與多次對照；而主旨區與空白區的來回視覺注意力轉移也顯著高於隨機情況下的預期，則表示該組學生對於主旨的思考，與思考後再度確認主旨的狀況。

如圖 8 與圖 9，LSA 分析  $z$  值，如表 8 與表 9，可以看出高學習成效組學生在各興趣區域 (AOI) 間沒有顯著注意力轉移行為，而低學習成效組學生則有兩種注意力轉移，分別為在主旨區 (T) 與「空白區 (Out)」之間，以及從說明區 (S) 到圖形區 (G) 的轉移模式。

表 8  
概念說明頁高學習成效組  $z$  分數表

起點 \ 終點	G	S	T	Out
G	—	0.43	1.90	-1.53
S	0.01	—	-2.24	1.31
T	0.32	-0.49	—	0.31
Out	-0.32	0.04	0.87	—

表 9  
概念說明頁低學習成效組  $z$  分數表

起點 \ 終點	G	S	T	Out
G	—	1.22	-0.27	-1.22
S	<b>3.28</b>	—	-2.43	-1.53
T	-1.69	-0.61	—	<b>3.80</b>
Out	-2.00	-0.67	<b>5.32</b>	—

圖 8  
概念說明頁高學習成效組注意力轉移模式  
(人數 = 9, 轉移次數 = 295)

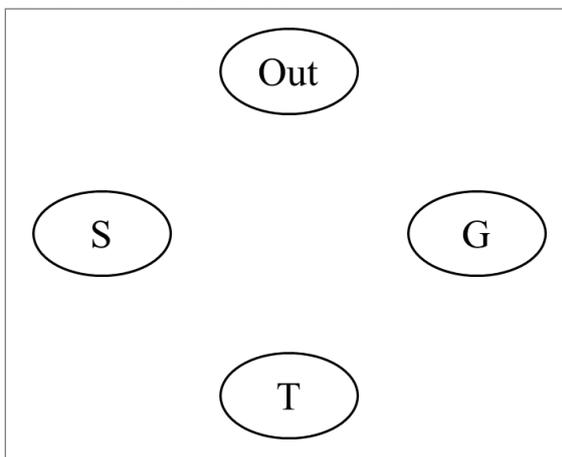
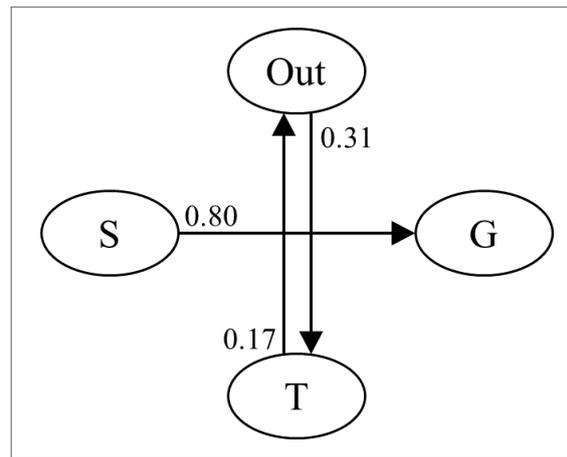


圖 9  
概念說明頁低學習成效組注意力轉移模式  
(人數 = 8, 轉移次數 = 160)



註：箭頭旁邊數字為轉移機率

(二) 高、低學習成效學生閱讀簡單例題頁之注意力轉移模式

表 10 與表 11 分別呈現高學習成效組與低學習成效組在簡單例題頁中的調整後的殘差 ( $z$  分數) 結果，從  $z$  分數數值中可以發現，高、低學習成效組並無任何顯著的視覺注意力轉移行為 ( $z \leq 1.96$ )。

因此高、低學習成效組之 LSA 圖中（圖 10、圖 11）並未繪製任何箭頭。表示不論學習成效高或低，兩組學生在閱讀簡單例題的時候，都沒有顯著高於隨機預期情況的視覺注意力轉移模式，可能與本頁為簡單例題頁有關，所有的條件與圖形都是相當直接的表徵，兩個全等的三角形也僅是旋轉的差異，使學生能簡單的讀懂該頁，而沒有須來回對照或是思考的閱讀狀況。

如圖 10 與圖 11，LSA 分析  $z$  值，如表 10 與表 11，可以看出不論高、低學習成效的學生在這個分類的投影片均沒有顯著的注意力轉移模式。

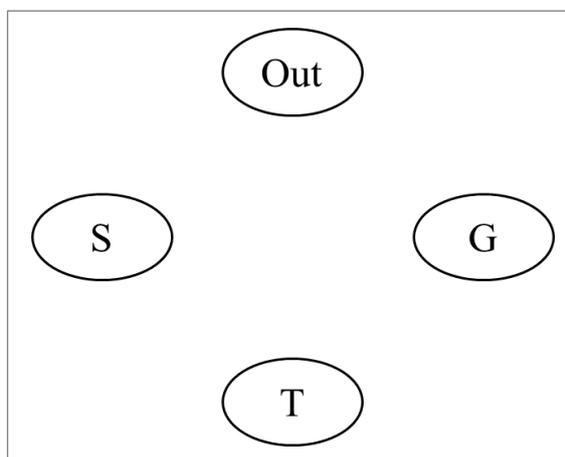
**表 10**  
簡單例題頁高學習成效組  $z$  分數表

起點 \ 終點	G	S	T	Out
G	—	1.38	-0.50	-1.34
S	0.31	—	-0.40	0.13
T	0.67	-1.49	—	1.30
Out	-1.34	0.23	1.33	—

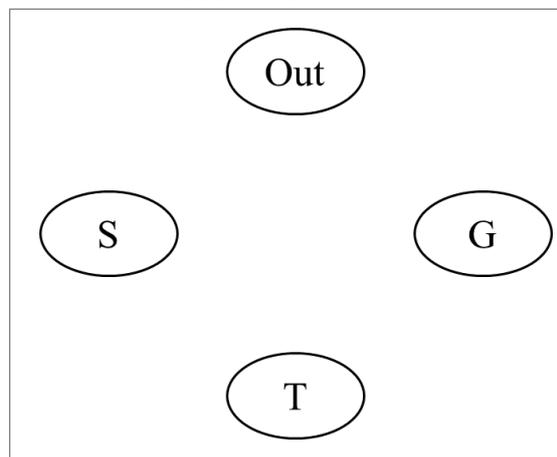
**表 11**  
簡單例題頁低學習成效組  $z$  分數表

起點 \ 終點	G	S	T	Out
G	—	-0.56	0.88	-0.53
S	1.46	—	-1.74	0.51
T	-0.76	0.70	—	0.11
Out	-1.06	-0.28	1.70	—

**圖 10**  
簡單例題頁高學習成效組注意力轉移模式  
(人數 = 9, 轉移次數 = 107)



**圖 11**  
簡單例題頁低學習成效組注意力轉移模式  
(人數 = 8, 轉移次數 = 95)



### (三) 高、低學習成效學生閱讀困難例題頁之注意力轉移模式

表 12 與表 13 分別呈現高學習成效組與低學習成效組在困難例題頁中的調整後的殘差 ( $z$  分數) 結果，從  $z$  分數數值中可以發現，高學習成效組仍無任何顯著的視覺注意力轉移行為 ( $z \leq 1.96$ )，低學習成效組則在  $T \rightarrow \text{Out}$  ( $z = 2.03$ )、 $\text{Out} \rightarrow T$  ( $z = 2.69$ ) 有顯著的視覺注意力轉移 ( $z > 1.96$ )。

由於高學習成效組並無顯著視覺注意力轉移行為，因此圖 12 並未繪製箭頭。從圖 13 中可看出低學習成效組顯著轉移行為，在 T → Out 和 Out → T 的轉移機率分別為 0.08 和 0.43。在困難例題頁的視覺注意力轉移模式，可以看出低學習成效組在主旨區與空白區的視覺注意力轉移模式顯著高於隨機情況下的預期，表示該組學生對於主旨的思考，與思考後再度確認主旨的狀況。

如圖 12 與圖 13，LSA 分析 z 值，如表 12 與表 13，可以看出高學習成效學生在各興趣區域（AOI）間沒有特定的注意力轉移模式，而低學習成效學生在主旨區（T）與「空白區（Out）」之間有來回的注意力轉移模式。

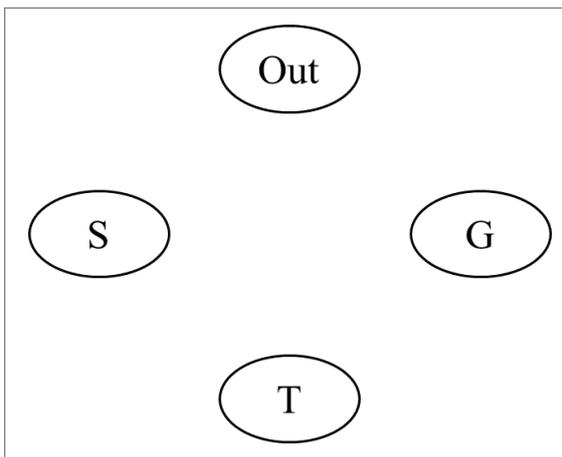
**表 12**  
困難例題頁高學習成效組 z 分數表

起點 \ 終點	G	S	T	Out
G	—	0.62	1.22	-1.85
S	0.79	—	-1.85	0.88
T	1.26	-2.19	—	1.24
Out	-2.40	1.92	0.83	—

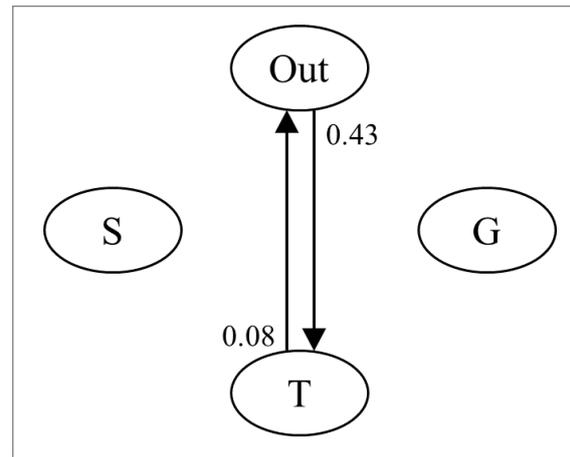
**表 13**  
困難例題頁低學習成效組 z 分數表

起點 \ 終點	G	S	T	Out
G	—	0.99	0.84	-2.82
S	1.27	—	-2.15	1.33
T	0.39	-1.39	—	<b>2.03</b>
Out	-2.44	0.70	<b>2.69</b>	—

**圖 12**  
困難例題頁高學習成效組注意力轉移模式  
(人數 = 9, 轉移次數 = 162)



**圖 13**  
困難例題頁低學習成效組注意力轉移模式  
(人數 = 8, 轉移次數 = 136)



註：箭頭旁邊數字為轉移機率

## 伍、結論與建議

本研究旨在探討國中二年級尚未學習過幾何證明的學生，在觀看有關三角形全等性質的教學說明以及例題時，不同學習成效學生的閱讀模式是否有差異，根據蒐集到的眼動資料進行分析有以下結論：

### 一、國二學生在閱讀三角形全等性質教材的概念說明圖文時，高學習成效學生比低學習成效學生更專注於圖形的閱讀

本研究的三角形全等性質概念說明頁以圖文並列的方式呈現，並且文字所佔的區域要比圖形區大，高學習成效學生在概念說明頁圖形區的總閱讀時間、總凝視時間、平均凝視時間、閱讀時間比例以及凝視次數比例皆顯著多於低學習成效的學生，顯示高學習成效學生比低學習成效學生花了更多的心力在圖形區，從而理解並學習三角形的全等性質，顯示在幾何證明的學習歷程中，藉由圖形來了解概念並學習是相當重要的。除了上述提到有關凝視與閱讀時間的眼動指標外，高學習成效的學生在概念說明頁的圖形區的重複閱讀時間、重複凝視時間也都顯著多於低學習成效的學生，考量到學習成效的差異，以及圖形在閱讀幾何文本時的重要性（Lee & Wu, 2018），這兩項眼動指標的差異表明了高學習成效的學生有著較好的圖形整合能力。Lee 與 Wu (2018) 的研究說明了幾何文本在圖形閱讀的重要性，林宓雯與吳昭容 (2016) 的研究也表明證明題中讀圖的比例較高，兩者的研究對象都是已經有過幾何學習經驗的大學生，對於幾何文本的閱讀特性都與本研究的高學習成效學生較為類似，即閱讀圖形是學習幾何證明的重要過程，並且需藉由圖形來鞏固幾何證明的學習。

### 二、國二學生在閱讀三角形全等性質教材的簡單例題說明文字時，低學習成效的學生具有較高的認知負荷

低學習成效學生在簡單例題頁說明區的平均凝視時間顯著高於高學習成效學生，考由於該組學習成效較低，以及平均凝視時間代表處理該興趣區域 (AOI) 訊息的困難度或需投入的努力程度，因此，這可能代表對於低學習成效學生對於說明區內容仍然有所困惑，仍具有較高的認知負荷。而簡單例題頁的說明區是在利用概念說明頁所說明之滿足條件後即可說明兩三角形全等的範例，這表示低學習成效的學生可能在閱讀概念說明頁時，對於三角形全等概念的學習僅停留在較為淺層的理解，還未有較為深入的邏輯分析概念與應用概念與應用（例如幾何證明閱讀模型 [RCGP]；Yang & Lin, 2008）。

### 三、國二學生在閱讀三角形全等性質教材的概念說明和困難例題時，高低學習成效的學生具有不同的視覺注意力轉移特徵

在遲滯序列分析 (LSA) 的結果可以發現，低學習成效學生在概念說明頁的主旨區 (T) 與「空白區 (Out)」之間有顯著的注意力轉移行為，可能代表學習成效低的學生不是很理

解主旨，或是對主旨的敘述感到困難而離開主旨區進行思考或休息來減低閱讀所造成的認知負荷，雖然本實驗在正式的閱讀素材前有前置一頁符號與名詞說明以說明將提到的數學名詞，如：對應角、對應邊……，但閱讀素材中所呈現較為數學化敘述的主旨如「若兩三角形中，三組對應邊分別等長，則兩三角形全等」，可能還是會造成低學習成效的學生閱讀與理解上的困難。

仔細研讀視覺注意力轉移序列原始凝視點資料，發現不論是那一組學生在說明區（S）至圖形區（G）的轉移，或是圖形區（G）至說明區（S）的轉移其實是相當多的，顯見不論學習成效高低的學生，都有著圖文之間對照的幾何證明文本閱讀行為。然而，經過 LSA 計算實際值與期望值比較的殘差後，高學習成效組並沒有顯著在圖文之間的注意力來回轉移特徵，反而是低學習成效組的視覺注意力有顯著從說明區（S）轉移至圖形區（G）的顯著行為特徵，這代表低學習成效的學生在閱讀概念說明文字之後，可能產生較高的閱讀理解困難，因此多次轉向圖形區的訊息以尋求協助其概念理解，換句話說，對於圖形區的訊息具有顯著較高的資訊需求，明顯需要多次的圖形資訊處理以輔助其對文字概念的理解。而高學習成效的學生則沒有出現這樣的資訊搜尋行為特徵，僅專注於圖形本身內部的訊息處理。

而在困難例題頁中，低學習成效學生在概念說明頁和困難例題頁主旨區（T）與「空白區（Out）」之間有顯著的注意力轉移行為，由於困難例題頁的主旨敘述有著較多的數學名詞如「同心圓」，低學習成效的學生可能在讀到該名詞時即思考其所代表的意義，甚至是對該名詞有所困惑。

#### 四、對於教學現場的建議

在眼動指標的部分發現，高學習成效的學生比起低學習成效的學生花了更多的心力在閱讀圖形，顯見對於圖形的理解更有助於學生學習幾何證明，雖然在幾何證明的過程中不可避免還是需要以數學符號或是文字的敘述來闡明證明邏輯，但對於初學幾何證明的國中學生來說，對於圖形有更深入的探討與了解是更加重要的，因此教師在教學現場可以增加更多的操作、觀察幾何圖形的活動，來讓學生對於幾何圖形有更深的認識。

從遲滯序列分析結果能看出低學習成效的學生以圖去輔助理解說明內容行為，已有許多關於圖文整合相關研究（Hochpöchler et al., 2013; Peterson, 2016），研究也發現圖片可改善閱讀學習過程（Carney & Levin, 2002），然而對許多學習者而言文字與圖片整合是困難的（Schlag & Ploetzner, 2011）。本研究是立意取樣，直接選取了原本數學成績前後各 25% 的學生進行研究，低學習成效的結果，可能來自對於數學文字表述的不理解，因為數學敘述與一般的文字敘述有相當的差異（Hanna et al., 2009），教師可再適當的對於較為艱澀難懂的數學敘述句加以解釋。

因此本研究推論低學習成效的國中二年級學生雖然有以圖輔助之閱讀行為模式，但造成學習成效不理想的原因可能如 Wu 與 Liu（2024）研究閱讀資訊所指出結果相似，低學習成效的閱讀序列是較為混亂的，難以整合圖形與文本的信息，從而誤解了要點或是無法理

解其中的意義。對於初學幾何證明的學生，重點應該在閱讀文本並了解後對照圖形，整合文本與圖形之間的連結，才有辦法思考證明的脈絡。由此可以了解造成學習成效不佳的原因，是文本與圖片之間資訊整合上的困難，教學者應思考如何引導學生進行圖文整合，並且結合所學習到的資訊，使學習者有更好的學習表現。在教學與學習策略上，可以使用不同顏色標示相對應的文字與圖上的元素，來強化圖與文字的對照，例如文字敘述圖形中兩條直線平行，就將圖形中兩條平行的直線以色筆畫起來；而對於數學知識較無法與相關圖形進行連結的學生，則可以指導學生抽取數學知識中的關鍵元素，並觀察圖形中是否有相對應出現的元素，例如三角形全等必定有一個對應邊相等，再繼續觀察是否有其他可以應用的條件符合全等性質。

## 五、未來研究方向

本研究利用眼動追蹤技術，初步探討不同學習成效學生在閱讀幾何證明時的視覺注意力分布模式與視覺注意力轉移情形，並分析其視覺行為。研究中將興趣區域劃分為主旨區、說明區與圖形區，以觀察學生在這三個區域之間的視覺注意力轉移模式。結果顯示，不同學習成效的學生確實展現出不同的視覺行為模式，其中，高學習成效學生傾向於投入較多注意力於圖形資訊，而低學習成效學生則主要聚焦於說明文字。此外低學習成效學生在閱讀概念說明頁與困難例題頁時，於圖文之間產生較多的注意力轉移，顯示其需花費較多心力來整合圖文資訊。幾何證明問題的解題過程涉及證明目標、題目敘述條件及圖形之間的整合，而數學敘述方式可能對部分學生帶來理解上的挑戰。因此，未來研究可進一步細分興趣區域，例如聚焦於特定幾何符號與圖形元素的視覺注意力轉移關係與順序，以更細緻地解析學生的閱讀歷程。特別是高學習成效學生如何在不同興趣區域間建立連結並促進理解，以及低學習成效學生在閱讀過程中遭遇的困難點。

此外國中階段是身心快速發展的時期，在我國教育體制中，國中也是奠定未來學習型態的重要階段。相較於高中及大學，國中生的學習成效受到更多因素影響，例如性別、體態（如肥胖狀況）以及家庭背景（如家庭收入、家庭規模、父母婚姻狀況）。因此，未來研究可將這些背景變項作為中介因素，以進一步探討影響學習成效的潛在機制。

最後，本研究結果應可為未來個別化學習平台的開發提供參考，特別是在眼動驅動回饋系統的設計上，如何針對不同學習特徵提供適應性學習支援，以提升學生個別化的幾何證明學習成效。

## 誌謝

本研究感謝國科會研究計畫在研究經費上的補助，計畫編號：MOST 109-2511-H-003-018-MY3 和 NSTC 112-2410-H-003-037-MY3。

## 參考文獻

- 左台益、呂鳳琳、曾世綺、吳慧敏、陳明璋、譚寧君（2011）。以分段方式降低任務複雜度對專家與生手閱讀幾何證明的影響。**教育心理學報**，43（閱讀專刊），291–314。[Tso, T.-Y., Lu, F.-L., Tzeng, S.-C., Wu, H.-M., Chen, M.-J., & Tan, N.-C. (2011). Impact of reducing task complexity by segmentation on experts' and comprehension of novices' reading geometric proof problems. *Bulletin of Educational Psychology*, 43(Special Issue on Reading), 291–314. (in Chinese)] <https://doi.org/10.6251/BEP.20110517>
- 吳昭容（2019）。眼球追蹤技術在幾何教育的應用與限制。**臺灣數學教育期刊**，6（2），1–25。[Wu, C.-J. (2019). Applications and limitations of eye tracking in geometry education. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, 6(2), 1–25. (in Chinese)] [https://doi.org/10.6278/tjme.201910\\_6\(2\).001](https://doi.org/10.6278/tjme.201910_6(2).001)
- 林宥雯、吳昭容（2016）。從眼動型態探討閱讀幾何文本的視覺化與推理歷程。**教育學刊**，47，41–77。[Lin, T.-W., & Wu, C.-J. (2016). Examining eye movement to explore visualization and reasoning during the reading of geometric texts. *Educational Review*, 47, 41–77. (in Chinese)] <https://doi.org/10.3966/156335272016120047002>
- 許瑋芷、陳明溥（2010）。數學表徵及數學自我效能對國小學生樣式推理學習成效之影響。**數位學習科技期刊**，2（3），42–60。[Hsu, W.-C., & Chen, M.-P. (2010). The effects of type of mathematical representation and mathematics self-efficacy on fifth-graders' pattern reasoning. *International Journal on Digital Learning Technology*, 2(3), 42–60. (in Chinese)]
- 陳琪瑤、吳昭容（2012）。幾何證明文本閱讀的眼動研究：圖文比重及圖示著色效果。**教育實踐與研究**，25（2），35–66。[Chen, C.-Y., & Wu, C.-J. (2012). Eye movements during geometry proof reading: Text contrasting with figure and the colored effects. *Journal of Educational Practice and Research*, 25(2), 35–66. (in Chinese)] <https://doi.org/10.6776/JEPR.201212.0035>
- 楊芳瑩、蔡孟蓉、劉子鍵（2018）。數位學習的眼球追蹤研究。載於宋曜廷（主編），**進階數位學習研究方法**（頁 33–61）。高等教育。[Yang, F.-Y., Tsai, M.-J., & Liu, T.-C. (2018). Eye tracking research on digital learning. In Sung, Y.-T. (Ed.), *Advanced Research Methodology for e-Learning* (1st ed., pp. 33–61). Higher Education Press. (in Chinese)] <https://doi.org/10.3966/9789862661758>
- 葉明達、柳賢（2007）。建立判讀理解層級：高中生進行數學論證判讀活動困難之探討。**教育與心理研究**，30（3），79–109。[Ye, M.-D., & Leou, S. (2007). To establish validating comprehension level: Discuss the difficulties that senior high students faced in argumentation validation activity. *Journal of Education & Psychology*, 30(3), 79–109. (in Chinese)]
- 賴孟龍、陳彥樺（2012）。以眼動方法探究幼兒閱讀繪本時的注意力偏好。**幼兒教保研究**，8，81–96。[Lai, M.-L., & Chen, Y.-H. (2012). Examining preschoolers' attention during storybook reading: Evidence from eye movements. *Journal of Early Childhood Education & Care*, 8, 81–96. (in Chinese)] <https://doi.org/10.6471/JECEC.201202.0080>
- 謝佳韻、唐書志（2017）。探究九年級生推論形式之邏輯結構的建構與轉化。**臺灣數學教育期刊**，4（2），1–32。[Hsieh, C.-J., & Tang, S.-J. (2017). Construction and transformation of logical structures in ninth-graders' inferring types. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, 4(2), 1–32. (in Chinese)] <https://doi.org/10.6278/tjme.20170914.001>

- 簡郁芬、吳昭容 (2012)。以眼動型態和閱讀測驗表現探討箭頭在科學圖文閱讀中的圖示效果。《中華心理學刊》，54 (3)，385–402。[Jian, Y.-C., & Wu, C.-J. (2012). The effect of arrows in an illustration when reading scientific text: Evidence from eye movements and reading tests. *Chinese Journal of Psychology*, 54(3), 385–402. (in Chinese)] <https://doi.org/10.6129/CJP.2012.5403.07>
- Akbaşlı, S., Şahin, M., & Yaykiran, Z. (2016). The effect of reading comprehension on the performance in science and mathematics. *Journal of Education and Practice*, 7(16), 108–121.
- Alcock, L., & Weber, K. (2010). Undergraduates' example use in proof construction: Purposes and effectiveness. *Investigations in Mathematics Learning*, 3(1), 1–22. <https://doi.org/10.1080/24727466.2010.11790298>
- Alqassab, M., Strijbos, J. W., & Ufer, S. (2018). The impact of peer solution quality on peer-feedback provision on geometry proofs: Evidence from eye-movement analysis. *Learning and Instruction*, 58, 182–192. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2018.07.003>
- Anwar, L., Mali, A., & Goedhart, M. J. (2021). The effect of proof format on reading comprehension of geometry proof: The case of Indonesian prospective mathematics teachers. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 17(4), em1952. <https://doi.org/10.29333/ejmste/10782>
- Bakeman, R., & Gottman, J. M. (1997). *Observing interaction: An introduction to sequential analysis*. Cambridge University Press.
- Bloom, B. S., Engelhart, M. D., Furst, E. J., Hill, W. H., & Krathwohl, D. R. (1956). *Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals. Handbook I: Cognitive domain*. David McKay.
- Boonen, A. J. H., de Koning, B. B., Jolles, J., & Van der Schoot, M. (2016). Word problem solving in contemporary math education: A plea for reading comprehension skills training. *Frontiers in psychology*, 7, 191. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.00191>
- Campbell, T. G., Boyle, J. D., & King, S. (2020). Proof and argumentation in K-12 mathematics: A review of conceptions, content, and support. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51(5), 754–774. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1626503>
- Carney, R. N., & Levin, J. R. (2002). Pictorial illustrations still improve students' learning from text. *Educational Psychology Review*, 14, 5–26. <https://doi.org/10.1023/A:1013176309260>
- Catrysse, L., Gijbels, D., & Donche, V. (2018). It is not only about the depth of processing: What if eye am not interested in the text?. *Learning and Instruction*, 58, 284–294. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2018.07.009>
- Cheng, Y. H., & Lin, F. L. (2007). The effectiveness and limitation of reading and coloring strategy in learning geometry proof. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 113–120). PME. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED499417.pdf#page=119>
- Chiou, G. L., Hsu, C. Y., & Tsai, M. J. (2022). Exploring how students interact with guidance in a physics simulation: Evidence from eye-movement and log data analyses. *Interactive Learning Environments*, 30(3), 484–497. <https://doi.org/10.1080/10494820.2019.1664596>
- Hanna, G., & De Villiers, M. (Eds.). (2012). *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI study*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6>

- Hanna, G., De Villiers, M., Arzarello, F., Dreyfus, T., Durand-Guerrier, V., Jahnke, H. N., & Yevdokimov, O. (2009). Proof and proving in mathematics education: Discussion document. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education* (pp. xix–xxx). National Taiwan Normal University.
- Healy, L., & Hoyles, C. (1998). *Justifying and proving in school mathematics: Executive summary*. Institute of Education, University of London.
- Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396–428. <https://doi.org/10.2307/749651>
- Herbst, P., Chen, C., Weiss, M., González, G., Nachlieli, T., Hamlin, M., & Brach, C. (2010). “Doing proofs” in geometry classrooms. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton, & E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades* (pp. 250–268). Routledge.
- Ho, H. N. J., Tsai, M. J., Wang, C. Y., & Tsai, C. C. (2014). Prior knowledge and online inquiry-based science reading: Evidence from eye tracking. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 12, 525–554. <https://doi.org/10.1007/s10763-013-9489-6>
- Hochpöchler, U., Schnotz, W., Rasch, T., Ullrich, M., Horz, H., McElvany, N., & Baumert, J. (2013). Dynamics of mental model construction from text and graphics. *European Journal of Psychology of Education*, 28, 1105–1126. <https://doi.org/10.1007/s10212-012-0156-z>
- Hsu, C. Y., Chiou, G. L., & Tsai, M. J. (2016, August). *A pilot study on developing and validating a fixation-based scaffolding learning system* [Poster presentation]. 2016 International Conference of East-Asian Association for Science Education, Tokyo, Japan.
- Hsu, C. Y., Chiou, G. L., & Tsai, M. J. (2019). Visual behavior and self-efficacy of game playing: An eye movement analysis. *Interactive Learning Environments*, 27(7), 942–952. <https://doi.org/10.1080/10494820.2018.1504309>
- Jian, Y. C. (2017). Eye-movement patterns and reader characteristics of students with good and poor performance when reading scientific text with diagrams. *Reading and Writing*, 30(7), 1447–1472. <https://doi.org/10.1007/s11145-017-9732-6>
- Jones, K., Fujita, T., & Miyazaki, M. (2013). Learning congruency-based proofs in geometry via a web-based learning system. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 33(1), 31–36.
- Just, M. A., & Carpenter, P. A. (1976). Eye fixations and cognitive processes. *Cognitive psychology*, 8(4), 441–480. [https://doi.org/10.1016/0010-0285\(76\)90015-3](https://doi.org/10.1016/0010-0285(76)90015-3)
- Just, M. A., & Carpenter, P. A. (1980). A theory of reading: From eye fixations to comprehension. *Psychological Review*, 87(4), 329–354. <https://doi.org/10.1037/0033-295X.87.4.329>
- Knuth, E., Zaslavsky, O., & Ellis, A. (2019). The role and use of examples in learning to prove. *The Journal of Mathematical Behavior*, 53, 256–262. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.06.002>
- Lai, M. L., Tsai, M. J., Yang, F. Y., Hsu, C. Y., Liu, T. C., Lee, S. W.-Y., Lee, M. H., Chiou, G. L., Liang, J. C., & Tsai, C. C. (2013). A review of using eye-tracking technology in exploring learning from 2000 to 2012. *Educational Research Review*, 10, 90–115. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2013.10.001>
- Lee, W. K., & Wu, C. J. (2018). Eye movements in integrating geometric text and figure: Scanpaths and given-new effects. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16, 699–714. <https://doi.org/10.1007/s10763-016-9790-2>
- Lesseig, K. (2016). Investigating mathematical knowledge for teaching proof in professional development. *International Journal of Research in Education and Science*, 2(2), 253–270.

- Lin, F. L., & Cheng, Y. H. (2003). The competence of geometric argument in Taiwan adolescents. In F. L. Lin & J. Guo (Eds.), *Proceedings of the International Conference on Science & Mathematics Learning* (pp. 16–18). National Taiwan Normal University.
- Lin, F. L., & Yang, K. L. (2007). The reading comprehension of geometric proofs: The contribution of knowledge and reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 5(4), 729–754. <https://doi.org/10.1007/s10763-007-9095-6>
- Liversedge, S. P., & Findlay, J. M. (2000). Saccadic eye movements and cognition. *Trends in cognitive sciences*, 4(1), 6–14. [https://doi.org/10.1016/S1364-6613\(99\)01418-7](https://doi.org/10.1016/S1364-6613(99)01418-7)
- Liversedge, S. P., Paterson, K. B., & Pickering, M. J. (1998). Eye movements and measures of reading time. In G. Underwood (Ed.), *Eye guidance in reading and scene perception* (pp. 55–75). Elsevier.
- Markel, W. D. (1994). The role of proof in mathematics education. *School Science and Mathematics*, 94(6), 291–295. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.1994.tb15677.x>
- Martin, T. S., McCrone, S. M. S., Bower, M. L. W., & Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof. *Educational Studies in Mathematics*, 60(1), 95–124. <https://doi.org/10.1007/s10649-005-6698-0>
- Mirza, A., Fitriawan, D., Zubaidah, R., & Nursangaji, A. (2022). Prospective mathematics teachers' understanding of proof in mathematics for high school. *Al-Jabar: Jurnal Pendidikan Matematika*, 13(1), 1–11. <http://dx.doi.org/10.24042/ajpm.v13i1.10089>
- Muldner, K., & Bursleson, W. (2015). Utilizing sensor data to model students' creativity in a digital environment. *Computers in Human Behavior*, 42, 127–137. <https://doi.org/10.1016/j.chb.2013.10.060>
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Author.
- Nisbett, R. E., & Wilson, T. D. (1977). Telling more than we can know: Verbal reports on mental processes. *Psychological Review*, 84(3), 231–259. <https://doi.org/10.1037/0033-295X.84.3.231>
- Österholm, M. (2006). Characterizing reading comprehension of mathematical texts. *Educational Studies in Mathematics*, 63(3), 325–346. <https://doi.org/10.1007/s10649-005-9016-y>
- Ott, N., Brünken, R., Vogel, M., & Malone, S. (2018). Multiple symbolic representations: The combination of formula and text supports problem solving in the mathematical field of propositional logic. *Learning and Instruction*, 58, 88–105. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2018.04.010>
- Perttula, A. (2017). Eye tracking studies focusing on mathematics: A literature review. In L. Gómez Chova, A. López Martínez, & I. Candel Torres (Eds.), *Proceedings of the 11th International Technology, Education and Development Conference (INTED)* (pp. 2166–2173). IATED Academy. <https://doi.org/10.21125/inted.2017>
- Peterson, M. O. (2016). Schemes for integrating text and image in the science textbook: Effects on comprehension and situational interest. *International Journal of Environmental and Science Education*, 11(6), 1365–1385. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1114297.pdf>
- Piaget, J. (1952). *The origins of intelligence in children*. International Universities Press.
- Rajendran, S., Chamundeswari, S., & Sinha, A. A. (2022). Predicting the academic performance of middle-and high-school students using machine learning algorithms. *Social Sciences & Humanities Open*, 6(1), 100357. <https://doi.org/10.1016/j.ssaho.2022.100357>
- Rayner, K. (1998). Eye movements in reading and information processing: 20 years of research. *Psychological Bulletin*, 124(3), 372–422. <https://doi.org/10.1037/0033-2909.124.3.372>

- Rayner, K. (2009). The 35th Sir Frederick Bartlett Lecture: Eye movements and attention in reading, scene perception, and visual search. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 62(8), 1457–1506. <https://doi.org/10.1080/17470210902816461>
- Rayner, K., Chace, K. H., Slattery, T. J., & Ashby, J. (2006). Eye movements as reflections of comprehension processes in reading. *Scientific Studies of Reading*, 10(3), 241–255. [https://doi.org/10.1207/s1532799xssr1003\\_3](https://doi.org/10.1207/s1532799xssr1003_3)
- Schindler, M., & Lilienthal, A. J. (2019). Domain-specific interpretation of eye tracking data: Towards a refined use of the eye-mind hypothesis for the field of geometry. *Educational Studies in Mathematics*, 101(1), 123–139. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-9878-z>
- Schlag, S., & Ploetzner, R. (2011). Supporting learning from illustrated texts: Conceptualizing and evaluating a learning strategy. *Instructional Science*, 39(6), 921–937. <https://doi.org/10.1007/s11251-010-9160-3>
- Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(1), 4–36. <https://doi.org/10.2307/30034698>
- Shahbari, J. A., & Daher, W. (2020). Learning congruent triangles through ethnomathematics: The case of students with difficulties in mathematics. *Applied Sciences*, 10(14), 4950. <https://doi.org/10.3390/app10144950>
- Soemer, A., & Schiefele, U. (2019). Text difficulty, topic interest, and mind wandering during reading. *Learning and Instruction*, 61, 12–22. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2018.12.006>
- Strobel, B., Lindner, M. A., Saß, S., & Köller, O. (2018). Task-irrelevant data impair processing of graph reading tasks: An eye tracking study. *Learning and Instruction*, 55, 139–147. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2017.10.003>
- Strohmaier, A. R., MacKay, K. J., Obersteiner, A., & Reiss, K. M. (2020). Eye-tracking methodology in mathematics education research: A systematic literature review. *Educational Studies in Mathematics*, 104(2), 147–200. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-09948-1>
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 237–266). National Council of Teachers of Mathematics.
- Trevors, G., Feyzi-Behnagh, R., Azevedo, R., & Bouchet, F. (2016). Self-regulated learning processes vary as a function of epistemic beliefs and contexts: Mixed method evidence from eye tracking and concurrent and retrospective reports. *Learning and Instruction*, 42, 31–46. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2015.11.003>
- Tsai, M. J., & Wu, A. H. (2021). Visual search patterns, information selection strategies, and information anxiety for online information problem solving. *Computers & Education*, 172, 104236. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2021.104236>
- Tsai, M. J., Hsu, P. F., & Pai, H. T. (2018, July). *Lag sequential analysis in Eye-Tracking Data Analyzer (EDA) for educational researchers* [Poster presentation]. 4th International Symposium on Educational Technology (ISET 2018), Osaka, Japan. [https://hksmic.org.hk/iset/2018/conference\\_programme.pdf](https://hksmic.org.hk/iset/2018/conference_programme.pdf)
- Tsai, M. J., Wang, C. Y., Wu, A. H., & Bråten, I. (2025). Differences in epistemic justification profiles during conflicting socio-scientific information processing: A study of visual and memory-based behavior via eye-tracking. *Acta Psychologica*, 252, 104680. <https://doi.org/10.1016/j.actpsy.2024.104680>

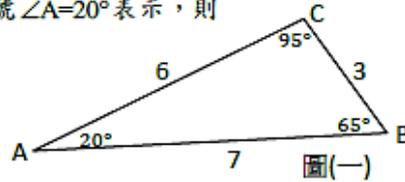
- Tsai, M. J., Wu, A. H., Bråten, I., & Wang, C. Y. (2022). What do critical reading strategies look like? Eye-tracking and lag sequential analysis reveal attention to data and reasoning when reading conflicting information. *Computers & Education*, 187, 104544. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2022.104544>
- Tsujiyama, Y., & Yui, K. (2018). Using examples of unsuccessful arguments to facilitate students' reflection on their processes of proving. In A. J. Stylianides & G. Harel (Eds.), *Advances in mathematics education research on proof and proving* (pp. 269–281). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-70996-3\\_19](https://doi.org/10.1007/978-3-319-70996-3_19)
- Van Marlen, T., Van Wermeskerken, M., Jarodzka, H., & Van Gog, T. (2018). Effectiveness of eye movement modeling examples in problem solving: The role of verbal ambiguity and prior knowledge. *Learning and Instruction*, 58, 274–283. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2018.07.005>
- Vawter, D. (2010). Mining the middle school mind. *Education Digest: Essential Readings Condensed for Quick Review*, 75(5), 47–49.
- Watkins, A. E. (1979). The symbols and grammatical structures of mathematical English and the reading comprehension of college students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 10(3), 216–218. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.10.3.0216>
- Weber, K., & Mejia-Ramos, J. P. (2014). Mathematics majors' beliefs about proof reading. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(1), 89–103. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.790514>
- Wu, C. J., & Liu, C. Y. (2024). An eye-tracking study of college students' infographic-reading processes. *Journalism & Mass Communication Quarterly*, 10776990241255974. <https://doi.org/10.1177/10776990241255974>
- Yang, F. Y., Chang, C. Y., Chien, W. R., Chien, Y. T., & Tseng, Y. H. (2013). Tracking learners' visual attention during a multimedia presentation in a real classroom. *Computers & Education*, 62, 208–220. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2012.10.009>
- Yang, K. L., & Lin, F. L. (2008). A model of reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics*, 67(1), 59–76. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9080-6>
- Zazkis, D., Weber, K., & Mejia-Ramos, J. P. (2016). Bridging the gap between graphical arguments and verbal-symbolic proofs in a real analysis context. *Educational Studies in Mathematics*, 93(2), 155–173. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9698-3>

附錄 1：基本幾何符號知識測驗

1. 如右圖(一)， $\triangle ABC$ 中角 A 為 20 度，可以用符號  $\angle A=20^\circ$  表示，則

角 B 為 65 度可以表示成\_\_\_\_\_，

角 C 為 95 度可以表示成\_\_\_\_\_。



2. 承圖(一)， $\triangle ABC$ 中點 A 至點 B 距離為 7，可以用符號  $\overline{AB}=7$ ，則

點 A 至點 C 距離為 6 可以表示成\_\_\_\_\_，

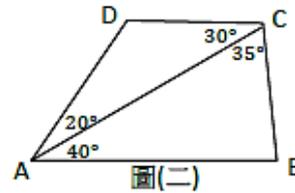
點 B 至點 C 距離為 3 可以表示成\_\_\_\_\_。

3. 如右圖(二)，幾何圖形 ABCD 中，若僅寫出  $\angle A=60^\circ$ ，會有疑慮到底哪個角是 60 度，所以會以  $\angle DAC=20^\circ$ 、 $\angle DAB=60^\circ$  來表示，則

$\angle DAB=_____$ 、 $\angle DCB=_____$ ，

30 度的角可以表示成\_\_\_\_\_，

35 度的角可以表示成\_\_\_\_\_。

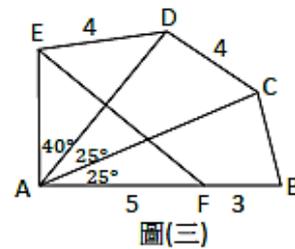


4. 如右圖(三)，幾何圖形 ABCDE 為一五邊形，則

(1)  $\angle DAB=_____$ 、 $\angle CAD=_____$

(2)  $\angle EAD+\angle DAC=_____$

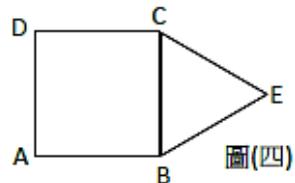
(3)  $\overline{AF}=_____$ 、 $\overline{AB}=_____$ 、 $\overline{ED}=\overline{DC}=_____$



5. 如圖(四)，正方形 ABCD 與正三角形 BCE，試回答

(1) 若  $\overline{AD}=5$ ，則  $\triangle BCE$  的周長=\_\_\_\_\_。

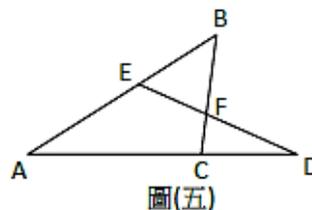
(2)  $\angle ABE=_____$ 。



6. 如圖(五)， $\angle A=35^\circ$ ， $\angle BCD=80^\circ$ ， $\angle BED=65^\circ$ ，則

(1)  $\angle EFC=_____$ 。

(2)  $\angle A+\angle B+\angle D=_____$ 。



7. 若有一正三角形邊長為 10，則

(1) 此正三角形的高為\_\_\_\_\_。

(2) 此正三角形的面積為\_\_\_\_\_。

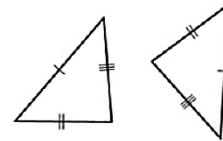
## 附錄 2：學習成效測驗

## 選擇題

- 下列敘述何者是指三角形的 ASA 全等性質？
  - 兩三角形中，兩組對應角分別相等，且兩組角的夾邊也對應等長
  - 兩三角形中，三組對應邊分別等長
  - 兩三角形中，兩組對應邊分別等長，且兩組邊的夾角也對應相等
  - 兩三角形中，三組對應角分別相等
- 若兩三角形中，三組對應邊長均等長，則根據下列哪個性質可以說這兩個三角形互相全等？
  - SSS
  - AAA
  - SAS
  - ASA
- 關於三角形的 SAS 全等性質，下列敘述何者正確？
  - 兩三角形中，任意兩組對應邊分別等長，任意一組對應角相等
  - 兩三角形中，兩組對應角分別相等，且兩組角的夾邊也對應等長
  - 兩三角形中，任意兩組對應角分別相等，任意一組對應邊等長
  - 兩三角形中，兩組對應邊分別等長，且兩組邊的夾角也對應相等

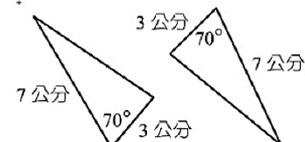
- 如圖，兩三角形三個對應邊都等長，則兩三角形全等是依據下列哪一個三角形全等性質？

- SAS
- ASA
- SSS
- AAA



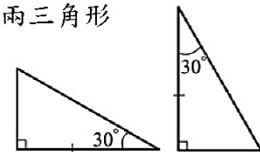
- 如圖，兩三角形有兩個對應邊等長，且兩組邊的夾角也相等，則兩三角形全等是依據下列哪一個三角形全等性質？

- SAS
- ASA
- SSS
- AAA



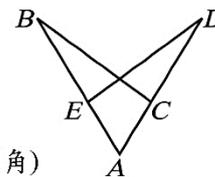
- 如圖，兩三角形有兩個角對應相等，且兩組角的夾邊也等長，則兩三角形全等是依據下列哪一個三角形全等性質？

- SAS
- ASA
- SSS
- AAA



- 如圖， $\triangle ABC$  與  $\triangle ADE$  中，已知  $\overline{AB} = \overline{AD}$ ， $\angle B = \angle D$ ，則下列哪一個三角形全等性質可以推得  $\triangle ABC \cong \triangle ADE$ ？

- ASA
- AAA
- SAS
- SSS

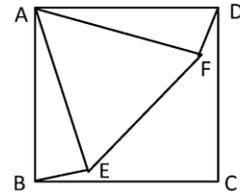


提示： $\angle A = \angle A$  (共同角)

8. 正方形 ABCD 與正三角形 AEF，已知  $\overline{BE} = \overline{DF}$ ，則根據下列哪一個全等性質推得  $\triangle ABE \cong \triangle ADF$ ？

- (A)ASA  
(B)AAA  
(C)SAS  
(D)SSS

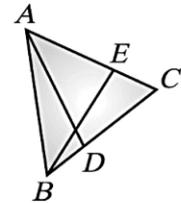
提示： $\overline{AB} = \overline{AD}$  (正方形邊長)  
 $\overline{AE} = \overline{AF}$  (正三角形邊長)



9. 如右圖， $\triangle ABC$  是正三角形，已知  $\overline{BD} = \overline{CE}$ ，則根據下列哪一個全等性質可以知道  $\triangle ABD \cong \triangle BCE$ ？

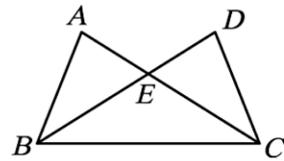
- (A)ASA  
(B)AAA  
(C)SAS  
(D)SSS

提示： $\overline{AB} = \overline{BC}$  (正三角形邊長)  
 $\angle ABD = \angle BCE$  (正三角形內角)



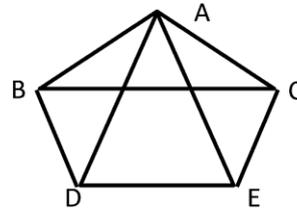
10. 如圖， $\overline{AB} = \overline{CD}$ ， $\angle ABC = \angle DCB$ ，請試著推理根據下列哪一個三角形全等性質可以知道  $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ ？

- (A)ASA  
(B)AAA  
(C)SAS  
(D)SSS



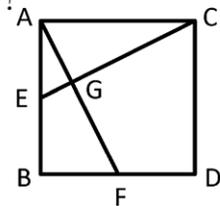
11. 如圖， $\triangle ABC$  與  $\triangle ADE$  皆為等腰三角形，且  $\overline{BD} = \overline{CE}$ ，請試著推理根據下列哪一個三角形全等性質可以知道  $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ ？

- (A)ASA  
(B)AAA  
(C)SAS  
(D)SSS



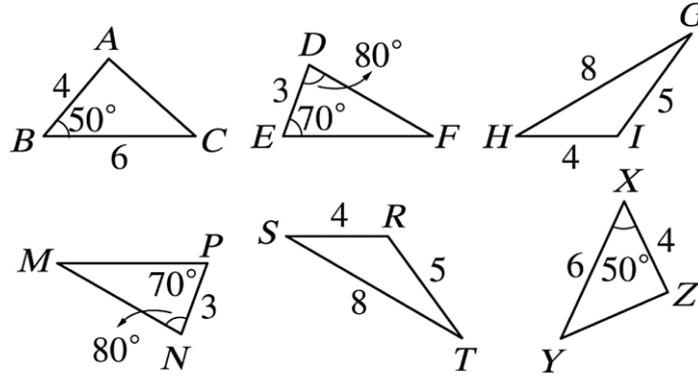
12. 如圖，正方形 ABCD 中， $\overline{AF}$  與  $\overline{CE}$  相交於 G 點， $\angle ACE = \angle BAF$ ，請試著推理根據下列哪一個三角形全等性質可以知道  $\triangle ABF \cong \triangle ACE$ ？

- (A)ASA  
(B)AAA  
(C)SAS  
(D)SSS



填充題

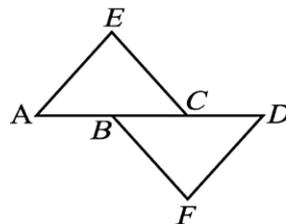
下列六個三角形中，將互相全等的三角形寫出來，並說明根據什麼全等性質？



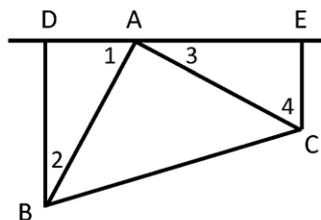
- (1)  $\triangle ABC$  與  $\triangle$  【                      】 全等，根據 【                      】 全等性質。
- (2)  $\triangle DEF$  與  $\triangle$  【                      】 全等，根據 【                      】 全等性質。
- (3)  $\triangle GHI$  與  $\triangle$  【                      】 全等，根據 【                      】 全等性質。

綜合題

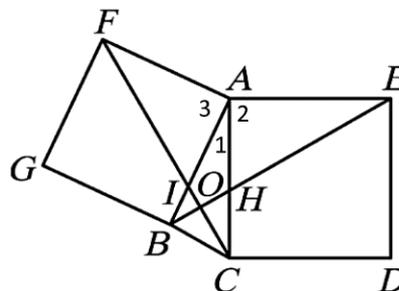
1. 如圖， $\overline{AB}=\overline{CD}$ ， $\overline{AE}=\overline{DF}$ ， $\overline{CE}=\overline{BF}$ ，試完整說明 $\triangle AEC$ 與 $\triangle BFD$ 是否為全等關係？



2. 如圖， $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，且 $\overline{BD}$ 垂直 $\overline{DE}$ ， $\overline{CE}$ 垂直 $\overline{DE}$ ，試完整說明 $\triangle ABD$ 與 $\triangle CEA$ 是否為全等關係？



3. 如圖，在 $\triangle ABC$ 的兩邊與分別向外作正方形 $ABGF$ 與 $ACDE$ ，試完整說明 $\triangle AFC$ 與 $\triangle ABE$ 是否為全等關係？





---

黃靖好、邱國力（2025）。

以眼球追蹤技術探討數學焦慮與閱讀解題範例歷程之關聯—以微分為例。

臺灣數學教育期刊，12（1），39–70。

[https://doi.org/10.6278/tjme.202504\\_12\(1\).002](https://doi.org/10.6278/tjme.202504_12(1).002)

## 以眼球追蹤技術探討數學焦慮與閱讀解題範例歷程 之關聯—以微分為例

黃靖好<sup>1</sup> 邱國力<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 國立臺灣師範大學資訊教育研究所

<sup>2</sup> 國立臺灣師範大學學習科學學士學位學程

本研究之目的，在於使用眼球追蹤技術來探討學生的數學焦慮與其閱讀微分範例（worked example）歷程之間的關係。本研究以 60 位曾修過微積分的大學生作為研究對象，在研究的過程中，每位學生先填寫中文版數學焦慮量表（MARS-R）以及完成微分前測試題，接著透過電腦螢幕閱讀微分的解題範例，最後再進行微分後測；在學生閱讀微分範例的過程中，本研究使用 Tobii Fusion 250 眼動儀全程記錄其眼球凝視的歷程。研究結果發現，在閱讀完微分範例之後，高、低焦慮組學生的學習成效並沒有顯著差異。此外，學生的數學焦慮程度與閱讀微分範例之特定的公式內容和解題過程之總凝視時間、總凝視次數和平均凝視時間具有顯著的相關性。共變異數分析（ANCOVA）的結果則進一步指出，高數學焦慮的學生在閱讀某些微分範例的公式和解題過程時，會展現較長的平均凝視時間，甚者，針對特定的範例內容，參與者的數學焦慮程度和其前測成績有顯著的交互作用，且僅有當參與者的前測成績較低的狀況下，高數學焦慮者閱讀範例的總凝視時間和次數，才會顯著高於低數學焦慮者。

**關鍵字：**範例、眼球追蹤、數學焦慮

---

通訊作者：邱國力，e-mail：glchiou@ntnu.edu.tw

收稿：2024 年 5 月 1 日；

接受刊登：2025 年 1 月 10 日。

---

Huang, J. Y., & Chiou, G. L. (2025).

Exploring the relationships between mathematics anxiety and the process of reading differentiation worked examples: An eye-tracking study.

*Taiwan Journal of Mathematics Education*, 12(1), 39–70.

[https://doi.org/10.6278/tjme.202504\\_12\(1\).002](https://doi.org/10.6278/tjme.202504_12(1).002)

## Exploring the Relationships Between Mathematics Anxiety and the Process of Reading Differentiation Worked Examples: An Eye-tracking Study

Jing-Yu Huang<sup>1</sup>      Guo-Li Chiou<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Graduate Institute of Information and Computer Education, National Taiwan Normal University

<sup>2</sup> Program of Learning Sciences, National Taiwan Normal University

This study aimed to explore the relationships between students' mathematics anxiety and their visual behaviors while reading worked examples of differentiation by using eye-tracking technologies. The participants of this study were 60 undergraduate students who had taken required calculus courses before participating. As for the data collection procedure, the participants first completed the Chinese version of the Mathematics Anxiety Rating Scale-Revised (MARS-R) and a pretest on basic differentiation formulas. Next, they read three worked examples of basic differentiation formulas on a computer monitor, and the Tobii Fusion 250 eye-tracker was used to record their eye movements throughout their reading processes. Afterward, the participants took a post-test to assess their learning outcomes. The results show that after reading the worked examples, the high-mathematics-anxiety and low-mathematics-anxiety groups had no significant difference in the post-test scores. In addition, while reading specific content of the worked examples, the participants' mathematics anxiety was significantly correlated with their visual behaviors when reading the worked examples. Moreover, the results of ANCOVA show that the participants with a higher level of mathematics anxiety were more likely to pay more visual attention to some regions of the worked examples than those with a lower level of mathematics anxiety. However, the extent to which the levels of mathematics anxiety correlate with their visual behaviors while reading the worked examples might vary with their pretest scores. Only when the participants' pretest scores were at the lower level were the total fixation duration and total fixation counts significantly higher for those with higher mathematics anxiety than for those with lower mathematics anxiety.

**Keyword:** worked example, eye-tracking, mathematics anxiety

---

Corresponding author : Guo-Li Chiou , e-mail : [glchiou@ntnu.edu.tw](mailto:glchiou@ntnu.edu.tw)

Received : 1 May 2024;

Accepted : 10 January 2025.

## 壹、緒論

根據 2022 年經濟合作暨發展組織 (Organization for Economic Cooperation and Development [OECD]) 所公布的「國際學生能力評估計畫」(Programme for International Student Assessment [PISA]) 結果，臺灣學生的數學素養成績在 81 個國家中名列第 3，然而，該計畫的結果也指出，臺灣學生的數學焦慮程度遠超過 OECD 所有國家的平均值，顯示在高數學成績的背後，台灣學生可能覺得數學艱澀難懂、擔心數學成績不佳，並在解數學題目時感到緊張且害怕犯錯 (林柏寬, 2023; OECD, 2023)。有學者指出 (Dowker et al., 2016; Tan & Yates, 2011)，臺灣長久以來的考試文化，導致學生有較高的數學焦慮 (mathematics anxiety)，而學生的數學焦慮可能會影響其數學的學習；也因此，瞭解數學焦慮如何影響學生學習，可能是協助學生改善其數學學習方式、降低其數學焦慮的重要關鍵。

教育部統計處 (2024) 大專校院學生數的統計資料顯示，商業及管理、工程與醫藥衛生為學生人數前三多的學門 (如附錄之附表 1)，且微積分為此三大學門常見的必修課。然而，許多學者 (黃冠仁、陳福祥, 2006; Miller, 2010) 也指出，多數大學生不覺得微積分是自己擅長的科目，且在學習微積分時經常遇到困難，導致其對微積分產生焦慮與排斥；換言之，儘管學生願意投入時間學習微積分，他們對於微積分仍感到焦慮 (Huang, 2011)。因此，瞭解學生對於微積分的焦慮感，以及學生的數學焦慮狀況和微積分學習的關聯，是一個值得探討的問題。

先前針對數學焦慮所進行的研究，多是針對數學焦慮與數學解題 (mathematics problem solving) 的關係進行探討，例如：數學焦慮和算術 (Aschraft & Kirk, 2001; Ramirez et al., 2016)、數學推理 (Cuder et al., 2023) 的關聯，但較少聚焦在數學焦慮與數學學習歷程的關聯，因此較難瞭解學生如何透過數學文本學習數學。然而，倘若數學焦慮是持續且穩定的狀態 (Ching et al., 2021; Cipora et al., 2015)，則此焦慮狀態可能在學生學習數學的歷程中持續影響其學習方式。也因此，本研究主張，若要探討數學焦慮對數學學習的影響，也應從學生學習數學的歷程著手，才能深入瞭解其間的關聯，以協助對數學感到焦慮的學生進行更有效的學習。

在學習數學的過程中，教科書的範例 (worked example) 常是學生用來學習解題的重要學習資源。多數學生在學習新的數學概念初期，會研讀範例所提供的解題步驟來瞭解類似題型的解題方法，隨後再依據範例建議的步驟來自行練習解題。有鑑於範例在學習數學解題的過程中扮演重要的角色，本研究將針對學生閱讀範例的過程進行探討，以瞭解數學焦慮和閱讀數學範例之間的關聯。

近年來，越來越多研究者使用眼球追蹤技術來探討學習者在學習過程中的眼球移動狀況，以分析與推論其處理圖文訊息時所涉及的認知歷程 (吳昭容, 2019; 陳學志等人, 2010; Knoblich et al., 2001; Perugini & Banse, 2007)。本研究也將利用眼球追蹤技術的特性，藉由

分析學生在閱讀數學範例時的視覺行為歷程與視覺注意力分布狀況，深入探討學生的數學焦慮和閱讀數學範例之間的關係。

## 貳、文獻探討

### 一、數學焦慮 (mathematics anxiety)

#### (一) 數學焦慮與數學學習

數學焦慮是指對數學相關的刺激和情境感到恐懼和擔憂的狀態，且這些感受狀態會影響個體在日常生活和學術情境中處理數學問題的方式和對應的數學表現 (Durette, 2009; Richardson & Suinn, 1972; Sevindir et al., 2014)。Baloğlu 與 Koçak (2006) 認為，焦慮是數學領域最關鍵的情緒問題之一，Skemp (1987/1995) 則指出，焦慮會提高理解數學的困難度，學生愈焦慮，就愈不可能鼓起勇氣去嘗試理解或持續學習，此導致學生的焦慮感加劇，進而形成一個惡性循環。相關研究也指出，焦慮確實和數學學習有顯著的關聯，例如，Kargar 等人 (2010) 曾探討大學生數學焦慮、數學態度 (mathematical attitude) 和數學思考 (mathematical thinking) 之間的關係，該研究結果發現，數學思考與數學焦慮之間存在中度負相關，數學焦慮程度較高的人在數學思考的得分往往較低，且有較消極的學習態度。

雖然許多研究都已確認學生的數學焦慮程度與其數學學習成績之間，有顯著的負相關，但究竟數學焦慮如何影響學生的數學學習，仍是許多學者關注的議題。根據注意力控制理論 (attentional control theory [ACT]; Eysenck et al., 2007)，焦慮會降低訊息處理的效率 (efficiency)，此因焦慮感會削減工作記憶 (working memory) 之中央執行 (central executive) 系統的控制能力，讓個體較難執行注意力抑制 (inhibition) 的功能，使其較容易因與任務無關的外在刺激 (external stimuli)、或自身的擔憂所引發的內在刺激 (internal stimuli) 而分心，從而降低其處理訊息的效率，進而影響其認知表現。

個體在進行數學運算時，需仰賴工作記憶的運作，而根據注意力控制理論 (Eysenck et al., 2007)，焦慮會削減工作記憶的效率，故數學焦慮可能對學生的數學解題或學習過程造成關鍵的影響 (Ashcraft & Krause, 2007)。Ashcraft 與 Kirk (2001) 強調，數學的解題的歷程與工作記憶有密切的關連，解題歷程所涉及的提取既有公式、計畫解題步驟、執行運算過程，都需仰賴工作記憶的運作，而數學焦慮會佔據工作記憶的資源，使個體無法專注於當前的解題任務，導致其解題的速率變慢、降低其解題的正確率；而在數學學習的過程中，數學焦慮也可能對數學學習造成影響，即個體的焦慮會限制其可使用的工作記憶容量，從而降低其理解數學學習內容的效率。Li 等人 (2023) 的研究結果發現，在進行數學解題時，數學焦慮程度較高的學生更容易因為與解題無關的圖樣而分心，顯示焦慮會影響工作記憶的運作，讓學生較難抑制自己不去注意外在的干擾因素，導致其解題速率較慢、答對率較低。

學生對於數學產生的焦慮感也可能導致其對數學的迴避 (avoidance) (Beilock et al., 2010; Hendel & Davis, 1978)，因為學生迴避練習數學題目，以及認為自己無法學好數學，阻礙了他們的數學學習，因而無法精熟相關的數學概念 (魏麗敏, 1996; Ashcraft, 2002; Durette, 2009)。許多研究指出數學焦慮與數學成就呈顯著負相關，例如，Zhang 等人 (2019) 針對 2000 年至 2019 年探討數學焦慮與數學成績之間關係的研究進行後設分析，結果指出，數學焦慮與數學成就之間確實有顯著的負相關，特別是以亞洲學生為受試者的研究，兩者展現出更高強度的負相關。Barroso 等人 (2021) 也曾針對 1992 至 2018 年間以數學焦慮為主題所發表的論文進行後設分析，分析的結果發現，學生的數學焦慮和數學成績之間確有低度到中度的顯著負相關，並且，此關係存在於各學習階段的學生。下文中，我們將針對大學生的數學焦慮與學習狀況進行更深入的介紹。

## (二) 大學生的數學焦慮

大學階段的學生，也普遍對數學感到焦慮 (Betz, 1978; Khasawneh et al., 2021; Richardson & Suinn, 1972)。Betz (1978) 曾針對大學生數學焦慮的盛行率和強度進行調查，研究結果指出，即使是理工科系學生，也有超過一半的學生對數學考試感到焦慮，且有約四分之一的學生對數學感到緊張和困惑；而高中數學基礎越差的學生也越容易產生數學焦慮，有約一半的學生認為數學讓他們感到緊張和困惑。許多研究也指出 (Hendel & Davis, 1978; Kadry & El Shalkamy, 2012)，大學生在學習微積分時，經常會出現數學焦慮。Huang (2011) 曾調查臺灣工科大學生對微積分的態度，研究結果發現臺灣大學生對於學習微積分雖有高度的動機，卻也有高度焦慮的現象，即使學生願意修習微積分的課程，卻也擔心無法獲得理想的成績；Huang 認為，臺灣的考試文化可能是引發學生高度數學焦慮的主因。

針對學生在學習微積分時所感受到的數學焦慮，Estonanto 與 Dio (2019) 曾對 69 位進行調查研究，該研究發現，幾乎所有參與研究的學生都具有中度到高度的數學焦慮，而導致他們感到數學焦慮的因素包含微積分的概念過於抽象 (41 位)、教師的因素 (如教學風格、教師的態度, 39 位) 及認為自己的理解與分析能力不佳 (37 位)。其中，針對微積分的抽象概念部分，多數學生指出自己很難掌握微積分公式的來源，因而對於微積分感到懼怕；並且，有學生提到，如何將新的學習主題與先前的課程內容進行銜接，並選取適當的公式來解題，非常困難。換言之，學生可能是在學習微積分的過程中遭遇困難，導致其無法充分理解微積分的基礎概念和公式、無法運用所學的微積分知識來成功解題，因而產生高度的數學焦慮。

## 二、學習微積分的困難

在許多學者指出，當學生在學習數學的過程中遭遇困難時，他們不會想去理解所學的內容，而是透過背誦公式和範例的解題步驟，來解決數學問題 (Lithner, 2004; Schoenfeld, 2016; Tall, 1993)。在這樣的情況下，即使學生能藉由背誦而成功解題，他們對於對應的數

學定理和概念還是缺乏充分的理解，也未能覺察自己對於相關的學習內容可能持有迷思概念 (Gruenwald & Klymchuk, 2003)；而學生既有的迷思概念，可能進一步導致其對未來要學習的數學內容產生誤解 (劉湘川等人, 2010)。

已有許多研究探討大學生在學習微積分時可能出現的困難或迷思概念，例如，魏傳昇 (2018) 曾以「微分的應用」為主題，分析出學生所持有的四種迷思：(1) 忽略未知數的次方為平方時，其解可為負值；(2) 混淆臨界點與反曲點的定義；(3) 誤以為零的負次方亦為零；(4) 誤解乘積法則，包含誤用連鎖律 (chain rule) 及誤用乘法對加法的分配律 (distribution law)。此外，劉湘川等人 (2010) 也曾分析大學生對於微分基本公式的錯誤概念，其研究結果歸納出三種常見的錯誤類型：(1) 迷思，包含錯用冪分配 (如誤認為  $(f(g(x)))' = f'(g'(x)))$ )、受加法律或乘法律影響導致公式使用錯誤等 (如誤認為  $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$ )；(2) 迷失，包含錯誤地進行結合運算 (如誤認為  $(x+1)' = x + (1)' = x$ )、忽略對稱性或交錯性 (如誤認為  $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x) + g'(x)$ )、忽略必然性 (如誤認為  $(f(g(x)))' = f(g'(x))$ ，左式有  $f$  的元素在微分內，但是右式微分內只有  $g$ )；(3) 錯置，包含失序 (或流程不完全)、順序錯誤、公式混搭。根據上述的研究成果，本研究將針對乘積法則、連鎖律與除法法則三個公式，設計對應的微分範例，以探討學生閱讀微分範例的歷程與其數學焦慮之間的關係。

### 三、數學範例

在數學領域，範例係指針對特定的數學問題，闡明該問題的情境，並提供對應的解題步驟與最終的解答等訊息。涂金堂 (2011) 認為，閱讀範例可以降低學生學習數學解題時的工作記憶負荷，可用來做為協助學生學習數學解題的鷹架。範例被廣泛用於不同的學科，特別是在數學、科學、技術和工程 (Science, Technology, Engineering, and Mathematics, 簡稱 STEM) 領域的課堂上，多數教師會使用範例來引導學生學習解題的歷程 (Miller, 2010)，而學生在課後，也經常會閱讀相關的範例來進一步學習如何解決特定類型的問題，換言之，運用範例來解題，為多數學生偏好且認為有效的學習方式 (LeFevre & Dixon, 1986; Renkl, 1999; VanLehn, 1996)。

範例在數學學習上的效益，可藉由認知負荷理論 (cognitive load theory) 來解釋。Sweller (1994) 主張，個體的工作記憶容量有限，從事認知負荷高且與學習無關的活動會干擾學習，也因此，Sweller (1994) 提出範例效應 (worked-example effect)，強調在學習認知技能的初始階段，透過範例學習會比直接進行解題更為有效 (涂金堂, 2012; Renkl, 2005; Schwonke et al., 2009)，此因直接要求學生進行解題，可能會造成學生在解題過程中從事錯誤或無效的搜索 (searches)，因而佔據其過多的工作記憶容量，使其無法專注於解題所需的關鍵步驟和運算 (Sweller et al., 1998)。涂金堂 (2012) 曾以國小五年級的學生為研究對象，將學生分為實驗組與控制組進行數學教學，實驗組的學生接受範例教學，學生在教師講解範例後，先閱讀範例並試著完成範例的填空 (範例中的解法以填空題的形式呈現)，而

控制組的學生則接受傳統教學法，先由教師講解例題，再由學生直接練習解題；該研究結果顯示，實驗組的學習成績顯著高於控制組，即在教師教學後，運用範例學習的學生，其數學學習成效顯著高於直接進行解題的學生。

Sweller 與 Cooper (1985) 也曾設計實驗來探討學生要解決代數題目所需的知識，及用來促進學生學習數學的方法。他們將受試者分為傳統解題教學組及範例教學組，研究結果發現，與接受傳統解題教學的學生相比，範例學習組的學生從範例中學習代數的效率更高，考試成績略好，犯的錯誤更少，Sweller 與 Cooper (1985) 因此推論使用範例可以減少學生的認知負荷。Miller (2010) 也曾針對三步法 (three-step method) 教學對微積分的成效來進行探討，三步法係先請學生閱讀微積分學習網站上的範例，隨後要求學生以小組的方式解決類似的題目，並將其解題步驟告訴研究人員，最後再要求學生以個別或以小組的方式解決更多道題目。研究結果發現，參與三步法教學的學生表現顯著優於對照組的學生，Miller (2010) 認為這是因為範例能夠幫助學生獲得技能並建立相關基模，以協助其解決類似的問題。

雖然相關研究的結果都支持範例效應的假設，即讓初學者先使用範例進行學習，會比直接進行解題更有成效，然而，對於較精熟的解題者，使用範例可能無法提升其解題成效。當學習者已經能充分瞭解並掌握解題策略時，若要求其閱讀相關的範例後再行解題，可能會增加其額外的認知負荷（在此為外在認知負荷 (extraneous cognitive load)），此歷程無助於其解題的效率或正確性，此即「專業知識反轉效應」(expertise reversal effect) (Kalyuga et al., 2003)。此效應指出，專業知識較不足的學習者較能夠從範例的學習中受益，因為範例可提供其所需的訊息或鷹架；但對於專業知識相對較高的學習者來說，範例所提供的訊息可能是多餘的，而這些多餘的資訊可能造成其學習與理解上的認知負荷，因此，若要求他們處理對初學者有助益的訊息，不一定能獲得預期中的學習成效，甚至可能會阻礙其進行更深入的學習 (Kalyuga et al., 2003)。

已有許多研究結果確認「專業知識反轉效應」在範例學習中的現象，例如，涂金堂(2011)曾以國小五年級學生為研究對象，進行數學範例的教學實驗；該研究將學生分成控制組與實驗組，其中控制組的學生接受傳統教學，即在教師講解完範例後，自行解決兩道題目，而實驗組的學生則是接受範例教學，即在教師講解完範例後，需先自行研讀一道範例，接著再解決不完整的範例（將範例中的解法以填空題的形式呈現）。該實驗的結果呈現出專業知識反轉效應，即針對前測成績較低的學生而言，接受範例教學者的後測成績顯著高於接受傳統教學者的後測成績；相對地，針對前測成績較高的學生而言，接受傳統教學和接受範例教學的兩組學生在後測成績上並沒有顯著差異。根據專業知識反轉效應，使用範例作為教學或學習素材，其成效會因學生既有的程度而有區別，而不一定會產生固定的效益。而專業知識反轉效應，也可能出現在大學階段的學習者身上。例如，Kalyuga (2008) 曾以 32 位大學生作為研究對象，探討專業知識水平與不同範例呈現方式（動畫或靜態圖表）在教學效果上的差異。Kalyuga 依據預試的結果將受試者分為高先備知識組和低先備知識組，每組一半的學生使用動畫學習如何進行線性和二次方程式的圖表轉換（例如，將直線圖

$y = x^2$  轉換為  $y = 2(x - 1)^2 - 3$  的圖)，另一半的學生則是使用靜態圖示來學習相同的內容。該研究的結果顯示，低先備知識的學習者在使用靜態範例學習後表現較好，高先備知識的學習者則是在使用動畫教學學習後的表現較好，此結果顯示先備知識水平與範例呈現方式之間存在顯著的交互作用。Kalyuga 認為，此研究結果呈現專業知識反轉效應是因為專業知識較高的學習者可能已經具備動態轉換方程式圖表的能力，故若要求其藉由靜態的圖示來進行學習，反而會增加其認知負荷而限制其學習的成效；相對地，專業知識較低的學習者因尚未具備圖表轉換所需的能力，故訊息量較大的動畫範例反而會造成其認知負荷過重，導致達不到預期的學習成效。

#### 四、眼球追蹤技術

眼球追蹤技術係以非侵入的方式，即時、精確地測量個體眼球運動的歷程（陳學志等人，2010；Knoblich et al., 2001; Perugini & Banse, 2007）。藉由眼球追蹤技術，研究者可以知道個體正在關注什麼訊息以及如何觀看這些訊息（Andrá et al., 2015），並藉此推測對應的訊息處理與認知歷程。近年來，眼球追蹤技術已被廣泛用來分析學習者學習的歷程（陳學志等人，2010；Alemdag & Cagiltay, 2018; Lai et al., 2013），在數學教育領域使用眼球技術來探討學習歷程的研究也有迅速增加的趨勢（Strohmaier et al., 2020）。

一般而言，眼球的運動可區分為凝視（fixation）與跳視（saccade）兩種主要的模式。「凝視」是指眼球以相對靜止的狀態來接受特定的刺激，此時物體影像會被投射至中央小窩（fovea），使視覺訊息在視網膜（retina）上成像，以獲得清晰的視覺，個體也會針對所接收的訊息進行知覺的辨識與認知的處理（陳學志等人，2010；黎佩芬、賴建都，2011；Justice et al., 2005）。然而，在凝視的期間，眼球並非完全靜止不動，而是伴隨著震顫（nystagmus）、漂移（drifts）與微跳視（microsaccades）三種微小的眼球運動（Rayner, 1998）。「跳視」則是指眼球從一凝視點快速移動到另一個凝視點的歷程，此過程僅需約 15–40 毫秒（Rayner, 1998）。藉由分析讀者在閱讀過程中的凝視與跳視，研究者可推論個體處理外界訊息時的內在認知歷程。

眼球運動與認知過程的關聯，可藉由 Just 與 Carpenter（1980）提出的心眼假說（eye-mind hypothesis）與立即性假說（immediacy hypothesis）來進行推論，而這兩個假說係以眼球的凝視運動為基礎。心眼假說認為，眼睛凝視位置所對應的外界訊息，即為個體認知系統正在處理的內在訊息，也因此，透過分析個體閱讀過程中凝視點的位置與凝視時間的長短，即可推論其處理訊息的內容與對應的時間；一般而言，閱讀素材的難度與凝視的相關指標之間具有高度正相關，即讀者在困難度較高的訊息上會花費較長的凝視時間（吳昭容，2019；Just & Carpenter, 1976, 1980; Schindler & Lilienthal, 2019）。另一方面，立即性假說主張，讀者會試圖在接收到外界的訊息後即刻地對該訊息進行處理，以確定它在閱讀素材中的重要性。Just 與 Carpenter 強調，讀者雖然會儘快對所接收的視覺訊息進行詮釋，但詮釋的過程有時無法在第一次凝視期間完成，此時，讀者需要藉由更多的訊息（例如接續的詞

語或內容)才能判斷整體訊息的意涵。藉由心眼假說與立即性的假說,研究者可將個體的眼球運動和其處理外界訊息的內在歷程進行連結,以推測其在閱讀過程中展現的認知過程(Hvelplund, 2014)。

進行眼球追蹤研究時,研究者通常在觀看的内容中定義出一些「興趣區域」(area of interest [AOI]),並以此區域為範圍來分析眼球移動的情形。而眼球的凝視狀況,是閱讀領域研究中最被關注的眼球運動,興趣區域中累積的凝視次數和凝視時間與認知處理的深度和注意力的分布有關(Rayner, 1998; Zhao et al., 2014)。一般而言,眼球對特定區域的凝視時間愈長,代表讀者想要或需要花較多的時間處理該區域的訊息,可用以推測該區域的訊息內容的難度或重要性較高(陳學志等人, 2010)。而以眼球凝視狀況為主的眼球運動分析指標,最常見的為總凝視時間(total fixation duration [TFD])與總凝視次數(total fixation counts [TFC])。「總凝視時間」及「總凝視次數」為圖文閱讀研究常用的指標,可以反映出讀者處理興趣區域中內容耗費心力的程度(吳昭容, 2019; 簡郁芬、吳昭容, 2012; Andra et al., 2015)。「總凝視時間」愈長或「總凝視次數」愈多,通常表示該訊息愈困難或重要,需要更多心力和認知資源去處理閱讀的訊息(陳學志等人, 2010; 簡郁芬、吳昭容, 2012)。此外,將總凝視時間除以總凝視次數可以得到「平均凝視時間」(average fixation duration [AFD]),此數值亦可反應讀者對閱讀素材内容所感受到的難易程度;一般而言,讀者在閱讀較困難的訊息時,所展現的平均凝視時間會相對較長(陳學志等人, 2010)。

## 五、眼球追蹤技術在數學範例研究的應用

眼球追蹤技術被廣泛應用在數學文本閱讀的領域,因數學範例也是一種重要的數學文本,故使用眼球追蹤技術來分析學生閱讀範例時的視覺注意力分布狀況,可以協助研究者推論學生學習數學的過程。

在數學領域中,幾何證明是常見的範例類型,因其包含了豐富的圖形、數字與文字,所以研究者可藉由眼動追蹤技術來分析學生如何閱讀不同類型的數學表徵,以及其如何整合這些資訊的歷程。例如,陳琪瑤與吳昭容(2012)曾以學過但不熟悉幾何證明的31位大學生為受試者,蒐集其閱讀幾何證明題時的眼動資料,以及其閱讀後的測驗表現。研究結果發現,受試者有50%的凝視時間落在幾何證明題的圖區,且在圖形區的單位畫素凝視時間較在文字區長,表示受試者較傾向藉由閱讀圖形來瞭解幾何證明。此外,若將證明題附圖的線段和夾角區域加以著色,則能顯著減少關鍵區的初始理解時間,但不影響其回視時間及後測的表現,此結果表示色彩可能會影響學生閱讀幾何證明的視覺歷程,但對幾何推理和記憶理解的表現影響則較有限。另外,林采雯與吳昭容(2016)曾針對50位大學生,收集其閱讀「幾何敘述」、「已知求證」、「示範證明」三種不同類型幾何文本的眼動資料。該研究結果發現,受試者在理解幾何證明的過程中相當依賴圖形的閱讀,且其閱讀圖形的比率在「示範證明」題型中顯著高於「幾何敘述」和「已知求證」兩種題型,表示讀圖比例會隨著文本內涵而改變;此外,該研究結果也指出,受試者在閱讀「幾何敘述」的文本

時，其初始理解的比率較高，而在閱讀「示範證明」的文本時，則是回視階段的比率較高。此研究的結果說明，讀者的眼球運動模式，可能會隨著文本形式與內容而改變。

另一方面，相關研究也指出，在閱讀數學文本時，專家與生手的眼球運動也可能有所不同。例如，Inglis 與 Alcock (2012) 以眼動技術比較 12 位數學家與 18 位數學系大一的學生在進行數學證明驗證時的眼球運動行為。研究結果顯示，學生在公式上的駐留時間 (dwell time) 與平均凝視時間 (mean fixation durations) 顯著高於數學家，表示大學生可能使用更多認知資源來處理公式的訊息。然而，數學家的平均行間掃視次數 (mean number of between-line saccades) 與平均行間掃視比例 (mean proportion of between-line saccades) 顯著高於大學生，此表示數學家可能投注更多認知資源來推論各行之間訊息的連貫性與正確性。此外，Panse 等人 (2018) 曾收集了 12 位專家和 14 位新手在理解和驗證數學證明時的眼動行為，其使用的眼動指標包含駐留時間、平均凝視持續時間、瞳孔擴張 (pupil dilation) 與迴歸掃視次數 (regressive saccades)。該研究結果發現，專家不論是在驗證或是理解數學證明的階段，都比新手展現更頻繁的多行間回視，相對地，新手則較少進行全盤性的回視。上述研究的結果，可為數學閱讀與推理歷程的研究提供實徵的基礎，也突顯以眼球追蹤技術探討數學範例閱讀的潛力。

## 六、眼球追蹤技術在數學焦慮研究的應用

眼球追蹤技術除了可以推測個體進行閱讀、學習和問題解決時的認知歷程外，也可反映個體執行相關任務時的情意與動機狀態，例如恐懼、焦慮或者投入程度等 (吳昭容, 2019)。Hunt 等人 (2015) 曾探討眼球運動與數學焦慮與表現之間的關係，該研究請 78 位大學生進行 80 題二位數字的加減法，其中 40 題為進位題，另外 40 題為不需進位題 (例如：「 $23 + 29 = 52$ 」中的三數字皆為兩位數)，參與者的任務為判斷題目所提供的答案是否正確。研究結果發現，數學焦慮與許多眼動指標呈正相關，例如總凝視時間、總凝視次數、跳視次數，該研究結果也指出，數學焦慮可能會降低數學計算的效率。

此外，Li 等人 (2023) 則以三至六年級學生作為研究對象，探討其在數學解題任務中，數學焦慮與數學表現之間的關聯。受試者首先進行問題驗證任務 (problem verification task)，他們需要判斷一個數學等式是否正確 (如判斷  $33 \div 3 = 30$  是否正確)，每個等式皆會與一個干擾圖形 (外部干擾因素, external distractors) 一起呈現。該研究收集每位受試者進行任務時的眼球運動狀況，以進一步分析相關的眼動指標。任務結束後，每位受試者會完成標準化的閱讀和數學成就測試，並填寫兩份問卷來分別測量其數學焦慮和一般焦慮程度。研究結果指出，數學焦慮程度較高的學生在數學解題過程中，較可能將注意力投注在與無關的外部干擾圖形上，導致這些學生判斷的正確率較低，也需要較長的反應時間。Li 等人認為此研究結果符合 ACT 理論的假設，即受試者的焦慮狀態會影響其對注意力的控制，從而導致其投注較多的視覺注意力在干擾圖形上，使其有較低的解題表現。上述 Hunt 等人 (2015)

和 Li 等人 (2023) 兩個研究，皆示範採用凝視相關的眼動指標來探討數學焦慮和從事數學相關活動之關聯的可行性。

## 七、研究問題

由前述的文獻回顧可知，數學焦慮與學生的學習成效有顯著的負相關，即使是大學階段的學生，也會對數學感到焦慮，此可能導致他們在學習微積分的過程會遭遇挫折，甚至迴避微積分的學習。本研究認為，深入探討數學焦慮與微積分學習歷程之間的關聯，可協助數學教育相關人員瞭解不同數學焦慮程度的學生在學習微積分歷程上的差異，進而能透過適當的教學方式來協助學生減低數學焦慮並獲得更佳的學習成效。因此，本研究將利用眼球追蹤技術，深入探討學生在閱讀微分範例的過程，並詳細分析不同數學焦慮程度的學生在閱讀微分範例歷程的差異。基於此研究目的，本研究擬定的研究問題如下：

- (一) 不同數學焦慮程度的學生閱讀微分範例的成效是否有差異？
- (二) 學生在閱讀微分範例時，其數學焦慮與眼球凝視狀況之間是否有顯著相關？
- (三) 不同數學焦慮程度的學生在閱讀微分範例時，其眼球凝視狀況是否有差異？

## 參、研究方法

本研究的主要目的，在於探討數學焦慮與閱讀微分範例之間的相關性，也因此，本研究以相關研究 (correlational study) 的設計為基礎，收集大學生的數學焦慮、微分學習狀況、閱讀微分範例之眼球凝視的資料，以檢核這些變項之間的關聯。此外，為深入探討數學焦慮與閱讀微分例題之間的關係，本研究進一步區分學生的數學焦慮程度，以檢核不同數學焦慮程度的學生，在閱讀微分例題過程中視覺注意力分布的差異。

### 一、研究對象

本研究招募 66 位來自理工、教育、商管等不同學院的大學生作為參與者，所有參與者皆曾在大學階段修習過微積分的課程，故可假設其已持有微積分的基本知識，可以理解範例內所呈現的基本的微分公式與概念。根據參與者的眼動資料，本研究排除 6 位眼動數據不佳的參與者 (校正未通過，如  $\text{accuracy} < 0.50^\circ$  或  $\text{precision} < 0.50^\circ$ ；或者  $\text{gaze sample}$  低於 80%)，以剩餘的 60 位參與者 (其中 33 位為男性，27 位為女性) 來進行資料的分析。

### 二、研究工具

#### (一) 數學焦慮量表

本研究使用 Wu 等人 (2018) 翻譯及修改後的中文版數學焦慮量表 (Mathematics Anxiety Rating Scale-Revised [MARS-R])，來測量大學生的數學焦慮。此量表最原始的版本，是由

Richardson 與 Suinn (1972) 所編製的 Math Anxiety Rating Scale (MARS) 量表，原始量表共有 98 題，包含數學測驗焦慮 (mathematics test anxiety) 與數字焦慮 (numerical anxiety) 兩個因素，可用以評估學生的數學焦慮程度。其中，數學測驗焦慮係用於評估學生對完成數學考試、預期與接收數學考試成績的擔憂，而數字焦慮則與日常生活需要數學計算的情境有關 (Rounds & Hendel, 1980)。然而，有鑑於 MARS 原始量表的題目數量過多，Plake 與 Parker (1982) 將其修訂並縮減成僅有 24 題的 MARS-R 量表，並將數學焦慮進一步細分為數學學習焦慮 (learning math anxiety [LMA]) 和數學測驗焦慮 (math evaluation anxiety [MEA]) 兩個子量表，以作為 MARS 量表的簡化版。MARS-R 具有良好的信度 (Cronbach's  $\alpha = .98$ )，且與原始版本有高度相關 ( $r(170) = .97$ )，能大幅縮短量測數學焦慮所需的時間。

Tang 與 Dixon (2002) 指出，由於文化差異和語言限制，英語量表不適用於非以英語為母語的學生。因此，本研究使用 Wu 等人 (2018) 翻譯及修改後的中文版 MARS-R 數學焦慮量表，以測量大學生在學習微積分時的數學焦慮。MARS-R 中文版使用李克特五點量表 (1 分為無焦慮，5 分為高度焦慮)，共 16 題，其中 10 題為數學學習焦慮子量表，例如：請學生評估「讀數學書籍的新章節」所感受到的焦慮程度；而另 5 題為數學測驗焦慮子量表，例如：請學生評估「考前一天，想到即將到來的數學考試」的焦慮程度。此 16 題中文版的 MARS-R 數學焦慮量表與原始 24 題的 MARS-R 數學焦慮量表有顯著正相關，且兩個版本的數學學習焦慮 (LMA)、數學測驗焦慮 (MEA) 子量表之間也都有顯著正相關，代表中文版與原始版的 MARS-R 在統計上沒有不同，且男女大學學生均適用，可作為學習微積分時的數學焦慮量測工具 (Wu et al., 2018)。

為確認中文版數學焦慮量表的信度，本研究根據參與者填答此量表的結果進行信度分析，分析結果顯示，數學學習焦慮子量表的 Cronbach's  $\alpha$  係數為 .89，數學測驗焦慮子量表的 Cronbach's  $\alpha$  係數為 .86，數學焦慮總量表的 Cronbach's  $\alpha$  內部一致性係數為 .93，顯示此量表具有良好的信度。

## (二) 微分解題範例

本研究參考 Stewart 等人 (2020) 編寫之微積分教科書 (Calculus: Early Transcendentals) 中「微分」的例題，針對微分的乘積法則、除法法則、連鎖律三個概念來設計範例，以瞭解參與者閱讀微分基本計算題時的過程，每個概念各有一題對應的範例，共有三題範例。每題範例包含三大區域：題目 (如圖 1、圖 2、圖 3 中左邊最上行)、微分基本公式 (如圖 1 至圖 3 左邊三行) 與解題過程 (如圖 1 至圖 3 右邊五行)。本研究將此三大區域細分為九個興趣區域 (詳細的名稱與定義請參見表 1)：題目一行 (如圖 1 至圖 3 左欄最上方)、微分基本公式三行 (如圖 1 至圖 3 左欄下方，第一行為公式的名稱，第二行為公式成立的前提，第三行則為公式的內容) 與解題過程五行 (如圖 1 至圖 3 右欄，第一行為微分的過程，第二至四行為化簡的過程，第五行為例題的答案)，此外，上述各行之間行距，皆大於眼動儀可區分兩訊息內容之最短距離。

## 圖 1

「乘積法則」之解題範例

〈例〉 設  $p(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}$ ，試求  $p'(x)$ 。

〈解〉 由乘積法則可得

乘積法則 (The Product Rule) :

若  $f(x)$  與  $g(x)$  皆對  $x$  可微，則

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$$

$$\begin{aligned} p'(x) &= (x-2)^{\frac{1}{3}} \frac{d}{dx} \left[ x^{\frac{2}{3}} \right] + x^{\frac{2}{3}} \frac{d}{dx} \left[ (x-2)^{\frac{1}{3}} \right] \\ &= (x-2)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{3} (x-2)^{-\frac{2}{3}} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{1}{3}} (x-2)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} x^{\frac{2}{3}} (x-2)^{-\frac{2}{3}} \\ &= \frac{1}{3} x^{\frac{2}{3}} (x-2)^{-\frac{2}{3}} [2x^{-1}(x-2) + 1] \\ &= \frac{1}{3} x^{\frac{2}{3}} (x-2)^{-\frac{2}{3}} (3 - 4x^{-1}) \end{aligned}$$

## 圖 2

「連鎖律」之解題範例

〈例〉 設  $p(x) = (5 - \sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}$ ，試求  $p'(x)$ 。

〈解〉 由連鎖律可得

連鎖律 (The Chain Rule) :

若  $g(x)$  對  $x$  可微，且  $f(x)$  對  $g(x)$  可微，則

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$$

$$\begin{aligned} p'(x) &= \frac{d}{dx} (5 - x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{2} (5 - x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{3}{2}} \frac{d}{dx} (5 - x^{\frac{1}{2}}) \\ &= -\frac{1}{2} (5 - x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{3}{2}} \left( -\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{4} (5 - \sqrt{x})^{-\frac{3}{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{x}(5 - \sqrt{x})^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

圖 3

「除法法則」之解題範例

<p>&lt;例&gt; 設 <math>p(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 2}</math>，試求 <math>p'(x)</math>。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>除法法則 (The Quotient Rule) :</p> <p>若 <math>f(x)</math> 與 <math>g(x)</math> 對所有使 <math>g(x) \neq 0</math> 的 <math>x</math> 可微，則</p> <math display="block">\frac{d}{dx} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad g(x) \neq 0</math> </div>	<p>&lt;解&gt; 由除法法則可得</p> $  \begin{aligned}  p'(x) &= \frac{(x+2) \frac{d}{dx}(x^2-3) - (x^2-3) \frac{d}{dx}(x+2)}{(x+2)^2} \\  &= \frac{(x+2)(2x) - (x^2-3) \cdot 1}{(x+2)^2} \\  &= \frac{(2x^2+4x) - (x^2-3)}{(x+2)^2} \\  &= \frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2} \\  &= \frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}  \end{aligned}  $
---	---

表 1

各興趣區域之名稱與定義

九個興趣區域	名稱	名稱	定義	統計表格呈現名稱
題目	第一行	題目	呈現一個函數，請參與者求其一次微分結果	題目
公式	第一行	公式的名稱	該題使用之微分公式的名稱	公式(1)
	第二行	公式的前提	該題使用之微分公式成立須滿足的條件	公式(2)
	第三行	公式的內容	該題使用之微分公式	公式(3)
解題過程	第一行	微分的過程	將題目呈現之函數套用該題提供之微分公式進行一次微分	解題過程(1)
	第二行	化簡的過程	將微分式子化為更簡單的形式	解題過程(2)
	第三行	化簡的過程	將微分式子化為更簡單的形式	解題過程(3)
	第四行	化簡的過程	將微分式子化為更簡單的形式	解題過程(4)
	第五行	例題的答案	呈現範例的答案	解題過程(5)

### (三) 微分前測及後測

本研究針對前述的微分概念，開發前測與後測兩套測驗，以分別測量參與者既有的微分能力與閱讀範例後的學習狀況，每套測驗針對微分的乘積法則、除法法則、連鎖律三個概念各設計一題計算題，共計三題；前、後測的題型維持相同，但函數中變項的係數與常數項不同，以「除法法則」為例，圖 4、圖 5 分別呈現除法法則在前、後測所對應的題目。

圖 4

「除法法則」在前測的題目

$$2. \text{ 若 } p(x) = \frac{x^2 + 2}{2x - 1}, \text{ 求 } p'(x)。$$

圖 5

「除法法則」在後測的題目

$$(2) \text{ 若 } p(x) = \frac{x^2 - 24}{x - 5}, \text{ 求 } p'(x)。$$

本研究的微分前測與後測的結果，皆由本研究者與另一位評分者進行評分，三題微分題目的評分標準，係參考美國 AP Students Calculus AB 所建議的微分計算題評分標準 (The Advanced Placement Central [AP Central], 2023)，將參與者的答案分為「微分公式運用與列式」與「答案」兩個部分，其中「微分列式」與「計算」的配分皆為 1 分，每一題最高得分為 2 分，三題的總分為 6 分。本研究針對兩位評分者評分結果，進行評分者間一致性分析的檢核，分析結果顯示，前、後測各題的「微分公式運用與列式」、「答案」部分，所有 Cohen's Kappa 係數皆介於 .88~1.00 之間，顯示本研究中參與者的前、後測成績，具有高度的評分者間一致性 (inter-rater reliability)。

#### (四) 眼動追蹤技術設備

本研究將使用眼球追蹤技術來記錄與分析學習者閱讀微分範例的視覺注意力歷程，研究過程中使用的眼動儀設備如下：

##### 1. 眼動儀—Tobii Fusion 250

本研究使用 Tobii Pro Fusion 250 眼動儀，取樣頻率為 250 Hz，最佳狀態下的精準度 (precision) 為 0.04 度 RMS，準確性 (accuracy) 為 0.3 度，並搭配 24 吋的電腦螢幕進行資料的收集，解析度設定為 1920\*1080 個像素 (pixels)，實驗材料為全螢幕呈現，並將參與者距離螢幕距離控制在 65 公分左右，即整個實驗材料涵蓋水平視角約 43 度、垂直視角約 32 度。

##### 2. 眼動程序撰寫軟體—Tobii Pro Lab

本研究使用 Tobii Pro Lab 的應用軟體來播放微分範例，並同時紀錄受試者在閱讀過程中的眼球移動歷程，以及後續的眼球移動資料分析。

### 三、研究流程

本研究針對個別參與者進行資料的收集，研究的流程包將含前測、閱讀範例、後測三個主要階段，整個研究流程大約為 1.5 小時，以下分別說明：

#### (一) 前測

參與者填答中文版數學焦慮量表與微分測驗前測，以分別測量受試者的數學焦慮及微分的解題能力。

## (二) 範例閱讀

在正式閱讀範例之前，每位參與者會先進行眼動儀之九點校正，待校正完成後再開始進範例的閱讀。每位參與者係透過電腦螢幕來閱讀微分的範例，「乘積法則」、「連鎖律」與「除法法則」三題範例題是以隨機的順序呈現，以做為對抗平衡（counterbalancing）的設計。每題的閱讀時間沒有限制，參與者可自行控制閱讀的時間；參與者在閱讀完一題範例之後，按任意鍵會先進入空白頁，以讓參與者稍作休息，也避免參與者因按鍵時用力過大而直接跳過該閱讀的範例；待參與者準備好之後，再按一次任意鍵即可進入下一題的頁面。本研究採用 Tobii Fision 250 搭配 Tobii Pro Lab 來全程紀錄參與者閱讀範例的眼球移動歷程，以進行後續的眼動資料分析。

## (三) 後測

參與者將填答微分測驗後測，用以分析參與者閱讀範例後與閱讀範例前的成績是否會有差異，以瞭解參與者閱讀範例的成效。此外，在後測結束後，研究者也會請參與者回顧其閱讀範例的歷程，並請其分享閱讀的策略與心得，以藉由其口語的資料來進一步瞭解其閱讀範例的歷程。

## 四、資料分析

針對研究問題一，為了瞭解不同數學焦慮程度的學生的先備知識以及在閱讀微分範例後的學習成效，本研究根據參與者在 MARS-R 量表所得的總分，先將其分成高、中、低三個分數的組別（每個組別皆包含 20 名參與者），再取其中的高、低分兩組來進行獨立樣本 t 檢定，檢驗兩組的前測成績是否具有差異，以瞭解不同焦慮程度的學生的先備知識是否有不同；接著再進行單因子共變異數分析（ANCOVA），藉由控制兩組學生的前測成績，來檢驗兩組的後測成績是否有差異，即檢驗不同焦慮程度的學生在學習成效上是否有不同。

針對研究問題二，本研究在眼動資料的分析方面，先針對每一題微分範例的頁面，定義與劃分興趣區（如圖 6 所示），每題範例皆包含三大區域：題目、公式、解題過程，本研究將此三大區域細分為以下九個興趣區域：題目一行（如圖 6 左欄最上方）、微分基本公式三行（如圖 6 左欄下方）與解題過程五行（如圖 6 右欄），各區域的名稱如表 1。針對每個興趣區域，本研究計算三種眼動指標，包含總凝視時間（TFD）、總凝視次數（TFC）、平均凝視時間（AFD）。為了瞭解學生的數學焦慮程度與其閱讀微分範例之眼球移動狀況之間的關聯，本研究使用斯皮爾曼等級相關分析（Spearman's correlation），以參與者在 MARS-R 量表的總分和在各微分範例興趣區的眼動指標數值（即 TFD、TFC 和 AFD），進行相關性的檢驗。

針對研究問題三，本研究使用單因子共變數分析 ANCOVA 來檢驗不同焦慮程度的參與者在閱讀範例過程中眼球凝視狀況的差異，即以參與者的數學焦慮為獨變項（分高、低數學焦慮兩組）、前測成績為共變項，以及其在各範例之興趣區的眼動指標數值為依變項，

在排除前測成績的影響下，檢驗高、低焦慮組參與者在閱讀微分範例時的眼動行為是否有差異。

圖 6

範例題之九個興趣區域

<p>&lt;例&gt; 設 <math>p(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}</math>，試求 <math>p'(x)</math>。</p>	<p>題目 &lt;解&gt; 由乘積法則可得</p>	<p>解題過程</p>
<p>(1) 乘積法則 (The Product Rule) : 公式</p> <p>(2) 若 <math>f(x)</math> 與 <math>g(x)</math> 皆對 <math>x</math> 可微，則</p> <p>(3) <math>\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = g(x)f'(x) + f(x)g'(x)</math></p>	$p'(x) = (x-2)^{\frac{1}{3}} \frac{d}{dx} [x^{\frac{2}{3}}] + x^{\frac{2}{3}} \frac{d}{dx} [(x-2)^{\frac{1}{3}}] \quad (1)$	<p>(1)</p>
	$= (x-2)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{3} (x-2)^{-\frac{2}{3}} \quad (2)$	<p>(2)</p>
	$= 2 \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{1}{3}} (x-2)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} x^{\frac{2}{3}} (x-2)^{-\frac{2}{3}} \quad (3)$	<p>(3)</p>
	$= \frac{1}{3} x^{\frac{2}{3}} (x-2)^{-\frac{2}{3}} [2x^{-1}(x-2) + 1] \quad (4)$	<p>(4)</p>
	$= \frac{1}{3} x^{\frac{2}{3}} (x-2)^{-\frac{2}{3}} (3 - 4x^{-1}) \quad (5)$	<p>(5)</p>

## 肆、研究結果

### 一、不同數學焦慮程度的學生閱讀微分範例的成效

#### (一) 高、低數學焦慮組的先備知識

因沒有單一客觀的指標可用來鑑衡學生之數學焦慮程度為高或低 (Dowker et al., 2016)，為針對不同焦慮程度的參與者進行後續的分析，本研究參考 Dowker 等人 (2016) 的建議，採用參與者在數學焦慮問卷之得分的相對分數高低，將其區分為高焦慮組與低焦慮組；亦即，本研究將數學焦慮分數前 33% 之參與者分配至低數學焦慮組 (MARS-R 總分低於 38 分； $M = 30.90, SD = 6.16$ )，將後 33% 之參與者分配至高數學焦慮組 (MARS-R 總分高於 48 分； $M = 56.50, SD = 7.81$ )，兩組皆各為 20 人，隨後使用獨立樣本  $t$  檢定來分別檢驗兩組學生的前測成績是否有差異，並以 Cohen's  $d$  (Cohen, 1988) 計算效果量。統計結果顯示，不同焦慮程度在前測成績上具有顯著差異，且兩組間的差異呈現中效果量， $t(38) = 2.42, p = .020, d = 0.78$ ，高焦慮組的前測成績 ( $M = 2.10, SD = 2.22$ ) 顯著低於低焦慮組的前測成績 ( $M = 3.85, SD = 2.35$ )，統計結果如表 2。

表 2  
高、低數學焦慮組在前測上之  $t$  檢定

變項	高焦慮 ( $N = 20$ )		低焦慮 ( $N = 20$ )		$t$	$p$	$d$
	$M$	( $SD$ )	$M$	( $SD$ )			
前測成績	2.10	(2.22)	3.85	(2.35)	2.42	.020	0.78

## (二) 高、低數學焦慮組閱讀範例後的成效

本研究使用單因子共變數分析 (ANCOVA) 來檢驗兩組學生在控制前測成績後，其後測成績是否有差異。迴歸斜率的同質性考驗之結果顯示，前測與組別의 交互作用不顯著 ( $p = .516$ )，符合迴歸係數同質性假設。統計結果則顯示 (如表 3)，在控制前測成績後，高數學焦慮組的調整後測成績 ( $M = 4.23, SE = 0.38$ ) 與低焦慮組的調整後測成績 ( $M = 4.42, SE = 0.38$ ) 沒有顯著差異，兩組間的差異呈現小效果量 (Cohen, 1988)， $F(1, 38) = 0.11, p = .416, \eta_p^2 = .003$ ；此結果表示，高、低焦慮組的學生在閱讀例題之後，兩組學生的進步幅度沒有顯著不同。

表 3  
高、低數學焦慮組之後測成績的共變異數分析結果

組別	前測		原始後測		調整後測		$F$	$p$	$\eta_p^2$
	$M$	( $SD$ )	$M$	( $SD$ )	$M$	( $SE$ )			
低焦慮組 ( $N = 20$ )	3.85	(2.35)	4.75	(1.48)	4.42	(0.38)	0.11	.416	.003
高焦慮組 ( $N = 20$ )	2.10	(2.22)	3.90	(2.10)	4.23	(0.38)			

## 二、參與者的數學焦慮與閱讀範例時各眼動指標的相關性

本研究將解題範例分為題目 (一行)、微分基本公式 (三行) 與解題過程 (五行)，共九個興趣區域，並使用斯皮爾曼相關分析來檢驗參與者在閱讀三題微分範例時，其數學焦慮與各興趣區域的總凝視時間、總凝視次數及平均凝視時間是否有顯著相關。

分析結果顯示 (詳見表 4)，在閱讀「乘積法則」的範例時，參與者的數學焦慮與公式第二行之總凝視時間， $r(60) = .35, p = .006$ 、公式第二行之總凝視次數， $r(60) = .29, p = .025$ 、公式第二行之平均凝視時間， $r(60) = .38, p = .003$ 、公式第三行之總凝視時間， $r(60) = .38, p = .003$ 、公式第三行之總凝視次數， $r(60) = .41, p = .001$ ，皆有顯著正相關。

在閱讀「連鎖律」範例的過程中，參與者的數學焦慮與解題過程第一行之總凝視時間， $r(60) = .32, p = .012$ 、解題過程第一行之總凝視次數， $r(60) = .29, p = .024$ 、解題過程第一行之平均凝視時間， $r(60) = .29, p = .024$ 、公式第二行之平均凝視時間， $r(60) = .27, p = .037$ ，皆有顯著正相關。

而在閱讀「除法法則」的範例歷程中，參與者的數學焦慮僅與解題過程第三行之總凝視次數有顯著負相關， $r(60) = -.29, p = .026$ ，其餘區域皆無顯著相關。

表 4

數學焦慮與各範例題興趣區中的眼動指標之相關分析結果 ( $N = 60$ )

眼動 指標	題目	公式(1)	公式(2)	公式(3)	解題 過程(1)	解題 過程(2)	解題 過程(3)	解題 過程(4)	解題 過程(5)
E1									
TFD	.12	.06	.35**	.38**	.04	-.19	-.16	-.20	-.12
TFC	.10	.00	.29*	.41**	.03	-.20	-.17	-.18	-.07
AFD	.13	.05	.38**	.11	.09	-.12	.02	-.24	.02
E2									
TFD	.12	.13	.19	.25	.32*	.17	-.03	-.03	.24
TFC	.17	.12	.16	.25	.29*	.17	-.03	-.07	.16
AFD	.02	.12	.27*	.25	.29*	.08	.15	.25	.24
E3									
TFD	.00	.02	.07	.15	.13	.04	-.10	.02	-.22
TFC	.04	-.02	.01	-.08	-.07	-.22	-.29*	-.16	-.08
AFD	.10	-.00	.05	.12	.11	-.04	-.09	-.11	-.15

註：E1、E2、E3 分別代表乘積法則、連鎖律、除法法則三道微分範例。

\* $p < .05$ . \*\*  $p < .01$ .

### 三、高、低數學焦慮組閱讀範例時在各眼動指標的差異

本研究以高低數學焦慮分組作為獨變項，以三道範例題的九個興趣區域的總凝視時間、總凝視次數與平均凝視時間作為依變項，以前測成績作為共變項來排除因先備知識不同造成的眼動數據差異，並確定「組別×前測」的交互作用效果未達顯著水準，符合組內迴歸係數同質性假設，則進行單因子共變數分析 (ANCOVA)；若「組別×前測」的交互作用效果達顯著水準，則表示兩者有交互作用，不符合組內迴歸係數同質性假設，則改為使用詹森－內曼法 (Johnson-Neyman) 進行分析，以瞭解在控制前測成績之後，高、低數學焦慮者閱讀各區的眼動指標數值是否有顯著差異。

統計結果顯示 (詳見表 5)，在「乘積法則」範例中，閱讀公式第二行時，高數學焦慮組的平均凝視時間 ( $M = 203.85, SD = 42.82$ ) 顯著高於低數學焦慮組的平均凝視時間 ( $M = 151.05, SD = 66.34$ )，兩組間的差異呈現中效果量 (Cohen, 1988)， $F(1, 37) = 5.23, p = .028, \eta_p^2 = .124$ ；在閱讀解題過程第四行時，高數學焦慮組的平均凝視時間 ( $M = 141.35, SD = 104.63$ ) 顯著高於低數學焦慮組的平均凝視時間 ( $M = 220.75, SD = 103.20$ )，兩組間的差異呈現中效果量 (Cohen, 1988)， $F(1, 37) = 4.86, p = .034, \eta_p^2 = .116$ 。而使用詹森－內曼法進行共變數分析的結果發現，在閱讀「乘積法則」公式第三行時，當前測成績小於 4.39 分時，高數學焦慮組的總凝視時間 ( $M = 6118.40, SD = 4108.22$ ) 顯著高於低焦慮組的總凝視時間 ( $M = 2310.05, SD = 1807.42$ )，但是當前測成績大於 4.39 分時，兩組並沒有顯著差異；而在閱讀「乘積法則」公式第三行時，當前測成績小於 4.24 分時，高數學焦慮組的總凝視次數 ( $M = 26.75, SD = 18.51$ ) 顯著高於低焦慮組的總凝視次數 ( $M = 10.00, SD = 6.08$ )，但是當前測成績大於 4.24

分時，兩組並沒有顯著差異。其餘興趣區的眼動指標（「乘積法則」公式第一行的總凝視時間、「乘積法則」公式第一行的總凝視次數）皆無顯著差異。

表 5

高、低數學焦慮組在「乘積法則」範例中各眼動指標之 ANCOVA 結果

眼動指標 <sup>註1</sup>	高焦慮 (N = 20)		低焦慮 (N = 20)		F	p	$\eta_p^2$	顯著差異狀況 <sup>註2</sup>
	M	(SD)	M	(SD)				
題目								
TFD	6586.05	(3581.49)	5225.85	(3748.23)	0.16	.685	.004	無
TFC	27.60	(15.03)	22.75	(14.62)	0.05	.825	.001	無
AFD	227.65	(64.00)	216.75	(44.06)	0.53	.470	.014	無
公式(1)								
TFD	1000.60	(1041.45)	562.80	(464.58)	改用詹森－內曼法			無
TFC	5.00	(4.66)	3.10	(2.02)	改用詹森－內曼法			無
AFD	167.10	(69.63)	149.15	(73.21)	1.44	.237	.038	無
公式(2)								
TFD	1394.00	(881.76)	785.15	(941.55)	3.71	.062	.091	無
TFC	6.75	(3.71)	4.40	(4.50)	2.63	.113	.066	無
AFD	203.85	(42.82)	151.05	(66.34)	5.23	.028*	.124	高 > 低
公式(3)								
TFD	6118.40	(4108.22)	2310.05	(1807.42)	改用詹森－內曼法			高 > 低 <sup>註3</sup>
TFC	26.75	(18.51)	10.00	(6.08)	改用詹森－內曼法			高 > 低 <sup>註4</sup>
AFD	223.90	(39.65)	195.95	(82.07)	0.81	.375	.021	無
解題過程(1)								
TFD	7441.30	(6519.90)	5622.90	(4038.48)	0.09	.762	.003	無
TFC	32.65	(32.54)	24.95	(18.45)	0.03	.865	.001	無
AFD	224.15	(42.08)	224.65	(56.48)	0.00	.968	.000	無
解題過程(2)								
TFD	5374.60	(5866.47)	7290.45	(6511.79)	1.45	.236	.038	無
TFC	23.20	(24.47)	32.40	(28.09)	2.37	.132	.060	無
AFD	202.30	(77.32)	224.85	(70.47)	0.33	.567	.009	無
解題過程(3)								
TFD	8954.15	(19896.47)	8968.75	(12940.74)	0.08	.777	.002	無
TFC	35.00	(75.22)	38.05	(51.88)	0.21	.653	.006	無
AFD	188.30	(105.22)	197.40	(81.51)	0.05	.821	.001	無
解題過程(4)								
TFD	12277.80	(31469.66)	7242.55	(12201.61)	0.05	.828	.001	無
TFC	47.45	(113.16)	31.45	(53.37)	0.02	.901	.000	無
AFD	141.35	(104.63)	220.75	(103.20)	4.86	.034*	.116	高 > 低
解題過程(5)								
TFD	2278.00	(3492.07)	2284.25	(3382.01)	0.48	.491	.013	無
TFC	10.65	(15.38)	10.00	(14.75)	0.24	.626	.006	無
AFD	192.95	(72.96)	204.40	(100.48)	0.85	.363	.022	無

註：

1. TFD : Total Fixation Duration (單位：毫秒)、TFC : Total Fixation Counts (單位：次)、AFD : Average Fixation Duration (單位：毫秒)

2. 高：高數學焦慮組；低：低數學焦慮組

3. 前測小於 4.39 分時，高 > 低

4. 前測小於 4.24 分時，高 > 低

\* $p < .05$ . \*\* $p < .01$ . \*\*\* $p < .001$ .

此外，在「連鎖律」範例中，在閱讀第一行解題過程時，高數學焦慮組的平均凝視時間 ( $M = 223.25, SD = 39.71$ ) 顯著高於低數學焦慮組的平均凝視時間 ( $M = 185.40, SD = 46.53$ )，兩組間的差異呈現大效果量 (Cohen, 1988)， $F(1, 37) = 7.68, p = .009, \eta_p^2 = .172$ 。在使用詹森－內曼法進行共變數分析的部分，則皆無顯著差異，統計結果如表 6。

表 6

高、低數學焦慮組在「連鎖律」範例中各眼動指標之 ANCOVA 結果

眼動指標 <sup>註1</sup>	高焦慮 ( $N = 20$ )		低焦慮 ( $N = 20$ )		$F$	$p$	$\eta_p^2$	顯著差異狀況 <sup>註2</sup>
	$M$	( $SD$ )	$M$	( $SD$ )				
題目								
TFD	5165.85	(3982.26)	4196.15	(4562.14)	0.01	.939	.000	無
TFC	22.75	(14.58)	18.45	(20.66)	0.01	.913	.000	無
AFD	215.95	(33.97)	218.3	(83.84)	改用詹森－內曼法			無
公式(1)								
TFD	829.00	(716.04)	592.00	(488.40)	0.78	.384	.021	無
TFC	4.25	(3.54)	3.40	(2.80)	0.10	.756	.003	無
AFD	161.35	(79.05)	147.65	(73.77)	0.01	.912	.000	無
公式(2)								
TFD	3878.60	(4018.48)	1938.10	(1978.49)	改用詹森－內曼法			無
TFC	18.75	(17.26)	11.25	(12.46)	0.24	.627	.006	無
AFD	199.60	(39.65)	158.40	(80.19)	3.47	.070	.086	無
公式(3)								
TFD	8921.25	(8046.93)	3781.75	(4741.08)	改用詹森－內曼法			無
TFC	34.05	(31.45)	17.55	(22.67)	改用詹森－內曼法			無
AFD	241.20	(84.08)	179.05	(77.30)	3.65	.064	.090	無
解題過程(1)								
TFD	6375.90	(4622.00)	3244.05	(4344.84)	1.73	.197	.045	無
TFC	27.80	(19.94)	15.90	(18.95)	0.89	.352	.023	無
AFD	223.25	(39.71)	185.40	(46.53)	7.68	.009**	.172	高 > 低
解題過程(2)								
TFD	8637.95	(8968.89)	4770.45	(3607.11)	0.65	.424	.017	無
TFC	35.70	(37.06)	20.90	(16.29)	0.43	.519	.011	無
AFD	241.05	(31.66)	218.35	(59.56)	1.75	.194	.045	無
解題過程(3)								
TFD	5194.08	(5324.86)	7093.00	(12204.92)	0.92	.343	.024	無
TFC	21.50	(22.60)	26.00	(35.46)	1.31	.261	.034	無
AFD	245.15	(57.22)	252.80	(82.83)	0.01	.942	.000	無
解題過程(4)								
TFD	2746.00	(2632.05)	3524.95	(3712.04)	1.02	.318	.027	無
TFC	12.40	(11.38)	17.00	(17.72)	1.66	.206	.043	無
AFD	221.05	(46.70)	206.50	(45.34)	2.33	.135	.059	無
解題過程(5)								
TFD	1921.20	(1253.36)	1400.85	(1176.82)	0.80	.377	.021	無
TFC	7.85	(5.21)	6.60	(5.46)	0.09	.769	.002	無
AFD	248.60	(67.07)	210.50	(49.57)	3.79	.059	.093	無

註：

1. TFD：Total Fixation Duration (單位：毫秒)、TFC：Total Fixation Counts (單位：次)、AFD：Average Fixation Duration (單位：毫秒)

2. 高：高數學焦慮組；低：低數學焦慮組

\* $p < .05$ . \*\* $p < .01$ . \*\*\* $p < .001$ .

最後，在「除法法則」範例中，在閱讀第二行解題過程時，低數學焦慮組的總凝視次數 ( $M = 16.25, SD = 12.11$ ) 顯著高於高數學焦慮組的總凝視次數 ( $M = 9.45, SD = 7.10$ )，兩組間的差異呈現中效果量 (Cohen, 1988)， $F(1, 37) = 5.58, p = .024, \eta_p^2 = .131$ ；在閱讀第三行解題過程時，低數學焦慮組的總凝視次數 ( $M = 9.90, SD = 7.44$ ) 顯著高於高數學焦慮組的總凝視次數 ( $M = 5.55, SD = 5.87$ )，兩組間的差異呈現中效果量 (Cohen, 1988)， $F(1, 37) = 5.91, p = .020, \eta_p^2 = .138$ ；其餘區域皆無顯著差異，統計結果如表 7。

表 7

高、低數學焦慮組在「除法法則」範例中各眼動指標之 ANCOVA 結果

眼動指標 <sup>註1</sup>	高焦慮 ( $N = 20$ )		低焦慮 ( $N = 20$ )		$F$	$p$	$\eta_p^2$	顯著差異狀況 <sup>註2</sup>
	$M$	( $SD$ )	$M$	( $SD$ )				
題目								
TFD	5188.95	(4331.31)	4508.05	(3340.52)	0.25	.620	.007	無
TFC	22.85	(16.35)	23.45	(17.25)	0.11	.745	.003	無
AFD	246.40	(58.94)	240.85	(71.29)	0.04	.836	.001	無
公式(1)								
TFD	989.60	(1130.49)	717.35	(631.01)	0.20	.658	.005	無
TFC	4.25	(3.06)	4.80	(3.97)	0.02	.882	.001	無
AFD	170.55	(75.27)	183.20	(72.46)	1.21	.279	.032	無
公式(2)								
TFD	2465.20	(2618.24)	1672.50	(1849.40)	0.99	.325	.026	無
TFC	13.15	(14.19)	10.70	(8.54)	改用詹森－內曼法			無
AFD	176.65	(64.72)	179.05	(59.29)	0.10	.748	.003	無
公式(3)								
TFD	9853.05	(7917.86)	6053.65	(5810.44)	改用詹森－內曼法			無
TFC	41.00	(33.32)	39.75	(25.97)	0.49	.487	.013	無
AFD	235.20	(44.40)	213.80	(45.26)	2.95	.094	.074	無
解題過程(1)								
TFD	7080.15	(5831.35)	4636.10	(3185.76)	0.45	.505	.012	無
TFC	23.55	(19.48)	28.25	(16.24)	0.01	.932	.000	無
AFD	228.95	(49.19)	219.90	(32.75)	0.00	.984	.000	無
解題過程(2)								
TFD	3091.75	(2971.74)	2457.00	(1906.46)	0.00	.965	.000	無
TFC	9.45	(7.10)	16.25	(12.11)	5.58	.024*	.131	高 < 低
AFD	200.00	(57.39)	213.75	(34.85)	0.99	.325	.026	無
解題過程(3)								
TFD	1381.85	(1430.79)	1372.55	(999.23)	0.48	.492	.013	無
TFC	5.55	(5.87)	9.90	(7.44)	5.91	.020*	.138	高 < 低
AFD	181.20	(73.46)	208.20	(80.58)	0.49	.485	.013	無
解題過程(4)								
TFD	981.80	(664.36)	994.80	(1191.05)	0.18	.678	.005	無
TFC	4.25	(3.91)	6.90	(5.36)	3.62	.065	.089	無
AFD	200.30	(91.34)	238.55	(70.53)	0.74	.395	.020	無
解題過程(5)								
TFD	736.20	(904.58)	1087.95	(1093.64)	2.08	.158	.053	無
TFC	3.25	(2.88)	5.35	(5.17)	改用詹森－內曼法			無
AFD	216.80	(129.85)	265.80	(121.18)	0.20	.654	.005	無

註：

1. TFD: Total Fixation Duration (單位: 毫秒)、TFC: Total Fixation Counts (單位: 次)、AFD: Average Fixation Duration (單位: 毫秒)

2. 高: 高數學焦慮組; 低: 低數學焦慮組

\* $p < .05$ . \*\* $p < .01$ . \*\*\* $p < .001$ .

## 伍、討論與建議

本研究使用眼球追蹤技術來探討學生的數學焦慮程度與其閱讀微分範例之間的關聯，除了分析閱讀微分範例對於解題成效的影響之外，本研究更針對高、低數學焦慮程度的學生，探討其在閱讀微分範例時的差異。

### 一、高、低數學焦慮學生閱讀範例後的成效

針對數學焦慮與數學成績間的關係，本研究發現高、低數學焦慮組的參與者在前測成績上有顯著差異，且高數學焦慮組的前測成績顯著低於低數學焦慮組，表示學生的數學焦慮與其先備知識的程度有密切的關聯，此結果與多數先前研究相符，即數學焦慮程度與學生的數學成績有顯著的負相關（Barroso et al., 2021; Zhang et al., 2019）。然而，根據共變異數分析的結果，在控制前測成績之後，高、低數學焦慮組的後測成績卻沒有顯著差異，表示閱讀範例雖可提升兩組的後測成績，但兩組的進步幅度之間並沒有顯著差異，此結果乍看之下與注意力控制理論（Eysenck et al., 2007）的假設不符，但卻符合專業知識反轉效應（Kalyuga et al., 2003）所預期的現象。首先，根據專業知識反轉效應的假設，前測成績較低的參與者對相關微分公式的理解程度與解題技巧較差，故詳盡的範例可發揮鷹架的功能，在不增加其認知負荷的狀況下，協助前測成績較低的參與者對相關微分公式建構更穩固的理解與解題策略，使其在後測成績有所提升。然而，對前測成績較高的參與者而言，因其對相關的微分公式已較為熟悉，故要求其再閱讀對應的微分範例可能只是協助其鞏固或應用所學，無法協助其針對該公式建構更進階、深入的理解。其次，根據注意力控制理論（Eysenck et al., 2007）的假設，較高的數學焦慮感可能會佔據較多可用的工作記憶資源，此可能導致數學焦慮程度較高的參與者無法有效控制與安排處理外界訊息的進程，進而影響其閱讀範例的理解狀況。然而，必須強調的是，注意力控制理論並非武斷地主張數學焦慮感會減低學習的成效，而僅主張學習者可能會因為焦慮感佔據可使用的工作記憶資源，從而減緩其處理訊息的「效率」；換句話說，只要給高數學焦慮的學習者充裕的時間，他們還是能運用有限的工作記憶容量來逐步處理所有的訊息、達成自己學習的目標，只是其所需要的時間較低數學焦慮者較長而已。

因此，綜合注意力控制理論與專業知識反轉效應兩者來看，高數學焦慮者雖然前測的成績較低，且可能會因為較高的焦慮感而佔據其工作記憶的資源，但只要提供符合其程度的範例閱讀素材以及充裕的時間，高數學焦慮者還是可能透過閱讀範例而提升其對相關微分知識的理解，使其在後測成績上有較大幅度的進步。相對的，低數學焦慮者雖然不會因焦慮感而限縮其可使用的工作記憶資源，但若所提供的閱讀範例對其而言屬於較基本且簡單的內容，對其不具挑戰性，其可能無法從閱讀範例的過程中深化自己對相關微分知識的進一步理解，使其在後測的進步幅度較為有限。

## 二、數學焦慮與眼動指標的相關性

而上述結合注意力控制理論與專業知識反轉效應的觀點，在本研究分析數學焦慮程度與閱讀微分範例之眼動狀況間的關係時，獲得進一步確認；亦即，高數學焦慮的參與者，可能需要花費較多的時間來處理微分範例所提供的訊息，才能理解範例的內容。本研究的結果指出，參與者在閱讀微分範例時，其數學焦慮程度與部分興趣區的眼動指標之間具有顯著的關聯性。例如，在「乘積法則」的範例中，數學焦慮除了與「公式成立的前提」的總凝視時間、總凝視次數和平均凝視時間有顯著正相關之外，也與「公式的內容」的總凝視時間和總凝視次數、「解題過程中化簡的過程」的平均凝視時間有顯著正相關。而在閱讀「連鎖律」的範例時，數學焦慮程度則與「解題過程中微分的過程」的總凝視時間、總凝視次數和平均凝視時間有顯著正相關，也與「公式成立的前提」的平均凝視時間有顯著正相關。以上這些結果均指出，數學焦慮程度越較高的參與者，可能投注越多的凝視時間和凝視次數在特定的興趣區上，此乃因其數學焦慮感佔據其有限的工作記憶資源，使其需要使用較長的時間和較多的認知資源來處理對應的訊息。相較之下，數學焦慮程度越低的參與者，並不會被數學焦慮感佔據太多工作記憶資源，且對於相關範例的內容較為熟悉，所以雖然投注的凝視時間和次數都相對較少，也能對範例內容進行有效率的處理。

然而，在閱讀「除法法則」的範例時，數學焦慮與「解題過程」的總凝視次數有顯著負相關，代表數學焦慮程度越低，總凝視次數越高，此一發現與 Hunt 等人（2015）發現數學焦慮與許多眼動指標呈正相關的結果有所不同，此處或許可藉由參與者自述的範例閱讀歷程來加以解釋。根據參與者在資料收集後的口頭分享，有 9 位低數學焦慮組的學生表示自己不熟悉「除法法則」的公式，且習慣運用乘積法則來進行「 $f(x)/g(x)$ 」類型函數的微分運算，以 R11 的敘述為例：「我做這種題目通常不是用這個（除法法則），所以我可能會想一下，就是我會因為我一般不會這樣寫，就是我會把這邊（指分母部分的函數）變成 $-1$ ，變乘法來做。」換言之，對於不熟悉「除法法則」之低數學焦慮的參與者，他們可能需要投注額外的心力來進行「除法法則」和「乘積法則」之間的轉換，才能充分理解除法法則之公式和其對應的解題的過程。而這些低焦慮組學生的分享，恰符合專業知識反轉效應的假設（Kalyuga et al., 2003），亦即，這些低焦慮組的參與者，雖然已經理解乘積法則的公式，並建構出以乘積法則為基礎的解題步驟，但當其面臨不熟悉的除法法則範例時，需要耗費額外的工作記憶資源來將其轉換為乘積法則，導致其在閱讀時需要投注更多的視覺注意力資源才能完成相關的訊息處理，例如閱讀較多次除法法則範例中的解題過程。然而，究竟為何高、低數學焦慮的參與者在不同的範例時會展現出不同的眼球凝視行為，需要未來更進一步的研究。

## 三、高、低數學焦慮學生在閱讀範例時的眼球凝視狀況

基於相關性分析的結果，若進一步將參與者既有的微分知識程度納入考量，則可更深入分析數學焦慮程度與範例閱讀之間的關聯。也因此，透過共變異數分析，本研究發現，

在控制前測成績的影響後，高、低數學焦慮的學生雖然在絕大多數興趣區的凝視狀況並沒有顯著的差異，但高數學焦慮組的學生在閱讀某些範例的特定興趣區時，仍呈現較長的總凝視時間、較多凝視次數或較長的平均凝視時間，此結果顯示高數學焦慮的學生對這些興趣區的內容感到較為困難或複雜，所以需要投注更多的認知資源來處理對應的訊息。此外，本研究之共變異數分析的結果，也顯示以下三項重要的訊息。首先，高、低數學焦慮參與者在閱讀範例時，其眼動指標呈現顯著差異的數量，相較於相關分析時呈現顯著相關性的數量，較為減少；例如，參與者在閱讀「乘積法則」之「公式成立前提」時，其焦慮程度和總凝視時間、總凝視次數之間有顯著的正相關，但這兩個相關性，在共變異數分析的結果中並未呈現。由此可知，焦慮程度和範例閱讀之間的關聯，可能會受到學習者既有的知識程度影響。第二，藉由共變異數分析的過程，本研究發現參與者閱讀範例時的眼球凝視情形，可能會受其既有知識程度和焦慮程度兩因素之交互作用所影響；當上述兩者的交互作用顯著時，藉由詹森－內曼法的分析可知，僅有前測成績低於特定值的參與者，其對範例內容的凝視狀況才會受到焦慮程度的影響，而且皆是高焦慮組的參與者所投注的凝視時間和次數大於低焦慮組的學生。詹森－內曼法的分析結果，也符合前述注意力控制理論的假設，即焦慮程度較高的學習者，需要更長的時間來處理相關範例內容的訊息。第三，本研究分析的結果顯示，焦慮程度和範例閱讀之間的關聯性，在三個微分範例所呈現的狀況皆不相同。在閱讀「乘積法則」和「連鎖律」時，高數學焦慮者在與閱讀公式或解題過程時的平均凝視時間顯著高於低數學焦慮者，此結果對應到了注意力控制理論的假設。然而，在閱讀「除法法則」時，焦慮程度和其展現的凝視行為間的關係，不僅最為薄弱，且其關係還與注意力控制理論所假設的趨勢不同，即低數學焦慮者在閱讀解題過程時，較高數學焦慮者呈現出更多的凝視次數。此處亦可對應到前述對低數學焦慮學生口頭分享所進行的分析，即低數學焦慮者需要在閱讀時需要投注額外的工作記憶資源與視覺注意力資源，以理解自身較不熟悉的除法法則範例。此部分的結果，跟林宓雯與吳昭容（2016）的發現類似，即參與者的眼球運動模式，會隨著閱讀範例的題型不同而有所差異，且本研究的結果進一步指出，參與者既有的知識和焦慮程度，可能和其採用不同的眼球運動模式來閱讀不同題型的範例有關。

#### 四、對未來教學與研究的建議

綜合來看，根據上述的研究結果，本研究對於微積分教學與未來研究，可提供諸多建議。在微積分教學方面，本研究的結果指出高數學焦慮的學生傾向在微分公式投注較多的凝視時間，顯示其在解讀微分公式時可能遭遇較大的困難，也因此，在微積分的教學過程中，宜引導學生充分瞭解相關公式的原理與意涵，如此，學生才能運用有限的工作記憶資源來更有效率地提取公式。此外，高數學焦慮的學生因為工作記憶資源被焦慮感佔據，使其可用來構思解題步驟與計算過程的工作記憶資源受限，也因此，在微分的範例設計方面，建議採用較簡單的函數或係數，以協助高數學焦慮的學生將認知資源運用在解題的思

路與步驟，而不是投注在繁瑣的計算過程中。而在未來研究方面，本研究的結果指出，數學焦慮程度的差異，也有可能是引發專業知識反轉效應的因素，因此未來研究可以探討相關情緒與認知因素之間的關聯或交互作用，以深入瞭解閱讀數學範例的歷程如何造成專業知識反轉效應。其次，本研究指出數學焦慮程度對於範例閱讀的影響，可能隨範例內容的複雜程度而改變，也因此，未來研究可深入探討不同數學焦慮程度的學生，是否會採取不同的策略來處理複雜的數學問題。最後，本研究僅採用與凝視有關的指標，藉由認知的觀點來探討數學焦慮和閱讀數學範例之間的關聯，建議未來研究可採用其他與情緒或情意相關的眼動指標，以從情緒的觀點來探討數學焦慮對數學學習歷程的影響。

## 誌謝

本研究感謝國家科學及技術委員會經費支持（研究計畫編號：NSTC 111-2410-H-003-012-MY3）。

## 參考文獻

- Skemp, R. R. (1995)。數學學習心理學（陳澤民，譯）。九章出版社。（原著出版於 1987 年）  
[Skemp, R. R. (1995). *The psychology of learning mathematics* (Chen, T.-M., Trans.). Chiuchang. (Original work published 1987) (In Chinese)]
- 吳昭容 (2019)。眼球追蹤技術在幾何教育的應用與限制。臺灣數學教育期刊，6 (2)，1–25。[Wu, C.-J. (2019). Applications and limitations of eye tracking in geometry education. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, 6(2), 1–25. (in Chinese)] [https://doi.org/10.6278/tjme.201910\\_6\(2\).001](https://doi.org/10.6278/tjme.201910_6(2).001)
- 林柏寬 (2023 年 12 月 13 日)。台灣學生把數學想得特別可怕？PISA 數學素養全球第 3、焦慮值卻超越平均。國立臺灣師範大學數學教育中心。[Lin, B.-K. (2023, December 13). *Do Taiwanese students find math particularly daunting? Ranked 3rd globally in PISA math literacy, yet their anxiety level exceeds the average*. Shi-Da Institute for Mathematics Education. (in Chinese)] <https://www.ime.ntnu.edu.tw/index.php/2023/12/15/2023-12-15/>
- 林棠雯、吳昭容 (2016)。從眼動型態探討閱讀幾何文本的視覺化與推理歷程。教育學刊，47，41–77。[Lin, T.-W., & Wu, C.-J. (2016). Using eye movements to explore visualization and reasoning during the reading of geometric text. *Educational Review*, 47, 41–77. (in Chinese)] <https://doi.org/10.3966/156335272016120047002>
- 涂金堂 (2011)。運用 [範例 (worked-out example)] 在國小數學問題解決的教學實驗研究。教育心理學報，43 (1)，25–49。[Tu, C.-T. (2011). An instructional experiment: Using worked-out examples in mathematics problem-solving of elementary school students. *Bulletin of Educational Psychology*, 43(1), 25–49. (in Chinese)] <https://doi.org/10.6251/BEP.20100414>

- 涂金堂 (2012)。應用認知負荷理論的數學解題教學實驗。屏東教育大學學報-教育類, 38, 227-255。[Tu, C.-T. (2012). The application of Cognitive Load Theory to mathematical problem-solving instruction. *Journal of Pingtung University of Education: Education*, 38, 227-255. (in Chinese)] <https://www.airitilibrary.com/Article/Detail?DocID=P20161013002-201203-201610200029-201610200029-227-255>
- 教育部統計處 (2024)。大專校院學生數。[Department of Statistics (2024). *Number of college students*. (in Chinese)] <https://reurl.cc/r3WyXb>
- 陳琪瑤、吳昭容 (2012)。幾何證明文本閱讀的眼動研究：圖文比重及圖示著色效果。教育實踐與研究, 25 (2), 35-66。[Chen, C.-Y., & Wu, C.-J. (2012). Eye movements during geometry proof reading: Text contrasting with figure and the colored effects. *Journal of Educational Practice and Research*, 25(2), 35-66. (in Chinese)] <https://doi.org/10.6776/JEPR.201212.0035>
- 陳學志、賴惠德、邱發忠 (2010)。眼球追蹤技術在學習與教育上的應用。教育科學研究期刊, 55 (4), 39-68。[Chen, H.-C., Lai, H.-D., & Chiu, F.-C. (2010). Eye tracking technology for learning and education. *Journal of Research in Education Sciences*, 55(4), 39-68. (in Chinese)] <http://www.AiritiLibrary.com/Publication/Index/2073753X-201012-201307090011-201307090011-39-68>
- 黃冠仁、陳福祥 (2006)。台灣地區大學生微積分學習態度的研究 (未出版碩士論文)。國立陽明交通大學。[Huang, G.-Z., & Tsen, F.-S. (2006). *A study on university students' attitude toward calculus learning in Taiwan* (Unpublished master's thesis). National Yang Ming Chiao Tung University. (in Chinese)] <https://ir.lib.nycu.edu.tw/handle/11536/78994>
- 劉湘川、白宗恩、鄭俊彥、黃玉臺、謝俊逸、陳建憲、蔡閔任、劉育隆 (2010)。微分基本公式之錯誤類型。測驗統計年刊, 18 (2), 35-49。[Liu, H.-C., Pai, T.-E., Cheng, C.-Y., Huang, Y.-T., Hsieh, C.-Y., Chen, J.-S., Tsai, H.-J., & Liu, Y.-L. (2010). The error type of basic differential formula. *Journal of Research on Measurement and Statistics*, 18(2), 35-49. (in Chinese)] <https://doi.org/10.6773/JRMS.201012.0035>
- 黎佩芬、賴建都 (2011)。網路重度使用者對網頁訊息認知與瀏覽模式之研究－以台灣購物網站商品訊息呈現為例。電子商務學報, 13 (3), 517-553。[Li, P.-F., & Lai, C.-T. (2011). Eye Tracking Study on the internet heavy users' cognitive processing of information and navigational patterns of online shopping websites in Taiwan. *Journal of E-Business*, 13(3), 517-553. (in Chinese)] [https://doi.org/10.6188/JEB.2011.13\(3\).02](https://doi.org/10.6188/JEB.2011.13(3).02)
- 簡郁芬、吳昭容 (2012)。以眼動型態和閱讀測驗表現探討箭頭在科學圖文閱讀中的圖示效果。中華心理學刊, 54 (3), 385-402。[Jian, Y.-C., & Wu, C., J. (2012). The effect of arrows in an illustration when reading scientific text: evidence from eye movements and reading tests. *Chinese Journal of Psychology*, 54(3), 385-402. (in Chinese)] <https://doi.org/10.6129/CJP.2012.5403.07>
- 魏傳昇 (2018)。微積分迷思概念之研究－以「微分的應用」為例。高等教育研究紀要, 8, 1-16。[Wei, C.-S. (2018). A study of students' misconception in calculus - Taking applications of differentiation as an example. *Memoirs of Higher Education Studies*, 8, 1-16. (in Chinese)]
- 魏麗敏 (1996)。國小學生學習動機、數學焦慮與數學成就之研究。國民教育研究集刊, 4, 133-155。[Wei, L.-M. (1996). Learning motivation, mathematics anxiety and mathematics achievement of primary school students. *Bulletin of Research on Elementary Education*, 4, 133-155. (in Chinese)] [https://doi.org/10.7038/BREE.199606\(4\).0006](https://doi.org/10.7038/BREE.199606(4).0006)

- Alemdag, E., & Cagiltay, K. (2018). A systematic review of eye tracking research on multimedia learning. *Computers & Education, 125*, 413–428. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2018.06.023>
- Andrá, C., Lindström, P., Arzarello, F., Holmqvist, K., Robutti, O., & Sabena, C. (2015). Reading mathematics representations: An eye-tracking study. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(2), 237–259. <https://doi.org/10.1007/s10763-013-9484-y>
- Ashcraft, M. H. (2002). Math anxiety: Personal, educational, and cognitive consequences. *Current Directions in Psychological Science, 11*(5), 181–185. <https://doi.org/10.1111/1467-8721.00196>
- Ashcraft, M. H., & Kirk, E. P. (2001). The relationships among working memory, math anxiety, and performance. *Journal of Experimental Psychology: General, 130*(2), 224–237. <https://doi.org/10.1037/0096-3445.130.2.224>
- Ashcraft, M. H., & Krause, J. A. (2007). Working memory, math performance, and math anxiety. *Psychonomic Bulletin & Review, 14*(2), 243–248. <https://doi.org/10.3758/BF03194059>
- Baloğlu, M., & Koçak, R. (2006). A multivariate investigation of the differences in mathematics anxiety. *Personality and Individual Differences, 40*(7), 1325–1335. <https://doi.org/10.1016/j.paid.2005.10.009>
- Barroso, C., Ganley, C. M., McGraw, A. L., Geer, E. A., Hart, S. A., & Daucourt, M. C. (2021). A meta-analysis of the relation between math anxiety and math achievement. *Psychological bulletin, 147*(2), 134–168. <https://doi.org/10.1037/bul0000307>
- Beilock, S. L., Gunderson, E. A., Ramirez, G., & Levine, S. C. (2010). Female teachers' math anxiety affects girls' math achievement. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 107*(5), 1860–1863. <https://doi.org/10.1073/pnas.0910967107>
- Betz, N. E. (1978). Prevalence, distribution, and correlates of math anxiety in college students. *Journal of Counseling Psychology, 25*(5), 441–448. <https://doi.org/10.1037/0022-0167.25.5.441>
- Ching, B. H.-H., Wu, H. X., & Chen, T. T. (2021). Maternal achievement-oriented psychological control: Implications for adolescent academic contingent self-esteem and mathematics anxiety. *International Journal of Behavioral Development, 45*(3), 193–203. <https://doi.org/10.1177/0165025420981638>
- Cipora, K., Szczygieł, M., Willmes, K., & Nuerk, H. C. (2015). Math anxiety assessment with the Abbreviated Math Anxiety Scale: Applicability and usefulness: Insights from the Polish adaptation. *Frontiers in Psychology, 6*, 1833. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.01833>
- Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences* (2nd ed.). Lawrence Erlbaum Associates.
- Cuder, A., Živković, M., Doz, E., Pellizzoni, S., & Passolunghi, M. C. (2023). The relationship between math anxiety and math performance: The moderating role of visuospatial working memory. *Journal of Experimental Child Psychology, 233*, 105688. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2023.105688>
- Dowker, A., Sarkar, A., & Looi, C. Y. (2016). Mathematics anxiety: What have we learned in 60 years? *Frontiers in Psychology, 7*, 508. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.00508>
- Durette, R. T. (2009). *Adult estimation, eye movements, and math anxiety* [Unpublished master's thesis]. University of Nevada, Las Vegas.
- Estonanto, A. J. J., & Dio, R. V. (2019). Factors causing mathematics anxiety of senior high school students in calculus. *Asian Journal of Education and E-Learning, 7*(1), 37–47. <https://doi.org/10.24203/ajeel.v7i1.5701>

- Eysenck, M. W., Derakshan, N., Santos, R., & Calvo, M. G. (2007). Anxiety and cognitive performance: Attentional control theory. *Emotion*, 7(2), 336–353. <https://doi.org/10.1037/1528-3542.7.2.336>
- Gruenwald, N., & Klymchuk, S. (2003). Using counter-examples in teaching calculus. *The New Zealand Mathematics Magazine*, 40(2), 33–41.
- Hendel, D. D., & Davis, S. O. (1978). Effectiveness of an intervention strategy for reducing mathematics anxiety. *Journal of Counseling Psychology*, 25(5), 429–434. <https://doi.org/10.1037/0022-0167.25.5.429>
- Huang, C. H. (2011). Investigating the attitudes toward calculus of engineering students in Taiwan. *World Transactions on Engineering and Technology Education*, 9(2), 80–85.
- Hunt, T. E., Clark-Carter, D., & Sheffield, D. (2015). Exploring the relationship between mathematics anxiety and performance: An eye-tracking approach. *Applied Cognitive Psychology*, 29(2), 226–231. <https://doi.org/10.1002/acp.3099>
- Hvelplund, K. T. (2014). Eye tracking and the translation process: Reflections on the analysis and interpretation of eye-tracking data. *MonTI Special Issue – Minding Translation*, 201–223. <https://doi.org/10.6035/MonTI.2014.ne1.6>
- Inglis, M., & Alcock, L. (2012). Expert and novice approaches to reading mathematical proofs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(4), 358–390. <https://doi.org/10.5951/jresematheduc.43.4.0358>
- Just, M. A., & Carpenter, P. A. (1976). Eye fixations and cognitive processes. *Cognitive Psychology*, 8(4), 441–480. [https://doi.org/10.1016/0010-0285\(76\)90015-3](https://doi.org/10.1016/0010-0285(76)90015-3)
- Just, M. A., & Carpenter, P. A. (1980). A theory of reading: From eye fixations to comprehension. *Psychological Review*, 87(4), 329–354. <https://doi.org/10.1037/0033-295X.87.4.329>
- Justice, L. M., Skibbe, L., Canning, A., & Lankford, C. (2005). Pre-schoolers, print and storybooks: An observational study using eye movement analysis. *Journal of Research in Reading*, 28(3), 229–243. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9817.2005.00267.x>
- Kadry, S., & El Shalkamy, M. (2012). Toward new vision in teaching calculus. *IERI Procedia*, 2, 548–553. <https://doi.org/10.1016/j.ieri.2012.06.132>
- Kalyuga, S. (2008). Relative effectiveness of animated and static diagrams: An effect of learner prior knowledge. *Computers in Human Behavior*, 24(3), 852–861. <https://doi.org/10.1016/j.chb.2007.02.018>
- Kalyuga, S., Ayres, P. L., Chandler, P., & Sweller, J. (2003). The expertise reversal effect. *Educational Psychologist*, 38(1), 23–31. [https://doi.org/10.1207/S15326985EP3801\\_4](https://doi.org/10.1207/S15326985EP3801_4)
- Kargar, M., Tarmizi, R. A., & Bayat, S. (2010). Relationship between mathematical thinking, mathematics anxiety and mathematics attitudes among university students. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 8, 537–542. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.12.074>
- Khasawneh, E., Gosling, C., & Williams, B. (2021). What impact does maths anxiety have on university students? *BMC Psychology*, 9, 37. <https://doi.org/10.1186/s40359-021-00537-2>
- Knoblich, G., Ohlsson, S., & Raney, G. E. (2001). An eye movement study of insight problem solving. *Memory & Cognition*, 29(7), 1000–1009. <https://doi.org/10.3758/BF03195762>
- Lai, M. L., Tsai, M. J., Yang, F. Y., Hsu, C. Y., Liu, T. C., Lee, S.W.-Y., Lee, M. H., Chiou, G. L., Liang, J. C., & Tsai, C. C. (2013). A review of using eye-tracking technology in exploring learning from 2000 to 2012. *Educational Research Review*, 10, 90–115. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2013.10.001>
- LeFevre, J. A., & Dixon, P. (1986). Do written instructions need examples? *Cognition and Instruction*, 3(1), 1–30. [https://doi.org/10.1207/s1532690xci0301\\_1](https://doi.org/10.1207/s1532690xci0301_1)

- Li, T., Quintero, M., Galvan, M., Shanafelt, S., Hasty, L. M., Spangler, D. P., Lyons, I. M., Mazzocco, M. M. M., Brockmole, J. R., Hart, S. A. & Wang, Z. (2023). The mediating role of attention in the association between math anxiety and math performance: An eye-tracking study. *Journal of Educational Psychology*, 115(2), 229–240. <https://doi.org/10.1037/edu0000759>
- Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. *The Journal of Mathematical Behavior*, 23(4), 405–427. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2004.09.003>
- Miller, D. (2010). Using a three-step method in a calculus class: Extending the worked example. *College Teaching*, 58(3), 99–104. <https://doi.org/10.1080/87567550903521249>
- Organization for Economic Cooperation and Development. (2023). *PISA 2022 results (Volume I): The state of learning and equity in education*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/53f23881-en>
- Panse, A., Alcock, L., & Inglis, M. (2018). Reading proofs for validation and comprehension: An expert-novice eye-movement study. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 4(3), 357–375. <https://doi.org/10.1007/s40753-018-0077-6>
- Perugini, M., & Banse, R. (2007). Personality, implicit self-concept and automaticity. *European Journal of Personality*, 21(3), 257–261. <https://doi.org/10.1002/per.637>
- Plake, B. S., & Parker, C. S. (1982). The development and validation of a revised version of the Mathematics Anxiety Rating Scale. *Educational and Psychological Measurement*, 42(2), 551–557. <https://doi.org/10.1177/001316448204200218>
- Ramirez, G., Chang, H., Maloney, E. A., Levine, S. C., & Beilock, S. L. (2016). On the relationship between math anxiety and math achievement in early elementary school: The role of problem solving strategies. *Journal of Experimental Child Psychology*, 141, 83–100. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2015.07.014>
- Rayner, K. (1998). Eye movements in reading and information processing: 20 years of research. *Psychological Bulletin*, 124(3), 372–422. <https://doi.org/10.1037/0033-2909.124.3.372>
- Renkl, A. (1999). Learning mathematics from worked-out examples: Analyzing and fostering self-explanations. *European Journal of Psychology of Education*, 14(4), 477–488. <https://doi.org/10.1007/BF03172974>
- Renkl, A. (2005). The worked-out-example principle in multimedia learning. In R. Mayer (Ed.), *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (pp. 229–246). Cambridge University Press. <https://psycnet.apa.org/doi/10.1017/CBO9780511816819.016>
- Richardson, F. C., & Suinn, R. M. (1972). The mathematics anxiety rating scale: Psychometric data. *Journal of Counseling Psychology*, 19(6), 551–554. <https://doi.org/10.1037/h0033456>
- Rounds, J. B., & Hendel, D. D. (1980). Measurement and dimensionality of mathematics anxiety. *Journal of Counseling Psychology*, 27(2), 138–149. <https://doi.org/10.1037/0022-0167.27.2.138>
- Schindler, M., & Lilienthal, A. J. (2019). Domain-specific interpretation of eye tracking data: Towards a refined use of the eye-mind hypothesis for the field of geometry. *Educational Studies in Mathematics*, 101(1), 123–139. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-9878-z>
- Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). *Journal of Education*, 196(2), 1–38. <https://doi.org/10.1177/002205741619600202>
- Schwonke, R., Renkl, A., Krieg, C., Wittwer, J., Alevén, V., & Salden, R. (2009). The worked-example effect: Not an artefact of lousy control conditions. *Computers in Human Behavior*, 25(2), 258–266. <https://doi.org/10.1016/j.chb.2008.12.011>

- Sevindir, H. K., Yazici, C., & Yazici, V. (2014). Mathematics anxiety: A case study for Kocaeli University. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 152, 637–641. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2014.09.255>
- Stewart, J., Clegg, D., & Watson, S. (2020). *Calculus : Early Transcendentals, 9/e (Metric Version)*. Cengage Learning.
- Strohmaier, A. R., MacKay, K. J., Obersteiner, A., & Reiss, K. M. (2020). Eye-tracking methodology in mathematics education research: A systematic literature review. *Educational Studies in Mathematics*, 104(2), 147–200. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-09948-1>
- Sweller, J. (1994). Cognitive load theory, learning difficulty, and instructional design. *Learning and Instruction*, 4(4), 295–312. [https://doi.org/10.1016/0959-4752\(94\)90003-5](https://doi.org/10.1016/0959-4752(94)90003-5)
- Sweller, J., & Cooper, G. A. (1985). The use of worked examples as a substitute for problem solving in learning algebra. *Cognition and Instruction*, 2(1), 59–89. [https://doi.org/10.1207/s1532690xci0201\\_3](https://doi.org/10.1207/s1532690xci0201_3)
- Sweller, J., van Merriënboer, J. J. G., & Paas, F. G. W. C. (1998). Cognitive architecture and instructional design. *Educational Psychology Review*, 10(3), 251–296. <https://doi.org/10.1023/A:1022193728205>
- Tall, D. (1993). Students' difficulties in calculus. In M. Artigue, & G. Eryvnyck (eds.), *Proceedings of Working Group 3 on Students Difficulties in Calculus, ICME-7, Québec 1992* (pp. 13–28.). Freie Universität Berlin.
- Tan, J. B., & Yates, S. (2011). Academic expectations as sources of stress in Asian students. *Social Psychology of Education*, 14(3), 389–407. <https://doi.org/10.1007/s11218-010-9146-7>
- Tang, S. T., & Dixon, J. (2002). Instrument translation and evaluation of equivalence and psychometric properties: The Chinese Sense of Coherence Scale. *Journal of Nursing Measurement*, 10(1), 59–76. <https://doi.org/10.1891/jnum.10.1.59.52544>
- The Advanced Placement Central. (2023). *AP Calculus AB: Scoring guidelines*. College Board. <https://apcentral.collegeboard.org/media/pdf/ap23-sg-calculus-ab.pdf>
- VanLehn, K. (1996). Cognitive skill acquisition. *Annual Review of Psychology*, 47, 513–539. <https://doi.org/10.1146/annurev.psych.47.1.513>
- Wu, C. H., Lin, W. T., & Shih, S. C. (2018). Confirmatory factor analysis and construct validity of the Chinese Math Anxiety Rating Scale-Revised for undergraduate calculus learners. *Psychological Testing*, 65(3), 291–313. <https://www.airitilibrary.com/Article/Detail?DocID=16094905-201809-201810160003-201810160003-291-313>
- Zhang, J., Zhao, N., & Kong, Q. P. (2019). The relationship between math anxiety and math performance: A meta-analytic investigation. *Frontiers in Psychology*, 10, 1613. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2019.01613>
- Zhao, F., Schnotz, W., Wagner, I., & Gaschler, R. (2014). Eye tracking indicators of reading approaches in text-picture comprehension. *Frontline Learning Research*, 2(5), 46–66. <http://doi.org/10.14786/flr.v2i4.98>

## 附錄：大專校院學生數

附表 1

113 學年各學科類別於博士班、碩士班、學士班、專科之學生數

單位：人

統計期	學科類別	總計	博士班	碩士班	學士班	專科
		計	計	計	計	計
113 學年	總計	1,074,365	28,816	177,888	793,215	74,446
113 學年	教育學門	35,811	2,553	13,905	19,282	71
113 學年	藝術學門	81,451	1,146	10,894	67,355	2,056
113 學年	人文學門	13,283	879	3,258	9,146	-
113 學年	語文學門	64,596	1,254	6,405	52,065	4,872
113 學年	社會及行為科學學門	39,075	1,401	10,615	27,059	-
113 學年	新聞學及圖書資訊學門	14,094	137	1,999	11,958	-
113 學年	商業及管理學門	173,802	2,986	30,729	134,023	6,064
113 學年	法律學門	19,607	415	6,591	12,601	-
113 學年	生命科學學門	21,603	1,566	3,582	15,919	536
113 學年	環境學門	2,565	151	829	1,579	6
113 學年	物理、化學及地球科學學門	21,426	1,569	4,770	15,087	-
113 學年	數學及統計學門	12,066	208	1,805	10,053	-
113 學年	資訊通訊科技學門	84,008	1,525	15,003	64,768	2,712
113 學年	工程及工程業學門	199,654	7,022	42,711	145,451	4,470
113 學年	製造及加工學門	7,389	164	1,040	5,948	237
113 學年	建築及營建工程學門	28,527	855	5,303	21,401	968
113 學年	農業學門	9,707	449	1,605	7,520	133
113 學年	林業學門	2,121	50	305	1,766	-
113 學年	漁業學門	2,266	110	298	1,781	77
113 學年	獸醫學門	2,079	86	235	1,758	-
113 學年	醫藥衛生學門	109,704	3,654	7,588	60,461	38,001
113 學年	社會福利學門	30,868	129	2,692	22,614	5,433
113 學年	餐旅及民生服務學門	86,210	244	4,345	73,689	7,932
113 學年	衛生及職業衛生服務學門	1,826	-	200	1,309	317
113 學年	安全服務學門	541	-	25	516	-
113 學年	運輸服務學門	7,776	98	877	6,425	376
113 學年	其他學門	2,310	165	279	1,681	185
113 學年	人文類	197,992	5,997	34,766	150,045	7,184
113 學年	社會類	363,656	5,312	56,971	281,944	19,429
113 學年	科技類	512,717	17,507	86,151	361,226	47,833

註：商業及管理、工程與醫藥衛生為學生人數前三多的學門（不計人文、社會、科技類）。

---

林勇吉 (2025)。

透過眼動探討國小與國中職前教師的數學課程覺察力：個案研究。

臺灣數學教育期刊, 12 (1), 71-108。

[https://doi.org/10.6278/tjme.202504\\_12\(1\).003](https://doi.org/10.6278/tjme.202504_12(1).003)

## 透過眼動探討國小與國中職前教師的 數學課程覺察力：個案研究

林勇吉

國立清華大學數理教育研究所

本研究之主要目的在使用眼球追蹤技術探討 10 位國小 ( $n = 5$ ) 與國中 ( $n = 5$ ) 職前數學教師在「比和比值」單元的課程覺察力 (curricular noticing)。研究程序為兩組教師分別閱讀國小或國中課本 (約 5 分鐘), 接著撰寫教案後 (約 25 分鐘), 此期間不可再閱讀教科書, 之後再度閱讀另一版本的課本 (國中或國小) (約 5 分鐘), 後續回答是否修改教案 (約 5 分鐘)。閱讀教科書的過程, 使用 Gazepoint GP3 HD 眼動儀進行資料收集, 並分析其平均凝視時間 (fixation duration) 與其在特定興趣區塊 (Areas of Interest [AOIs]) 的比例 (fixation proportion); 教案文本則是使用質性研究中的主題分析法進行分析。研究結果發現: (1) 在「課程注意」向度上, 國小職前教師對課本凝視的總平均時間與國中職前教師相差 2 倍以上, 國小教師明顯花費更多時間於「課程注意」上; 兩組教師對於閱讀「不同題型題目」的凝視時間比例分布, 主要與其相對應的課本內容多寡有關。(2) 關於「課程回應」向度, 兩組教師在「教案設計」出現明顯差異, 國小職前教師出題的題型較多元, 且偏重「集合」的題型 (32.6%); 反之, 國中職前教師的出題題型較侷限, 並且著重「部分-部分」的題型 (44.8%)。(3) 對於「課程解釋」向度, 國小組教師主要由「學習者的觀點」(40.9%) 進行教案設計, 而國中組教師主要依據「數學觀點」(46.9%) 進行教案設計。(4) 關於「課程注意、解釋、與回應」的關聯性, 不同題目類型的凝視比例與教案設計沒有非常明顯的關聯性, 但「定義與解釋」、「部分-整體」、「計算」這三個課本內容類別的凝視比例, 似乎是在探討職前教師修改教案與否, 值得關注的向度。(5) 最後, 國小組教師比國中組教師更願意在觀看另外一年段教科書後, 修改自己的教案 (4/5 vs 2/5)。

**關鍵字:** 比和比值、眼球追蹤技術、課程覺察力、職前數學教師

---

通訊作者: 林勇吉, e-mail: [yc.lin@mx.nthu.edu.tw](mailto:yc.lin@mx.nthu.edu.tw)

收稿: 2024 年 8 月 7 日;

接受刊登: 2025 年 4 月 10 日。

---

Lin, Y. C. (2025).

Using eye-tracking to investigate curricular noticing among pre-service elementary and secondary mathematics teachers: A case study.

*Taiwan Journal of Mathematics Education*, 12(1), 71–108.

[https://doi.org/10.6278/tjme.202504\\_12\(1\).003](https://doi.org/10.6278/tjme.202504_12(1).003)

# Using Eye-Tracking to Investigate Curricular Noticing Among Pre-service Elementary and Secondary Mathematics Teachers: A Case Study

Yung-Chi Lin

Graduate Institute of Mathematics and Science Education, National Tsing Hua University

The purpose of this study was to use an eye-tracking method to investigate the curricular noticing of ten pre-service mathematics teachers, five from elementary school ( $n = 5$ ) and five from middle school ( $n = 5$ ), in the topic of “ratios and proportions.” The research procedure involved both groups of teachers reading either the elementary or middle school textbooks, followed by writing lesson plans and then reading the other version of the textbook to determine whether they would revise their lesson plans. Using the Gazepoint GP3 HD eye-tracker, data were analyzed based on fixation durations and proportions across defined Areas of Interest (AOIs) and the lesson plans were analyzed by using the thematic analysis. Findings showed that: (1) Curricular attending differs between groups, The eye-tracking data revealed a difference in average fixation duration, with the elementary pre-service teachers exhibiting approximately twice as much average fixation duration on textbooks as secondary pre-service teachers. The distribution of fixation proportion for different types of proportion problems was primarily related to the amount of corresponding content in the textbooks. (2) Results in curricular responding showed significant differences between the two groups: the elementary pre-service teachers presented a more diverse range of problem types, with a focus on “associated sets” (32.6%), while the middle school pre-service teachers had a more limited range of problem types, emphasizing “part-part” questions (44.8%). (3) Curricular interpreting differed. The elementary group primarily designed lesson plans from the “learner’s perspective” (40.9%), whereas the middle group was mainly based on the “mathematical perspective” (46.9%). (4) Relationships among curricular noticing dimensions were not clearly defined. The fixation proportions for different problem types did not show a very clear correlation with lesson plan design. However, the fixation proportions for the three content categories of “definitions and explanations,” “part-whole,” and “calculations” seem to be noteworthy dimensions when exploring whether pre-service teachers revise their lesson plans. (5) Lastly, the elementary group was more willing than the middle group to revise their lesson plans after viewing textbooks from another grade level (4/5 vs. 2/5).

**Keyword:** curricular noticing, eye-tracking method, mathematics pre-service teachers, ratios

---

Corresponding author : Yung-Chi Lin · e-mail : [yc.lin@mx.nthu.edu.tw](mailto:yc.lin@mx.nthu.edu.tw)

Received : 7 August 2024;

Accepted : 10 April 2025.

## 壹、前言

研究指出教科書是教師在國中與國小教師進行教學時，最重要的參考依據（徐偉民，2013，2017；de Guzman & Adamos, 2020），但是關於教師「如何使用」教科書的這個研究向度卻長期被忽略（Fan et al., 2013）。另外一方面，教師使用教科書並不如我們想得那樣單純，它不是把教科書打開，接著按照課本中的題目進行教學這樣而已，教科書與老師的關係是複雜的互動關係，與教師的信念、知識、價值息息相關（Dietiker et al., 2018）。有鑑於此，學者們提出「課程覺察力」（curricular noticing）的研究構念，他們認為這個構念能夠最佳詮釋教師與教科書互動的關係，並且顯著的影響學生的學習機會（de Guzman & Adamos, 2020; Dietiker et al., 2018; Males & Setniker, 2019）。例如 Dingman 等人（2019）的研究指出，教師對於教科書中數學重要概念（big mathematical ideas）的「注意」與「解釋」，會影響教師決定如何使用這些不同版本的教科書，最終高度影響學生的學習成效。

「課程覺察力」可以簡單的定義成「教師在使用教科書進行課程計畫、實施教學與反思教學的思考歷程」（Breyfogle et al., 2010, p. 308）。它包含了三個主要的歷程：「注意」、「解釋」、「回應」。「課程注意」意味教師如何擷取課本中的資訊，並從這些資訊中形成教學的想法。「課程解釋」意味教師如何如何解釋這些擷取的課本資訊，並且根據其解釋產生教學決策（即是「課程回應」）。簡而言之，「注意」指的是教師如何閱讀教科書（例如，特別偏重或是忽略哪部分內容）；「解釋」是教師如何詮釋或理解閱讀的內容；「回應」反映在所撰寫的教案或教學行為上。過去研究指出，透過檢驗教案中的題目類型、題目提供的學習機會等資訊，可以幫助我們瞭解教師是如何進行「課程回應」（Lamon, 1993; Nicol & Crespo, 2006）。過往受限於研究工具，我們並不容易同時擷取出這三個向度的資料，所幸隨著時代的進步，眼動儀提供了一個很有效的方法，可以幫助我們擷取到原本不容易擷取的教師如何注意教科書的研究資料（Males & Setniker, 2019）。課程回應意指教師如何進行教案撰寫的決策，產出最後的教案設計，最後，教科書閱讀到教案產出的中間過程，需要仰賴教師對於教科書的解釋或推理，而「訪談」教師閱讀教科書後的想法，是獲取教師對課程「解釋」的最佳方式之一（Jacobs et al., 2010）。此外，Dingman 等人（2021）指出教師主要從「教師自己」、「學生」與「數學」三者的角度中進行教科書的推理。

另外一方面，根據 Shulman（1986）的定義，教師的教科書知識應該包含兩個主要類別：（1）對於不同科目間的統整，以及（2）同個科目間向上向下的連結，對於後者這個類別的教師知識，Ball 在其教師知識「教數學所需的知識」（mathematics knowledge for teaching, MKT）模型中也有提及「數學知識的眼界」（horizon content knowledge [HCK]; Ball & Bass, 2009; Hill et al., 2008）。所謂 HCK 是指教師必須知道當前的數學概念，如何向前與向後發展，並且運用這些知識來幫助自己的教學（林勇吉、金鈴，2014）。Zazkis 與 Mamolo（2011），曾經舉過一個例子，當國小教師在教授學生找出 180 所有因數時，教師可以利用國中所學

的將 180 分解成質因數連乘積 ( $2^2 \times 3^2 \times 5$ )，次方加 1 相乘的規則  $(2+1)(2+1)(1+1)=18$ ，快速判斷學生是否漏找了 (林勇吉、金鈴, 2014)。此外，具有 HCK 知識的教師，較能夠處理教學中意外發生的事件 (Hurst, 2017)，例如，「 $7 \div 2\frac{3}{8}$ 」的計算中，當學生問「為什麼不能直接用帶分數算？只要將分數  $\frac{3}{8}$  上下顛倒，改為乘以  $2\frac{8}{3}$  就好，一定要先將  $2\frac{3}{8}$  變成假分數，再上下顛倒？」具有 HCK 的教師知道這是國中「倒數」的概念，兩數相乘要等於 1，因此不能只有將分數部分變成倒數，需要整個數字的倒數。雖然這個概念不需要教給每一位國小學生，但是當部分學生有疑惑時，HCK 教師能夠提出更好的數學解釋，替學生未來的國中數學學習鋪路。

比較國中與國小的數學教材，可以發現國小高年級與國中低年級的課程內容有相當程度的重疊，例如國小高年級的：四則運算、質數、因倍數、比與比值單元、都在國中一年級再次出現相同的教學主題，尤其是「比和比值」單元，兩者有一個單元的教學幾乎完全重覆，只是國中在後續單元有更多代數內容的延伸，例如翰林 2023 年版教科書，除了比和比值單元外，後續包含比例式的計算、正比與反比的介紹等延伸。此外，根據上述 Shulman 或 HCK 的理念 (Ball & Bass, 2009; Hurst, 2017; Shulman, 1986)，國小教師掌握下一個階段所教授的數學內容，會影響當前教師的教學與學生的學習，反之，國中教師瞭解學生在國小的學習內容，也會幫助教師如何喚起學生的先備經驗，規劃最佳的學習路徑。有鑑於此，比較國中與國小教師對於「比和比值」前後概念發展脈絡的完整性有其重要意義，這可以提升我們對於兩組職前教師培育的品質。

上述提及有數個國小與國中課程內容部分重疊的單元，本研究選取「比和比值」當作主要研究題材是因為：(1) 相較於其他主題，研究有具體的實徵資料發現國小教師在比和比值的教學知識不如國中教師，這個差異性值得我們進一步探討 (Ezaki et al., 2024)。(2) 比和比值的相關概念散佈於整個國小與國中課本，例如：分數、比率、速率、正反比、濃度、相似形等，比其他主題有更廣的連結性，請參考 2021 年版的康軒國小教科書，即包含上述六個與比和比值相關的內容。3. 比和比值影響了後續「比例推理」的學習，它被公認是整個國小六年級與國中七年級中最基礎，但是學生需要長時間的發展、老師也最難教的單元 (Glassmeyer et al., 2021)。

有鑑於此，瞭解教師的 HCK 知識有其重要性，因此，本研究選定國小六年級與國中一年級共同有的教學主題「比與比值」為本研究的研究素材，透過收集閱讀教科書的眼動資料、設計簡案與訪談，探討國小與國中職前教師在此共同單元的課程覺察力。具體待答問題如下：

- 一、國小與國中職前教師在「課程注意」向度表現為何？
- 二、國小與國中職前教師在「課程解釋」向度表現為何？
- 三、國小與國中職前教師在「課程回應」向度表現為何？
- 四、國小與國中職前教師在「課程注意」、「課程解釋」、「課程回應」三個向度上的可能關係？

## 貳、文獻探討

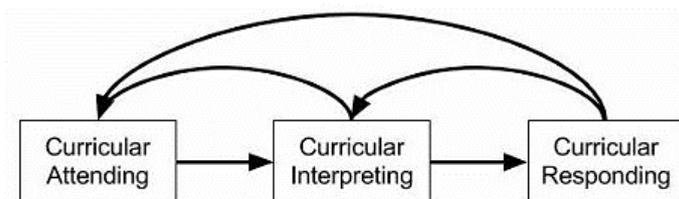
### 一、課程覺察力的定義

課程覺察力可以簡單的定義成「教師在使用教科書進行課程計畫、實施教學與反思教學的思考歷程」(Breyfogle et al., 2010, p. 308)。相較於過去「課程推理」(curricular reasoning)一詞,「課程覺察力」的意涵更為廣泛,類比教師覺察力(teacher noticing),課程覺察力也可以定義成「課程注意」與「課程推理」,比起單教科書推理,課程覺察力多了注意這個向度。除此之外,課程覺察力也包含了教師信念、知識如何與解讀教科書內容交織,例如,Shinno與 Mizoguchi (2021)的研究中,他們提到一位教師如何根據自身的知識與信念使用教科書的題目:「把 $\frac{2}{5}$ 公升的果汁和 $\frac{1}{5}$ 公升的果汁到在一起,合起來是多少公升?」這是一題同分母相加的題目,然而教師在使用該題目時,並沒有直接使用此題,而是先將題目中數據改成為以10為分母,並且調整分子變成 $\frac{3}{10}$ 與 $\frac{4}{10}$ ,因為他認為學生對於分母為10的計算比較熟悉,他想透過簡化數據,幫助學生能夠較輕易的解決本題(預期學生會覺得比較簡單與比較好作圖表徵問題)。然而,他的重點是放在挑戰學生: $\frac{3}{10} + \frac{4}{10}$ 為什麼不等於 $\frac{7}{20}$ 。他相信學生都能夠很快、且正確的解決原來分母為10相加的問題,所以他的主要目的不是在成功解題上,而是想利用這個題目,進一步澄清學生在分數相加的迷思概念,因此他無意在數據上增加學生的困擾。這種改變題目,從課本中發展自己的教學脈絡的過程,牽扯到教師對於數學的知識,與數學的信念(Shinno & Mizoguchi, 2021),這也是課程覺察力所要探討的課程「注意」、「解釋」與「回應」的脈絡。

#### (一) 課程覺察力的架構

我們已經知道教師覺察力被普遍的定義為:「注意」、「解釋」與「回應」(Jacobs et al., 2010)。Mason (2002)提到覺察力不僅可以針對教學,它也可以是覺察某個「主題」,因此課程覺察力承襲覺察力的脈絡,也有三個相似的基本的定義「對課程的注意」(curricular attending)、「對課程的解釋」(curricular interpreting)與「對課程的回應」(curricular responding; Dietiker et al., 2018; Males & Setniker, 2019),其結構如下圖 1:

圖 1  
課程覺察力的架構



註：引自“Curricular noticing: A framework to describe teachers’ interactions with curriculum materials,” by L. Dietiker et al., 2018, *Journal for Research in Mathematics Education*, 49(5), p. 527 (<https://www.jstor.org/stable/pdf/10.5951/jresematheduc.49.5.0521.pdf>). Copyright 2018 by the National Council of Teachers of Mathematics.

「課程注意」意味觀看課程素材（包括習作、教師手冊），從中獲得教學和學習數學的資訊，這包括搜尋、閱讀、聚焦、調查，它包含了各個層面的閱讀教科書，例如教學活動、數學內容、教學的建議。在此特別注意是教師可能無法注意所有的課程內容，在有限的時間內，他們會忽略某些內容（Dietiker et al., 2018）。另外一方面，教師較忽略某部分的內容，也可能是對某部分的教材內容較熟悉，因此無須花費心力特別閱讀（Dingman et al., 2019; Males & Setniker, 2019）。

「課程解釋」意味對於所注意的教科書內容賦予意義（making sense of），這包括將教學知識連結到教科書的閱讀上與解釋教科書內容的編排脈絡，這裡的解釋脈絡與前述的 Shulman（1986）教科書知識與 HCK 甚麼已經教過、未來要教甚麼一致。特別一提的是，教師如何解釋教科書與他的先備經驗、目標與背景知識相關（Dingman et al., 2021）。

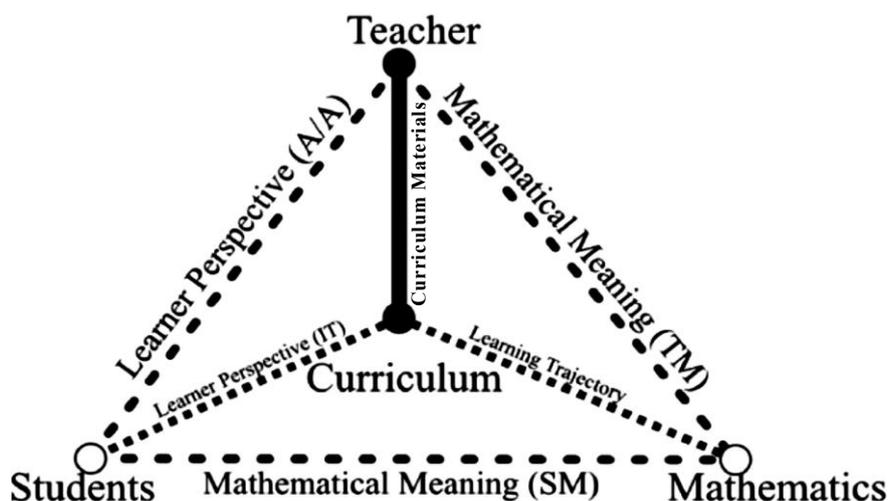
「課程回應」意味從對教科書的解釋進行課程的決策（curricular decisions），在此是實施的課程（enacted curriculum），教師必須決定打算教甚麼、以及如何教，統合上個階段對於課程的解釋，搭配自己的教學經驗做出課程的決定，例如選任務、執行教學的計畫等（Dietiker et al., 2018; Males & Setniker, 2019）。

此外，從圖 1 的結構圖來看，我們可以發現課程覺察力不是單純的線性關係，它可能在各個元素中跳來跳去，例如教師在解釋完教科書的內容後，可能發現忽略某些重要內容，再度回到課程注意這個階段。

Dingman 等人（2021）使用教科書推理（curricular reasoning）一詞，但是如同前述，它與課程覺察力的概念相符，但比較狹隘，教科書推理比較偏向課程覺察力中的「解釋」這個向度。Dingman 等人主要延伸了 Cohen 等人（2003）三角教學的架構，將「課程」新增入「教師」、「學生」、「數學」三者的關係中（圖 2）。這意味教師在執行教學時會考慮的所有面向，換句話說，課程覺察力，包含考慮課程和其他三者要素間的關係：（1）「分析課程資料」（analyzing curriculum materials）、（2）「對應學習軌道」（mapping learning trajectories）、（3）「從學習者的角度看待數學內容」（viewing mathematics from the learner's perspective）、（4）「考慮數學的意義」（considering mathematical meanings），最後（5）「重新修正課程教材」（revising curriculum materials）。說明如下：

首先，（1）分析課本意味閱讀不同版本的教材，分析比較後決定目前的教案設計方式。（2）學習路徑，意味考慮學生的認知發展歷程，先學甚麼、再學甚麼，據此觀念來設計教案。（3）學習者觀點，意味從學生在解題或思考的角度來設計教案，例如知道某個題目對學生很難，或是學生常出現的迷思概念，刻意將這些題目設計在教案中。（4）數學觀點，這裡是指以數學概念本身來思考如何設計教案，例如教師認為在此數學的重點為何，學生該學哪些重要的數學概念。（5）重新修正課程教材，這是指根據過往的實際的教學經驗，或是觀課的經驗，來修改或設計教案內容，例如教師檢討上次教學的缺失，重新設計教學流程。特別說明的是，教師對於課程的解釋並不是獨立的，一位教師在設計某個教案時，可能會考慮數個不一樣的觀點進行設計，例如同時考慮「學習路徑」和「數學觀點」。

圖 2  
課程覺察力三角架構



註：引自“Conceptualizing curricular reasoning: A framework for examining mathematics teachers’ curricular decisions,” by S. Dingman et al., 2021, *Investigations in Mathematics Learning*, 13(4), p.283 (<https://doi.org/10.1080/19477503.2021.1981742>). Copyright 2021 by Taylor & Francis Group.

de Guzman 與 Adamos (2020) 從分析課程中，由課程編製者的角度，提出課程覺察力的洋蔥模型 (圖 3)，意味從內圈逐步到外圈完成課程的設計，這包括三個主要階段：「遭遇」(encountering)、「賦予意義」(sense-making)、「運作」(operationalizing)。首先「遭遇」階段，教師根據基本的教科書編製原理原則進行編製，這階段會觸及數學內容、課綱等。接著「賦予意義」階段，編製者，從巨觀進入微觀的世界，開始對課程編製原則進行進一步的詮釋，確立學生需要知道甚麼、透過那些學習程序、如何遷移等問題。「運作」階段，這裡開始將先前的規劃與想法，實際編製到課程中，這裡的課程題目或內容再分作三個小層次，首先是幫助學生複習舊經驗 (propelling)、接著加強學生的學習 (progressing)、最後再次練習 (polishing) 所學。

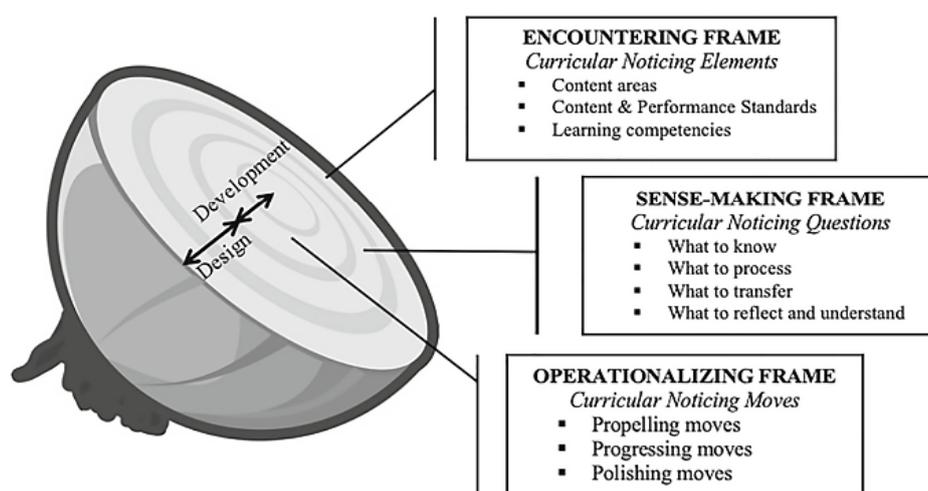
## (二) 課程覺察力的相關研究

目前對於課程覺察力研究實徵研究甚少，大多還停留在理論層次，如上述三位學者的文章 (de Guzman & Adamos, 2020; Dietiker et al., 2018; Dingman et al., 2021)，Males 與 Setniker (2019) 是少數真正實際利用此模型進行研究的文章，他們所採用的是 Dietiker 等人 (2018) 注意、解釋、回應的模型，這不難理解，因為事實上 Males 也是這篇文章的共同作者之一。Males 與 Setniker 的研究主要使用眼動去探討四位職前教師對於課程的覺察力，研究方式是讓個案戴上眼動儀 (Tobii Pro Glasses 2)，請個案閱讀教科書，並從中撰寫教學計畫，接著分析教師關注課本的焦點，並比較教師在兩個版本課程的覺察力差異。研究結果發現版本的差異會導致個案閱讀的時間上有差異，比起課程的簡介、回家功課的內容，個案花費較多時間在關注課程活動上。這裡的課程活動指的是課本中的題目，他們發

現研究個案會特別注意圖形表徵與斜率的定義相關的題目。Males 與 Setniker (2019) 的研究發現，個案們在課本中所關注的焦點，會反映出在他們的教案上，因此他們認為透過眼動資料，可以成功擷取到教師所關注的點，以及與其後來編製出來教學計畫間的關係。

圖 3

課程覺察力的洋蔥模型



註：引自“Like the layers of an onion: Curricular noticing as a lens to understand the epistemological features of the Philippine K to 12 secondary mathematics curriculum materials,” by A. B. de Guzman, & J. L. Adamos, 2020, *Educational Research for Policy and Practice*, 19(3), p. 394 (<https://doi.org/10.1007/s10671-020-09264-8>). Copyright 2020 by Springer Nature Singapore Pte Ltd.

## 二、眼動科技應用在教師覺察力研究益處

眼動研究基本上是基於 Just 與 Carpenter (1980) 的心眼 (eye-mind) 假設：「眼睛注視的位置是心智正在處理的訊息位置之論點，這使得眼動指標的時間長短、空間位置，和順序有指涉某些心理意義的理論基礎」(吳昭容，2019，頁 3)，這個理論蘊含著假設當眼睛移動時，意味著注意力的改變，隨著眼睛的停留、眼睛的軌跡改變，也反映出認知上的改變 (吳昭容，2019；陳學志等人，2010；Lai et al., 2013)。

隨著科技的發展，眼動研究逐漸受到關注，以 Lai 等人 (2013) 針對學習的眼動回顧性研究來說，2000–2012 年總共擷取了 81 篇文章 (113 個研究)；吳昭容 (2019) 以幾何教育與眼動為主題，2001–2019 年共擷取出 15 篇文章；可見眼動關於學習研究已逐漸成為一個重要的領域。但若僅針對教師的學習而言，眼動這方面的研究的數量仍然不多，Beach 與 McConnel (2019) 特別針對教師學習這個主題進行回顧性的研究，2007–2017 年從中僅有 10 篇文章符合它的選取標準。

由於「眼動」科技與「課程覺察力」的文獻極度缺乏，由於「課程覺察力」是「教師覺察力」的分支，我們嘗試從「眼動」科技應用在「教師覺察力」研究益處進行說明：

### (一) 眼動可以幫助擷取無意識的覺察力

眼動科技能夠提供獨有的視覺化的資訊，幫助我們了解一個人的行為或認知，更重要的是它能夠捕抓一個人「自動化」的感知 (awareness)，即是個體並沒有意識到的行為或感受 (Beach & McConnel, 2019)。這個特性對覺察力而言非常重要，因為覺察力的第一個首要元素就是「注意」(attending-to)，掌握了教師注意甚麼，才能進一步去探討教師如何「解釋」與「回應」，傳統上覺察力都是透過觀看影片後的反思進行，而眼動能夠捕抓觀看影片當下的覺察力，區隔出事後反思才得出的結論 (Gaudin & Chaliès, 2015)。例如 Wyss 等人 (2021) 的研究中，分析教師在觀看教學影片中的眼動資料，發現受試教師多數都會特別注意關鍵事件 (聚焦某位女學生上)，但是事後的反思，卻只有很少的教師提到這個事件，這似乎反映出事後反思與當下覺察力的差異。

### (二) 眼動是一種「低推論」(low-inference) 評量與「最小干擾」(minimal disruption) 收集教師真實課室教學的工具

如同前述，傳統上教師的覺察力來自於教師觀賞教學影片後的反思，並且研究者使用編碼架構進行分析 (Mitchell & Marin, 2015; Sherin & van Es, 2009; van Es & Sherin, 2008)，而編碼的分析本身就是一個「高推論」(high-inference) 的方式，因為它很依賴編碼者的對於資料的詮釋，相對的，眼動所收集的資料是來自於受試者眼睛的移動焦點和路徑，它相對上述來說客觀許多，透過記錄觀看某個焦點的時間多寡，能夠客觀且有效的反應教師的覺察力 (Cortina et al., 2015)。

另外一方面，穿戴式 (wearable) 的眼動設備，能夠輕易穿戴進入教學的現場，對於教師的教學干擾度最小 (相較於一邊教一邊訪談教師)，並且透過眼動所收集的資料，就能夠反映教師在課室中注意的焦點 (Cortina et al., 2015; Keller et al., 2022)。

綜合上述，我們發現眼動的研究有其優勢，但是我們仍然不能排除注視與注意的關聯性，雖然多數時候注視可以代表注意，但是也會有視而不見的現象，我們對於眼動的結果仍須有所保留的看待。

## 三、比和比值的題目類型

「比」指的是兩個量的倍數關係或是對應關係 (林碧珍, 2010)，例如 2 個集點卡可以兌換 1 個小餅乾或奶茶中，牛奶和紅茶的比例是 1:2 等。「比值」則可以從三種不同意義來詮釋，(1) 首先，比值可以代表某一個單位對應到另外一個單位的個數，例如 2 公尺賣 15 元，比值  $15/2$  代表每公尺賣多少錢 (林碧珍, 2010)。(2) 比值也可以簡單定義成前項除以後項的結果 (Reinke et al., 2023)。(3) 以後項當作基準量，前項的結果，例如  $a:b = a/b:1$ ，當後項是 1 時，前項  $a/b$  就是它的比值 (林碧珍, 2010)。比較課本中的對於比值的定義，我們發現國小課本採用的是第二種定義：前項除以後項的結果 (如 2021 年版康軒教科書)；而國中課本則是除了第二種定義外，還隱含了第三種定義： $a$  除以  $b$  代表  $a$  是  $b$  的  $a/b$  倍 (如 2023 年版翰林教科書)。

另外一方面，比和比值的概念也反映了學生的比例推理能力，它是國小數學學習的重要里程碑標，也是奠基後續國中、高中學習的重要墊腳石 (Parish, 2010)。所謂比例推理，指的是對兩個量乘法關係的理解，掌握比例推理能力，也是學生是否能完整瞭解有理數指標 (Lamon, 1993)。

關於教學設計，學者們有不同的分析類別。Males 與 Setniker (2019)，將課本的內容區分成「定義與解釋」、「教學指引」與「題目」三個類別。Nicol 與 Crespo (2006) 則是根據題目提供的學習機會進行分類，主要區分兩種類型，分別是「程序應用型」與「豐富學習型」。「程序應用型」意味學生套用所學的公式或數學概念於解題中，比較缺乏刺激數學思考；反之「豐富學習型」則是較能引發學生的探究與思考。根據上述定義，原則上，課本中的應用問題，如果學生只要套用公式或應用基本事實，即可求出答案，沒有深入的思考與探究，便屬於「程序應用型」；然而「豐富學習型」的題目是偏向開放型的題目，會詢問學生為什麼，要求學生比較所得結果與甚至進行探究。例如下圖 4 中，學生基本上，只要應用比值的計算公式，便能成功答對此題，這屬於「程序應用型」；相對的圖 5 的題目，他要求學生思考與探索如何測量樹高，這比較偏向「豐富學習型」。

Lamon (1993) 的分類則是特定於「比和比值」主題，他細分出四個主要題目的類別，分別是：(1)「複合單位」(Well-Chunked)：其題目意味將兩個常見的測量單位整合成同一個單位來使用，例如速率，每小時行走多少公里、每公升多少錢其中的「公里/小時」、「元/公升」都可以複合成一個單位來使用。(2)「部分-部分-整體」(part-part-whole)：是生活中常見與簡單的比例關係，可以再細分成：「部分-部分」與「部分-整體」，其中「部分-部分」例如班上男生與女生的比例是 3 : 2；「部分-整體」則是例如男生與全班人數的比例是 3 : 5，其中命中率也屬於「部分-整體」的關係。(3)「集合」(associated set)：是意味兩個自訂的比例關係，例如 2 張集點卡可以兌換 1 個糖果、1 條船坐 5 個人，這種關係不像「公里/小時」，是常見且普遍使用的複合單位，集合是由題目情境所律定的兩個量的關係。(4)「放大縮小」(stretchers and shrinkers)：例如相似形的比例關係，或是放大圖縮小圖的比例關係，都是屬於這個範疇。

圖 4  
程序應用型問題範例

 課前練習

小欣打籃球，投籃 25 次，投進了 13 次，則  
進球次數與投籃次數的比為 \_\_\_\_\_ : \_\_\_\_\_，比值為 \_\_\_\_\_。

註：引自《國中數學七下課本》(頁 98)，翰林出版，2023，作者 (<https://reurl.cc/GnnbOZ>)。2023 翰林出版事業股份有限公司版權所有。

圖 5  
豐富學習型問題範例

### 有多高？



註：引自《國小數學六上課本》(頁 107)，康軒文教事業，2021，作者。2021 康軒文教事業股份有限公司版權所有。

Lamon (1993) 指出，這四種類型的題目對於學生學習比和比值概念有不同的影響。在他的研究中 24 學生中，有 23 位學生都是使用比例推理進行解題，但是對於其他題目的類型，學生的解法很多元，不受限於比例推理的方式。「部分-部分」或「部分-整體」的題目相對學生來說最有經驗，但是學生很容易使用其他的方法解題成功（例如單純用除法與乘法的概念），而不需要使用比例推理的概念，因此，較不適合用來作為發展學生比和比值概念的起始問題。「放大縮小」對學生的難度最高，也不適合用來作為發展比和比值概念的起始題目。整體來說，「集合」類型的題目是最適合用來發展學生的比和比值概念（林碧珍，2010），因為它不像「部分-部分-整體」可以有多元的解題方式，也不像「放大縮小」和「複合單位」難度那麼高。與上述類似結果也可以在國中學生的迷思概念中發現（賴彥男，2021）。

在本研究中，我們將「比與比值」的題目再進一步區分為六個類別，除了上述的四個類別：「複合單位」、「部分-部分-整體」、「集合」與「放大縮小」，其中「部分-部分-整體」，將再進一步區分成「部分-部分」與「部分-整體」兩個類別，並且新增「計算」這個類別，形成六個類別，說明如下：

首先，「部分-部分-整體」本來就是將兩個類似但不一樣的構念整合在一起（「部分-部分」、「部分-整體」）。Lamon (1993) 整合這兩個構念的原因是基於它們的結構相同，且學習難度相仿，但在本研究中，我們想進一步探究細部的差異，將它區分成兩個向度，可以幫助我們檢視教師比較偏重這兩種中的哪一種類型。這樣的分類方式（區分成兩個不同的類別），事實上也是許多研究的分類方式，並不少見（例如：Adjage & Pluvineau, 2007）。關於「計算」這個的類別，這是因為過去題目分類的研究比較偏向使用哪一種題型來發展

學生的概念（啟蒙例），因此純「計算」不是一個好的題目類型，但是如果考慮如何使用教科書，「計算題」是「比和比值」教科書中的必要題型，例如 2023 年版翰林教科書中，比和比值單元中的計算題就是整個單元主要的題目類型，因此在探討教師如何設計整個比和比值的教學，應該也要考慮「計算」這個題型。

#### 四、國小教師與國中教師在教師知識與教師情意上的差異

過去的研究已清楚顯示國小教師與國中教師，在教師知識或教師情意的向度上，皆存在顯著的差異（Agathangelou & Charalambous, 2021; Dede, 2015），這個差異可能是源自對於小學與中學的師資培育差異所導致（Jung et al., 2019）。就國小教師而言，他們必須教授國小各種科目，並不僅限於數學一科，也因此他們的訓練著重在普遍性的教育理論，以及學生中心的學習，相對的，國中教師則是非常聚焦在學科中心，因此中學的師培比較偏向數學科教學的訓練（Book & Freeman, 1986）。

另外一方面，以台灣的情況而言，國小職前教師在師培課程只被要求學習國中以下的數學，但是國中數學教師則是偏重於大學數學（Krainer et al., 2015），這種不同的師培重點，造就了這兩群教師本質上的差異，我們分成五點來論述：（1）多數國中職前教師的數學知識（content knowledge）要比國小職前教師的數學知識更深入（Krainer et al., 2015），在亞洲國家中，國中職前教師的學科教學知識（Pedagogical Content Knowledge [PCK]）也會比國小職前老師較豐富，在多數的情況下，數學知識和學科教學知識有至少中等程度以上的相關性（Blömeke & Kaiser, 2014）。（2）Phelps-Gregory 與 Spitzer（2021）的研究也發現國中職前教師較國小教師具備更好的教師覺察力（teacher noticing，即觀察與分析課室教學的能力）。（3）關於教師情意的向度，國中教師也被認為比國小教師具有更好的自信與自我效能（Anderson & Taner, 2023），也許是這個原因，國小教師也較容易接受教學概念（Jung et al., 2019）。（4）關於教學信念方面，國小教師偏重於「教學策略」與學生的「學習歷程」，而國中教師偏重「數學概念」的教學，以及學習數學的「邏輯結構」（Anderson & Taner, 2023; Dede, 2015; Jung et al., 2019）。（5）在教學時國小教師考慮的層面比國中教師來的廣，國中教師比較集中在「師生互動」方面，而小學教師除了師生互動外，也會在意課程的設計、培養學生的自主性、同儕之間的合作學習等（Anderson & Taner, 2023）。

### 參、研究方法

本研究採個案研究法，主要透過個案的「教科書閱讀眼動資料」、「教案設計」與「訪談」呈現兩組教師在課程覺察力的可能或潛在的趨勢，並為未來研究提供一個探索方向，研究設計不滿足實驗研究設計的要求，也無法進行統計推論，研究結果僅能呈現特定現象，無法推論至所有的中小學職前數學教師。

## 一、研究對象

本研究的對象為 10 位國小 ( $n = 5$ ) 與國中 ( $n = 5$ ) 職前數學教師，這 10 位個案目前皆就讀於北部某綜合大學數學教育相關研究所，他們目前都正在修習教育學程課程，但已經修習過數學教材教法課程，國中職前教師中，有 1 位有短暫代課過的經驗，另有 2 位有短暫補習班教學的經驗；國小職前教師中有 2 位有短暫代課的經驗，另有 1 位有短暫補習班教學的經驗（上述非正式教學經驗最多均不超過 1 年）。

關於比和比值教學的學習經驗，兩組研究個案在國小或國中時都接觸到比較傳統的講述教學，教師比較利用直接告知或下定義的方式，告知其比和比值的意義，並在認識定義後，透過題目進行計算與應用比和比值。即使已經修習完畢教材教法課程，他們對於比和比值中的題目可以區分為四個主要題目類型，並不十分了解，對於哪一種題目較能夠幫助學生發展學生的比和比值概念，也沒有明確的知識。

## 二、研究材料：比和比值教科書

本研究使用國小六年級與國中一年級共同的單元「比和比值」作為研究題材，此單元中包含三個主要的主題：「比和比值的定義」、「相等的比」、「最簡單整數比」。國小部分，在此單元之後，還會有一個「成正比」的單元，但此部分已在 108 課綱中移至國中教授；國中部分，「比和比值」只是一個單元中的第一小節，之後還會有「比例式」、「比和比值的應用問題」、「正比與反比」單元。以比和比值來看，國小和國中教科書的差別是國小使用的題目類型比較多元（見第 86 頁「(五) 資料分析」中第三段的六個內容分類），國中則是有「負數」的比，如圖 6 國中的隨堂練習（左上）出現「負數」，相等的比使用「符號化（右下角）的定義。

受試者在進行施測時，國小與國中教材都是以一次一面教科書為單位（2 頁教科書，如圖 6 下，112-113 頁）的方式呈現。國小總共有 5 面，但實際上只有 4 面的內容（總共 8 頁教科書），第一面只有一頁，最後一面也有一頁。國中教材也是總共 5 面，但是實際內容是 4.5 面，共 9 頁教科書內容，最後一面只有一頁。

題數統計方式，以子題為單位，例如圖 6（下）、左上角問題 1：「媽媽用 2 杯的蘋果原汁加 3 杯的水調成蘋果汁。蘋果原汁和水的比怎麼記？比值是多少？」本題有兩個子題，學生須回答 2 個問題，記為 2 題（楊德清、鄭婷芸，2015）。

課本字數統計方面，所有教材中的內容都計入，包括國小課本底下的教學指引，其中文字、標點符號、數字、代數符號、數學符號，都記入為一個字數，例如圖 6（下）左頁的數學定義：「像這樣比值相等，我們說它們是相等的比。記作  $2:3=4:6$ 」，其中文字=19、標點符號=2、數學符號=7，總共記為 28 個字數。整體的課本字數統計結果如表 1。

圖 6  
國中與國小課本「比和比值子單元：相等的比」節錄

**隨堂練習**

求下列各比的比值：

(1) 26 : 39      (2)  $2\frac{1}{12} : (-\frac{5}{6})$       (3) 3.4 : 5.1

**例 2 比值的比較大小** 健康 自評 P116 第 2 題

校慶舉辦師生籃球比賽，學生隊全場三分球出手 20 次，投進 8 次，教師隊全場三分球出手 30 次，投進 12 次，則哪一隊三分球的命中率較高？  
(命中率 = 投進次數與投球次數的比值，通常以百分率表示。)

學生隊三分球投進次數與投球次數的比是 8 : 20，  
比值为  $8 \div 20 = 0.4$ ，即命中率是 40%。  
教師隊三分球投進次數與投球次數的比是 12 : 30，  
比值为  $12 \div 30 = 0.4$ ，即命中率是 40%。  
因此學生隊與教師隊三分球的命中率相同。

**隨堂練習**

正敏與金鋒參加棒球比賽，正敏在 15 次打擊中，擊出 6 次安打；金鋒在 24 次打擊中，擊出 9 次安打，已知安打數與打擊數的比值稱為打擊率，則：

(1) 正敏和金鋒的打擊率分別是多少？(以小數表示)  
(2) 兩人的打擊率誰比較高？

比值相等的兩個比，稱為相等的比。在圖 2 中，「8 : 20」與「12 : 30」的比值相等，就稱這兩個比相等，可記成  $8 : 20 = 12 : 30$ 。

由於分數經過約分或擴分後，其值不變，因此可知，

即  $8 : 20 = 2 : 5 = 12 : 30$   
 $(8 \div 4) : (20 \div 4) = (2 \times 6) : (5 \times 6)$

因此一個比的前項與後項同除以或同乘以一個不為 0 的數，其比相等。

**相等的比**

已知  $m \neq 0$ ，則 (1)  $a : b = (a \div m) : (b \div m)$ 。  
(2)  $a : b = (a \times m) : (b \times m)$ 。

**隨堂練習**

下列的比中，何者與 40 : 30 相等？在□中打「✓」。

□ 4 : 3      □ 3 : 4      □  $\frac{4}{3} : 1$       □  $1 : \frac{3}{4}$

**活動 2 相等的比**

**1 調蘋果汁。**

媽媽用 2 杯的蘋果原汁加 3 杯的水調成蘋果汁。  
蘋果原汁和水的比怎麼記？比值是多少？

2 : 3      2 : 3 的比值是  $2 \div 3 = \frac{2}{3}$ 。

答：蘋果原汁和水的比是 2 : 3，比值是  $\frac{2}{3}$ 。

棠棠用 4 杯的蘋果原汁加 6 杯的水調成蘋果汁。  
蘋果原汁和水的比怎麼記？比值是多少？

4 : 6      4 : 6 的比值是  $4 \div 6 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ 。

答：蘋果原汁和水的比是 4 : 6，比值是  $\frac{2}{3}$ 。

想想看，棠棠調出來的蘋果汁和媽媽調的味道一樣嗎？

棠棠和媽媽的蘋果原汁和水的比值都是  $\frac{2}{3}$ ，  
所以蘋果原汁都是水的  $\frac{2}{3}$  倍，也就是 1 杯的水要加  $\frac{2}{3}$  杯的蘋果原汁，  
所以他們調的味道一樣。

像這樣比值相等，我們說它們是相等的比。記作  $2 : 3 = 4 : 6$ 。

**做做看**

下列各題中的比是相等的比嗎？

(1) 3 : 5 和 6 : 10      (2) 3 : 4 和 4 : 5

志嘉用 24 毫升的白色水彩和 30 毫升的綠色水彩，調出好看的淺綠色。

1 白色水彩和綠色水彩的比是多少？ 24 : 30

2 當白色水彩和綠色水彩的比是多少時，也會調出一樣的淺綠色？

24 : 30 的比值是  $\frac{24}{30}$ ，再找出  $\frac{24}{30}$  的等值分數。

我用約分來做。  
 $\frac{24}{30} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ 。  
所以和 24 : 30 相等的比有 12 : 15、4 : 5。

我用擴分來做。  
 $\frac{24}{30} = \frac{48}{60} = \frac{96}{120} = \dots$   
所以和 24 : 30 相等的比有 48 : 60、96 : 120、……

3 24 : 30 和  $(24 \times 5) : (30 \times 5)$  相等嗎？

24 : 30 和  $(24 \div 3) : (30 \div 3)$  相等嗎？

一個比的前項和後項同乘或同除以一個不等於 0 的數後，所得的比和原來的比相等。

**做做看**

把和「9 : 15」相等的比圈起來。

3 : 5      18 : 24      27 : 45      6 : 12

註：1. 上圖引自《國中數學七下課本》(頁 101-102)，翰林出版，2023，作者 (<https://reurl.cc/GnnbOZ>)。2023 翰林出版事業股份有限公司版權所有。

2. 下圖引自引自《國小數學六上課本》(頁 112-113)，康軒文教事業，2021，作者。2021 康軒文教事業股份有限公司版權所有。

**表 1**  
課本題目類型字數統計

類型	國小課本		國中課本	
	字數	比例 (%)	字數	比例 (%)
計算	287	10.9	334	15.0
複合單位	160	6.1	98	4.4
部分-部分	633	24.0	496	22.3
部分-整體	113	4.3	608	27.3
集合	483	18.3	0	0
放大縮小	258	9.8	0	0
定義與解釋	348	13.2	455	20.5
教學指引	361	13.7	233	10.5
總字數	2643		2224	

註：比例 = 字數/總字數。

### 三、研究設備

本研究所使用的眼動儀為 Gazept GP3 HD (<https://www.gazept.com/>)，取樣率為 150HZ，使用的螢幕是 24 吋，解析度 1920\*1080 pixels，受試者距離螢幕約 60 公分，並使用下巴架固定幫助個案固定其頭部。

### 四、研究程序

研究程序採一對一的方式進行：

- (一) 先由研究助理告知整個研究流程，接著接受眼動儀的 9 點校正，確認通過後；
- (二) 再依其組別收集眼動資料，兩組分別在電腦螢幕上閱讀國小或國中比和比值單元的教科書（國小組讀國小教科書；國中組閱讀國中教科書）；
- (三) 接著設計一份該單元 40 分鐘的教學簡案；
- (四) 完成後，接受訪談，主要回答兩個問題：
  1. 請你幫我們分享一下你當初設計的想法是什麼？（主要目的：了解設計這份教案背後的理念）
  2. 請問你這份教案設計的內容，跟剛剛閱讀的課本內容有沒有關係？如果有，請說明；如果沒有，也請你解釋原因。（主要目的：這份教案與剛才課本閱讀的關聯性）
- (五) 接著再次在電腦螢幕上閱讀另外一年段的教科書（收集眼動資料，國小組讀國中教科書；國中組閱讀國小教科書）；
- (六) 最後接受第二次訪談，詢問是否打算修改剛才設計的教案，以及修改或不修改的原因。具體訪談問題如下：
  1. 現在想要瞭解您對修改教案的看法，請問在看完國中（國小）教科書後，您認為有需要修改剛剛設計的教案嗎？

2. (認為需要修改) 請您說明一下想要修改的地方或原因?

3. (認為不需要修改) 請您說明一下不需要修改的原因?

以上程序無限時, 但大約花費 50 分鐘完成所有程序。

上述教案設計主要是請受試者在閱讀完教科書之後, 根據課本設計一份 40 分鐘的簡案, 設計過程中, 有一個其他單元的教案範例提供給個案參考, 這個教案主要作為該單元的教學依據, 其中必須要呈現使用何種類型的題目進行教學, 而這些題目類型, 會影響學生的學習成果, 故在其後會分析其類型。詳見文獻探討與資料分析章節。

## 五、資料分析

針對待答問題一、「國小與國中職前教師在『課程注意』向度表現為何?」, 我們將透過收集與分析教師的閱讀教科書的眼動資料獲得; 針對待答問題二、「國小與國中職前教師在『課程解釋』向度表現為何?」, 是收集教師閱讀教科書後的訪談資料(第一次訪談), 並依據 Dingman 等人(2021)的五個類別進行分析:(1)「分析課程資料」(分析課本)、(2)「對應學習軌道」(學習路徑)、(3)「從學習者的角度看待數學內容」(學習者觀點)、(4)「考慮數學的意義」(數學觀點)、(5)「重新修正課程教材」(過去經驗)。上述的文獻探討章節已有論述此部分的內容, 將在下面進行更詳述的資料分析說明。針對待答問題三、「國小與國中職前教師在『課程回應』向度表現為何?」, 主要是請受試者根據閱讀教科書的結果進行「比和比值」單元的教案設計(一節課 45 分鐘), 設計完成後, 除了訪談其設計理念外, 會再請受試者觀看另外一版本(國中或國小)同單元的教科書, 進行第二次訪談, 主要目的是瞭解個案對於是否修改教案的看法(第一次與第二次訪談具體問題, 請見上述「四、研究程序」)。

關於眼動指標, 本研究會報導(1)平均「總凝視時間」(total fixation duration), 與(2)平均凝視時間比例(fixation proportion): 對於閱讀特定內容或題目類型興趣區塊(Areas of Interest [AOIs])的「凝視時間」(fixation duration)除以「總凝視時間」(total fixation duration)的比例(%), 主要原因是每位個案的總凝視時間各異, 透過比例可以控制不同受試者凝視時間的差異。分析時同一類型的 AOIs 會進行彙整。

本研究的 AOIs 主要根據教科書的內容與題目類型進行劃分, 教科書內容的分類則是根據 Males 與 Setniker (2019), 區分成「定義與解釋」、「教學指引」兩個類別。其中題目的分類改編自 Lamon (1993)、林碧珍 (2010), 共有六個分類, 因此總共有八種(6+2) AOIs。圖 7 呈現本研究國小課本的其中 2 頁的範例, 其中呈現四個類別「集合」、「定義與解釋」、「教學指引」、「部分-部分」範例。「集合」的題目例如活動 1, 書本閱讀與點數兌換的關係; 「部分-部分」例如圖 7 中右下角的素養題, 二氧化氯汗水的比例; 「定義與解釋」例如黃底部分, 關於比的定義; 「教學指引」在頁面底部的最小字, 提示教師如何進行教學。「放大縮小」例如圖 5, 需要利用相似形的概念求出樹高。「複合單位」的題目例如: 「超商裡有兩種不同容量的礦泉水: 2 公升 36 元、5 公升 65 元, 想想看, 買哪一瓶比較划算? 為什麼?」(康軒文教事業, 2021, 頁 111), 在此每公升多少錢可以當作一個單位來使用。

圖 7

國小課本內容分類之 AOIs 範例

<p><b>活動 1 比與比值</b></p> <p>① 下面為快樂國小的「閱讀存摺」積點規則。 把讀完的書名記錄在閱讀存摺中， 累積本數每 2 本可以換 1 張兒獎券。</p> <p>② 世軒讀完 8 本書，可以換幾張兒獎券？ 讀 2 本書 → 換 1 張兒獎券 讀 8 本書 → 換 4 張兒獎券 <math>8 \div 2 = 4</math> <math>1 \times 4 = 4</math> <b>集合</b> 答：4 張</p> <p>③ 彥廷換了 6 張兒獎券，你知道他至少讀完幾本書嗎？ <math>6 \div 1 = 6</math> <math>2 \times 6 = 12</math> 答：12 本</p> <p>想想看，「累積本數」和「兒獎券張數」的關係可以怎麼表示呢？</p>	<p>② 每 5 張兒獎券可以換 3 枝鉛筆。 <b>集合</b></p> <p>① 兒獎券張數和鉛筆枝數的關係，用「比」怎麼記？ 兒獎券張數和鉛筆枝數的關係，用「比」記成 5:3。</p> <p>在「5:3」中，我們稱 5 是這個比的前項，3 是這個比的後項。 <b>定義與解釋</b></p>
<p>在數學中，我們常用比來表示兩個數量的關係。例如：在「閱讀存摺」中，每累積 2 本可以換 1 張兒獎券，我們說累積本數和兒獎券張數比是「2 比 1」，記作「2:1」，其中「:」是比的符號。 <b>定義與解釋</b></p> <p><b>做做看</b> 老師鼓勵班上學生多運動，每完成 3 次「運動 30 分鐘」，可以換 2 瓶運動飲料。 (1) 力行換了 4 瓶運動飲料，他 (2)「運動 30 分鐘的次數」和完成幾次「運動 30 分鐘」？ 「運動飲料的瓶數」關係，用比怎麼表示？ <b>集合</b></p>	<p>② 鉛筆枝數和兒獎券張數的關係，用「比」怎麼記？ 這個比的前項是多少？後項是多少？ 這個比表示什麼意思？ <b>做做看</b> <b>集合</b></p> <p>超市舉辦環保活動，15 顆廢電池可以換 4 個橡皮擦。 (1) 廢電池數量和橡皮擦數量的比，要怎麼記？( ) 它的前項是( )，後項是( ) (2) 橡皮擦數量和廢電池數量的比，要怎麼記？( ) 它的前項是( )，後項是( )</p>
<p>100 配合習作 國語科 本頁是讓學生透過生活中的交易情境，解決簡單數量間的交易關係， 比值的學習經驗。 <b>教學指引</b></p>	<p><b>素養題</b> 防疫期間，小明家買了一臺二氧化氯消毒噴霧機，想抑制病菌。二氧化氯水的調配比例為二氧化氯：水 = 1:50。 小明用量杯先倒了 20 杯水到容器中，再依比例倒二氧化氯。 算算看，小明要倒幾杯的二氧化氯？ <b>部分-部分</b></p> <p>1. 本頁及次頁是讓學生透過生活情境，認識「比」和「比值」的意義與表示法。 2. 建議教師向學生了解「比」，是表示兩個數量的關係，所以前項和後項的位置不可 <b>教學指引</b></p>

註：國小課本內容引自《國小數學六上課本》(頁 108-109)，康軒文教事業，2021，作者。2021 康軒文教事業股份有限公司版權所有。

關於教案的分析，我們主要有二個分析：「活動提供的學習程度」與「七種題目類型」(原來的八種扣除「教學指引」，因為教案中無須撰寫教學指引)。「七種題目類型」以子題為計數單位，主要用來將計數各類別的題數與課本中各類別的題數對照，檢驗教師對於特定題型的出題數量是否受到課本題數數量的影響，例如「計算題」的出題比例高，是否是因為課本中「計算題」的出題比也很高。「活動提供的學習程度」則是參考 Nicol 與 Crespo (2006) 的分析架構，將教案中的活動區分為「程序應用型」與「豐富學習型」。「程序應用型」的題目意味單純套用所學的定義或公式於題目中，而「豐富學習型」比較偏向「探究」或「開放式」的問題，學生會有更多的思考與反思的機會(詳見「貳、文獻探討」，第 80 頁)，本研究中的具體範例如下：

以一杯拿鐵為例，假設我加了 100ML 的咖啡以及 400ML 的牛奶，請問咖啡與牛奶之間的比例為何？(國中個案 M2，程序應用型)

如果你是咖啡店的店長，你會怎麼跟你的店員講述題目〔不同牛奶與咖啡調製比例〕所給你的比例表？並做一個 SOP 表單，為什麼這麼設計表單？〔引出最簡單整數比概念〕(國中個案 M3，豐富學習型)

關於兩次訪談的質性資料部分，使用質性研究中的主題分析法 (Braun & Clarke, 2006) 進行分析，程序是先請兩位碩士生研究助理，透過線上逐字稿轉錄工具 ([www.csutitle.com](http://www.csutitle.com))，

將所有訪談結果轉錄成逐字稿，並校稿完成，接著根據 Dingman 等人 (2021) 的分析架構，由研究者與兩位助理共同對於訪談的結果進行編碼與分類。其中不同意之處會進行反覆的討論與辯證，直到有共識為止。在上述的文獻探討中，我們已經針對 Dingman 等人 (2021) 的分析架構有充分的介紹，在此就資料分析的進行方式，進一步說明如下：

Dingman 等人的架構主要分析教師如何從「教科書」到生成「教案」(形成教學決策推理過程)，此即為本研究所定義的設計教案背後的「理念」。分析過程中，我們先將教師訪談轉成逐字稿，接著根據訪談內容的「主題單位」進行切割 (idea unit，即是訪談內容包含一個主要的觀念；Sherin & van Es, 2009)，例如底下的國中教師 A 的訪談摘錄。分析時，我們先將個案的訪談內容根據談論的主要內容，切割成四個主題 (主題 1-4)，其中主題 1 是關於考慮那些題目情境對於學生比較熟悉，比較適合引起動機因此我們將它歸類到「學習者觀點」類別；接著個案 A 提到比值數學概念的部分，因此主題 2 歸類到「數學觀點」；之後主題 3 提及學生小學學過什麼，然後學生可以透過怎樣的方式學習到分母不為 0，這又再次回到「學習者觀點」；最後提到等值分數如何教學，這比較偏向解釋數學概念的部分，因此主題 4 屬於「數學觀點」，如此，該位個案對於教案設計的理念就會被紀錄為「學習者觀點」2 次、「數學觀點」2 次。根據這些理念類別的不同次數比例，我們可以得知教師們偏向從哪一種推理角度，進行教案設計的決策。

那我想說我們的生活中其實有蠻多這種不同的概念就包含在裡面，像是可能奶茶還有他課本寫的咖啡啊、或者是例如巧克力牛奶之類的，就可以包含在比的概念在裡面。嗯，所以就會從生活中的這些比跟比值來當作引起動機，他們可能會更有感覺一點 [主題 1：學習者觀點]...然後。就後面就接下去來討論，再深入討論說比值的概念，那在比值的概念其實就可以談到比較細項的就是關於...比有分前面跟後面我們稱之為前項跟後項，然後可能有一些它的限制，像是後項不能是零，那原因也可以透過用分數的表示方式 [主題 2：數學觀點]。他們知道...分母不能為零，所以它的後項不能是 0 這樣，然後再來是相等的比，其實相等的比，他們小學也學過，只是小學算是用等值分數的這個表徵來告訴他們 [主題 3：學習者觀點]，利用何謂等值分數，這樣就可以引回來說相對的比其實是相同概念，因為比就是分數的一種表徵而已 [主題 4：數學觀點] (國中教師 A 對於教案設計的想法)

此外，關於是否修改教案部分，透過三位研究者 (作者與 2 位助理)，共同反覆閱讀其逐字稿與教案，共同歸納出來四種願意修改題目的類別：「新增數學內容」、「刪除原題目」、「修改原題目設計/教學」、「使用國小/國中課本題目」，與一種不願意修改的類別：「國中與國小數學內容差異太大」。並據此分類架構對於逐字稿進行分析。

## 肆、研究結果

## 一、國小與國中職前教師在「課程注意」向度的表現

## (一) 總凝視時間：「題目」、「定義與解釋」、「教學指引」

表 2 呈現國小與國中職前教師分別在閱讀「國小課本」與「國中課本」的平均總凝視時間 (total fixation duration)。從表中可以發現國小組教師不論在閱讀國小課本或國中課本，其總凝視時間皆高於國中組教師。

表 2

兩組教師在閱讀「國小課本」與「國中課本」的平均總凝視時間 (sec)

	國小 (n = 5)		國中 (n = 5)	
	M	(SD)	M	(SD)
閱讀國小課本	60.44	(39.81)	16.13	(6.57)
閱讀國中課本	27.83	(16.40)	13.34	(7.16)

表 3 與表 4 呈現兩組教師在閱讀「國小課本」與「國中課本」中「題目」、「定義與解釋」、「教學指引」三個向度的平均總凝視時間與凝視時間比例。從中我們可以發現兩組教師在國小課本的「題目」花費將近 80% 的凝視時間，其次是「教學指引」與「定義與解釋」，接近 10%。國中課本方面，雖然兩組教師依然在題目花費最多時間，但已經降到大約 65%，定義與解釋則是在 21% 上下，最後才是教學指引。

表 3

兩組教師在閱讀「國小課本」中「題目」、「定義與解釋」、「教學指引」三個向度的平均總凝視時間與凝視比例

國小課本	題目		定義與解釋		教學指引	
	M	(SD)	M	(SD)	M	(SD)
國小組						
凝視時間 (sec)	47.39	(28.96)	5.81	(3.18)	7.25	(11.85)
凝視比例 (%)	78.4%		9.6%		12.0%	
國中組						
凝視時間 (sec)	13.15	(4.75)	1.36	(0.64)	1.61	(2.26)
凝視比例 (%)	81.6%		8.4%		10.0%	

表 4

兩組教師在閱讀「國中課本」中「題目」、「定義與解釋」、「教學指引」三個向度的平均總凝視時間與凝視比例

國中課本	題目		定義與解釋		教學指引	
	<i>M</i>	( <i>SD</i> )	<i>M</i>	( <i>SD</i> )	<i>M</i>	( <i>SD</i> )
國小組						
凝視時間 (sec)	18.03	(11.53)	5.68	(2.35)	4.12	(2.62)
凝視比例 (%)	64.8%		20.4%		14.8%	
國中組						
凝視時間 (sec)	8.75	(5.24)	2.96	(1.80)	1.62	(0.53)
凝視比例 (%)	65.6%		22.2%		12.2%	

## (二) 閱讀國小課本：「計算」、「複合單位」、「部分-部分」、「部分-整體」、「集合」、「放大縮小」、「定義與解釋」、「教學指引」

表 5 與圖 8 是國小與國中職前教師閱讀「國小課本」時，在「課程注意」向度的總凝視時間與凝視時間比例 (fixation proportion) 差異，整體而言，兩組教師在不同內容類型的凝視時間比例的「分布趨勢」大致相同 (圖 8)。最高的凝視比例兩組皆出現在「計算」(國中：24.5%，國小：18.8%)，而相對高 (大於 10%) 的凝視比例分別出現在「集合」(國中：16.1%，國小：16.4%)、「計算」(國中：14.2%，國小：16.4%)、「放大縮小」(國中：14.2%，國小：15.8%) 與「教學指引」(國中：10.0%，國小：12.0%) 五個向度上；而「定義與解釋」(國中：8.4%，國小：9.6%)、「複合單位」(國中：7.8%，國小：7.7%) 與「部分-整體」(國中：4.8%，國小：3.2%) 這三個向度則擁有相對低 (小於 10%) 的凝視比例。

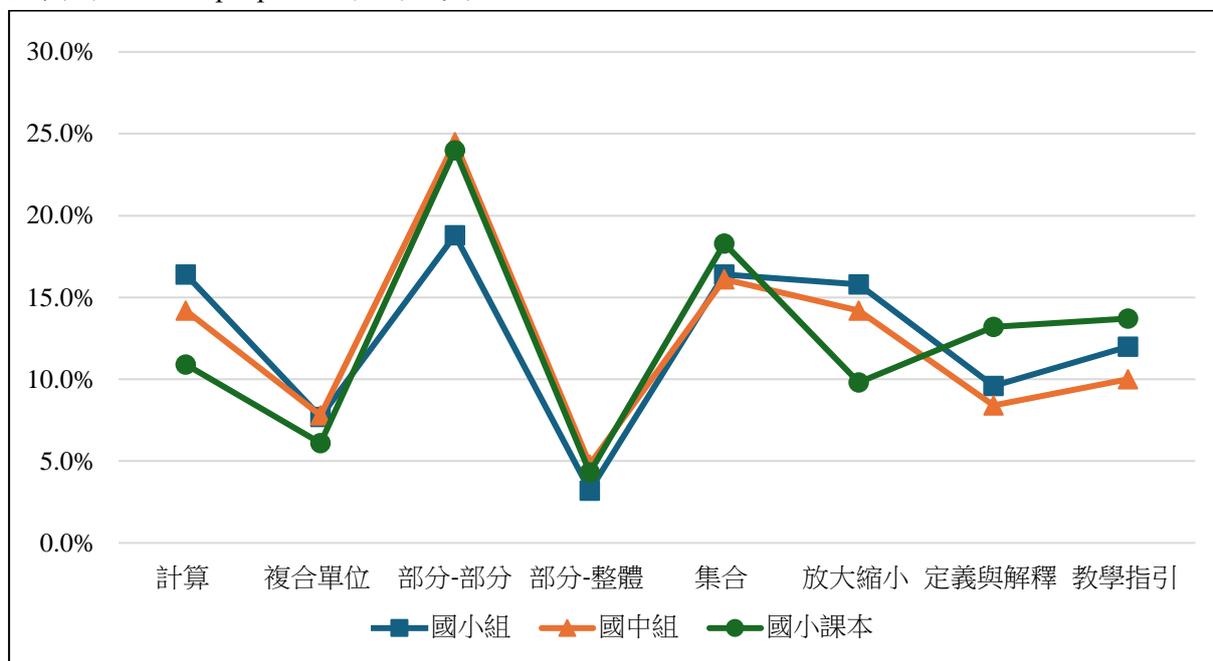
如果進一步與國小課本的內容字數比例對照，兩組教師的凝視比例與課本內容比例有相當程度的一致性，例如課本字數在「部分-部分」的占比最高 (24%)，而這個類別對國中組與國小組教師也是最高的凝視比例 (皆為第一)，而「部分-整體」(4.3%) 與「複合單位」(6.1%) 在課本內容的占比相對低，兩組教師的凝視時間也反映出類似的結果，他們在此兩項度也出現相對較少的凝視時間比例 (國中：4.8%，國小：3.2%；國中：7.8%，國小：7.7%)。

儘管兩組教師的凝視時間比例分布趨勢大致與課本內容比例雷同，但如果只聚焦在國小與國中兩組的比較，我們可以發現兩組教師在「定義與解釋」這個類別 (國中：25.3% > 國小：17.3%) 有比較大差異 (8%)，其餘的差距都在 3% 以內，導致這個差異的可能原因，也許是國中職前教師對於國小課本較不熟悉，因此需要花費較多的心力去閱讀國小課本中的定義或解釋。

此外如果是比較兩組教師與課本內容比例的差異，國小組在「部分-部分」(課本：24.0% > 國小：18.8%)、「計算」(國小：16.4% > 課本：10.9%)、「放大縮小」(國小：15.8% > 課本：9.8%) 與課本內容有較大的差距 (相差約在 5%–6% 間)，而國中組則是在「放大縮小」(國中：14.2% > 課本：9.8%)、「定義與解釋」(課本：13.2% > 國中：8.4%) 有相對多一點的差距 (約在 4%–5% 間)。整體而言，國小組與課本字數的差距略微高一點，國中組則於課本字數比例較為靠近。

圖 8

國小與國中職前教師閱讀「國小課本」時，在「課程注意」向度的總凝視時間與凝視時間比例（fixation proportion）的差異



註：課本=內容字數%

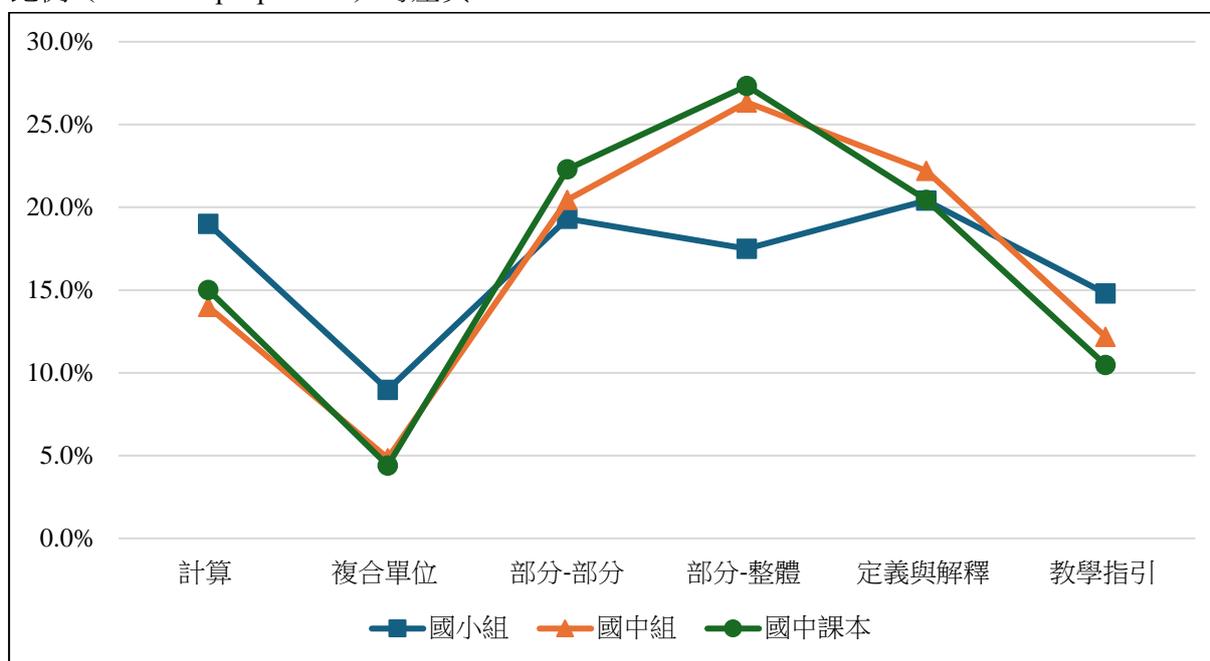
### （三）閱讀國中課本：「計算」、「複合單位」、「部分-部分」、「部分-整體」、「集合」、「放大縮小」、「定義與解釋」、「教學指引」

表 6 與圖 9 呈現兩組教師在閱讀國中課本總凝視時間（total fixation duration）與凝視時間比例（fixation proportion）的差異。圖 9 中的結果與上述閱讀國小課本的趨勢相似，兩組教師的凝視時間比例分佈大致與課本內容字數比例的分布趨勢有關聯。但是其中比較值得注意的是「部分-整體」這個向度，國小職前教師與國中教師的凝視比例有明顯的差距（國小：17.5% < 國中：26.3%），將近 9%；此外「計算」與「複合單位」這兩個向度也值得注意，在「計算」中，兩組教師的差距約在 5% 左右（國小：19.0% > 國中：14.0%）；在「複合單位」中，兩組教師的差距則是約為 4%（國小：9.0% > 國中：4.8%）。

另外一方面，如果與課本字數比較，可以發現國中組教師的凝視比例明顯與課本內容字數較為相符，國小教師的差異較大，例如在「部分-整體」上，課本與國小比例相差約 10%，但是與國中只差 1%（課本=27.3%，國小=17.5%，國中=26.3%），此外，國小組在「計算」與「複合單位」與課本的差距也是比較明顯的，大約相差 4%–5%（計算=15.0% vs 19.0%，複合單位=4.4% vs 9.0%），但是同樣的國中組與課本在這兩個向度的差距都不大（小於 1%）。

圖 9

國小與國中職前教師閱讀「國中課本」時，在「課程注意」向度的總凝視時間與凝視時間比例（fixation proportion）的差異



註：課本=內容字數%

由於國小組教師在「計算」的向度中與國中組教師、課本有較大差距（超過 6%），我們進一步呈現質性資料的分析於此。根據訪談結果，大部分（4/5）的國小職前教師表示會將「這些題目在心中都計算過一次」（個案 E1），因此會花費比較多時間；此外，國中課本的計算題出現「負數」的計算（圖 10），也是引起國小組教師較高凝視時間的可能原因之一：「國中有負數的計算，國小沒有」（個案 E4）。

圖 10

負數的比例問題

### 例 1 求比值

求下列各比的比值：

$$(1) (-12) : 20$$

註：引自《國中數學七下課本》（頁 100），翰林出版，2023，作者（<https://reurl.cc/GmbOZ>）。2023 翰林出版事業股份有限公司版權所有。

關於「部分-整體」，國中與國小組教師、課本內容有較大差距（約 9%–10%），進一步分析，這是國中教師在其中一題，「咖啡問題」（圖 11，部分-整體）的凝視比例遠高於國小職前教師所導致，國中組整體平均凝視比例為 13.5%，但是國小組只有 5.5%。這個差異也有可能是國中組教師花費力氣在閱讀圖示，但國小組教師沒有的緣故，這有待未來研究進一步檢驗。

表 5  
國小與國中職前教師閱讀「國小課本」時，在「課程注意」向度的總凝視時間與凝視時間比例 (fixation proportion) 的差異

組別	計算		複合單位		部分-部分		部分-整體		集合		放大縮小		定義與解釋		教學指引	
	M	(SD)	M	(SD)	M	(SD)	M	(SD)	M	(SD)	M	(SD)	M	(SD)	M	(SD)
國小組																
凝視時間 (sec)	9.89	(7.43)	4.68	(4.36)	11.39	(7.67)	1.96	(0.29)	9.92	(6.24)	9.56	(5.24)	5.81	(3.18)	7.25	(11.85)
時間比例 (%)	16.4%		7.7%		18.8%		3.2%		16.4%		15.8%		9.6%		12.0%	
國中組																
凝視時間 (sec)	2.29	(1.30)	1.26	(0.47)	3.95	(1.96)	0.77	(0.53)	2.60	(1.36)	2.29	(1.25)	1.36	(0.64)	1.61	(2.26)
時間比例 (%)	14.2%		7.8%		24.5%		4.8%		16.1%		14.2%		8.4%		10.0%	
國小課本																
字數	287		160		633		113		483		258		348		361	
比例 (%)	10.9%		6.1%		24.0%		4.3%		18.3%		9.8%		13.2%		13.7%	

表 6  
國小與國中職前教師閱讀「國中課本」時，在「課程注意」向度的總凝視時間與凝視時間比例 (fixation proportion) 的差異

組別	計算		複合單位		部分-部分		部分-整體		定義與解釋		教學指引	
	M	(SD)	M	(SD)	M	(SD)	M	(SD)	M	(SD)	M	(SD)
國小組												
凝視時間 (sec)	5.29	(3.32)	2.50	(3.08)	5.37	(2.84)	4.87	(2.88)	5.68	(2.35)	4.12	(2.62)
時間比例 (%)	19.0%		9.0%		19.3%		17.5%		20.4%		14.8%	
國中組												
凝視時間 (sec)	1.87	(1.17)	0.65	(0.29)	2.73	(1.43)	3.51	(2.63)	2.96	(1.80)	1.62	(0.53)
時間比例 (%)	14.0%		4.8%		20.4%		26.3%		22.2%		12.2%	
國中課本												
字數	334		98		496		608		455		233	
比例 (%)	15.0%		4.4%		22.3%		27.3%		20.5%		10.5%	

圖 11

國中職前教師在「咖啡問題」(部分-整體)的凝視比例遠高於國小職前教師

咖啡是生活中常見的飲料，章首漫畫中可以看到不同品項的咖啡，其中美式咖啡裡含有 1 份濃縮咖啡的液量與 4 份水的液量。

在一杯美式咖啡中，濃縮咖啡的液量：整杯咖啡的液量為  $1:(1+4)=1:5$ ，其比值為  $1\div 5=\frac{1}{5}$ 。

也就是說，濃縮咖啡的液量是整杯的  $\frac{1}{5}$  倍。

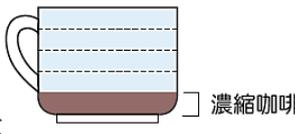
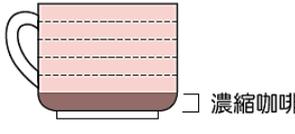
**隨堂練習**

已知一杯咖啡歐蕾裡含有 1 份濃縮咖啡的液量與 5 份牛奶的液量，則：

(1) 一杯咖啡歐蕾中，牛奶的液量：整杯咖啡歐蕾液量 = \_\_\_\_\_ : \_\_\_\_\_。

(2) 牛奶的液量與整杯咖啡歐蕾液量的比值為 \_\_\_\_\_。

(3) 牛奶的液量是整杯咖啡歐蕾液量的 \_\_\_\_\_ 倍。

註：引自《國中數學七下課本》(頁 100)，翰林出版，2023，作者 (<https://reurl.cc/GmnbOZ>)。2023 翰林出版事業股份有限公司版權所有。

依據訪談結果資料，這類型的題目也許對國小職前教師沒那麼陌生，國小課本中已有類似飲料調配的問題(圖 12)：「國中的調配咖啡的問題和國小的調配蘋果汁問題，相對於其他例題，這類的問題在生活中更常被使用。」(國小個案 E2)

圖 12

國小課本「調蘋果汁」問題

① 調蘋果汁。

① 媽媽用 2 杯的蘋果原汁加 3 杯的水調成蘋果汁。蘋果原汁和水的比怎麼記？比值是多少？

2:3      2:3 的比值是  $2\div 3=\frac{2}{3}$ 。

答：蘋果原汁和水的比是 2:3，比值是  $\frac{2}{3}$ 。

② 棠棠用 4 杯的蘋果原汁加 6 杯的水調成蘋果汁。蘋果原汁和水的比怎麼記？比值是多少？

4:6      4:6 的比值是  $4\div 6=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ 。

答：蘋果原汁和水的比是 4:6，比值是  $\frac{2}{3}$ 。

想想看，棠棠調出來的蘋果汁和媽媽調的味道一樣嗎？

註：引自《國小數學六上課本》(頁 112)，康軒文教事業，2021，作者。2021 康軒文教事業股份有限公司版權所有。

## 二、國小與國中職前教師在「課程回應」向度的表現

在此，我們透過二個指標來「活動提供的學習程度」與「七種題目類型」來分析兩組教師在課程回應差異。「教案提供的學習程度」(表 7)，我們可以發現國中組教師有略多的豐富學習型活動，而國小組教師則是略偏重程序應用型的活動。下面是國中組教師關於豐富學習型活動的範例：

請家政老師於上課中設計飲料調製課程，分組製作並記錄所使用的原料量。於數學課時提出數據比較各組所調製出的飲料甜度或酸度差異，討論其中原因。(國中、豐富學習型)

上述範例中，該國中教師規劃同學讓同學探索飲料口味的差異，藉由此過程帶出比例大小和相等的比的概念。這個題目來自於該教師的實際教學經驗，其中甜度或酸度的用料，需要特別設計，避免學生無察覺差異。另外一方面，下面我們呈現國小組教師關於程序應用型活動的範例：

問學生西瓜汁用 2 杯西瓜加上 3 杯水，與 4 杯西瓜，加上 6 杯水，調配出來的味道是否一樣？(1) 將兩種方式的比給寫出來 2:3, 4:6, (2) 找出兩者的比值都是  $\frac{2}{3}$ 。(國小、程序應用型)

上述的例子中，雖然也跟國中的範例一樣，想詢問學生兩者口味是否相同，但是國中的例子較開放，是由學生自己任意調配並記錄數值，沒有限定的數據；然而，最重要的是，國中組沒有提供具體的引導，只有提問，但根據國小組的教案，該教師似乎有明確方式引導學生該如何進行比較，因此被歸類在程序應用類型。

特別說明的是上述兩個分類依據主要是根據「題目所提供的學習機會的多寡」，這可以簡單的解釋學生需要在題目中應用較多的數學知識(如上述第一個問題，條配飲料與探究酸甜差異)，而第二個題目則是已經給予較明確的引導，學生只要跟著題意進行計算即可，這或許也可以簡化成單純比較題目的「開放」或「封閉」程度(豐富學習型較開放)，然而我們並沒有進一步去檢驗實施此活動所需花費的時間、出題者在出題上的文字清晰程度，但是我們相信，這些都是檢驗教學設計的重要指標，很值得未來研究進一步探究。

**表 7**  
教案活動提供的學習程度

活動類型	國小 (n = 5)		國中 (n = 5)	
	次數	比例 (%)	次數	比例 (%)
程序應用型	13	61.9	9	52.9
豐富學習型	8	38.1	8	47.1

註：以活動為單位，一個活動可能有數個子題。

表 8 呈現國小與國中職前教師在教案中的七種不同出題類型差異，從表中我們發現國小組出題類型的變化度較高（國小 6 種題型，國中 3 種題型），其總出題數也較國中組多（國小：53 > 國中：34），這也許是國小課本中的題型本來就比較多元，而國中課本的題目類型比較侷限的關係（國小 6 種題型，國中 4 種題型）。此外，我們發現兩組教師有很明顯的出題偏好，國小組聚焦在「集合」(28.3%)的題目類型，而國中組則是「部分-部分」(38.2%)的題目類型，國小組與第二名的差距約在 17%左右（集合：28.3% > 部分-部分：11.3%），國中組甚至與第二名差距 26%以上（部分-部分：38.2% > 部分-整體：11.8%）。進一步如果將兩組最高題型比例與各自的課本「題數」對照，其結果與課本題數沒有直接的關係，國小組最高的「集合」在國小課本題數是第二高（17.1%），不如第一高是「計算」(29.3%)；國中組的「部分-部分」在國中課本題數中排名第三（16.1%），遠落後於「計算」(38.7%)與「部分-整體」(29.0%)。

**表 8**  
教案與課本題目類型的子題數

類型	國小 (n=5)		國小課本 <sup>a</sup>		國中 (n=5)		國中課本 <sup>a</sup>	
	題數	比例 (%)	題數	比例 (%)	題數	比例 (%)	題數	比例 (%)
計算	5	9.4	12	29.3	5	14.7	12	38.7
複合單位	4	7.5	4	9.8	0	0.0	1	3.2
部分-部分	6	11.3	6	14.6	13	38.2	5	16.1
部分-整體	3	5.7	2	4.9	4	11.8	9	29.0
集合	15	28.3	7	17.1	0	0	0	0
放大縮小	6	11.3	4	9.8	0	0	0	0
定義與解釋	7	13.2	6	14.6	5	14.7	4	12.9
無法判斷 <sup>b</sup>	7	13.2			7	20.6		
總題數	53		41		34		31	

註：比例 = 題數/總題數。

<sup>a</sup> 為求公平的比較，這裡都計算子題數，並非內容字數。

<sup>b</sup> 例如只有寫「出一題情境題」。

### 三、國小與國中職前教師在「課程解釋」向度的表現

#### (一) 兩組教師的解釋分類：「分析課本」、「學習路徑」、「學習者觀點」、「數學觀點」、「過去經驗」

表 9 呈現國小與國中職前教師在「課程解釋」向度的差異，其中可以發現兩組教師主要的解釋大多落在「學習者觀點」和「數學觀點」兩個向度上，其中國小職前教師明顯偏向於學習者觀點（40.9%），而國中職前教師非常聚焦在數學觀點（46.9%），此外，相較於國中組，國小組則有略為較高的比例是根據過去教學經驗來撰寫教案（國小：13.6% > 國中：3.1%）。

**表 9**  
國小與國中職前教師在「課程解釋」向度的差異

解釋類型 <sup>a</sup>	國小 (n = 5)		國中 (n = 5)	
	次數	比例 (%)	次數	比例 (%)
分析課本	2	9.1	4	12.5
學習路徑	2	9.1	4	12.5
學習者觀點	9	40.9	8	25.0
數學觀點	6	27.3	15	46.9
過去經驗	3	13.6	1	3.1

註：<sup>a</sup>一個個案可以有一個以上的類型。

## (二) 閱讀完另外一版本教科書後 (國中或國小) 願意修改教案的比例與原因

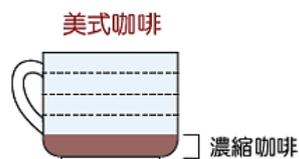
關於閱讀完另外一版本後的修改意願，我們發現國小職前教師對於同意修改教案的比例較高 (國小組 4/5、國中組 2/5)，在願意修改的人中，國小職前教師集中在改變原來的教學方式或題目設計 (f = 5)，例如，國小個案 E5 提到她會在原本教比值的內容上加上國中的咖啡杯類似的比例表徵 (如圖 13)，幫助學生視覺化比例與比值的概念：「國中課本中咖啡杯的比例概念呈現有助於將比例轉換為比值的理解」；國小個案 E3 提到她會在原來的教案中強調比和比值的倍數關係：「當 A : B 時，比值為 A/B，A 即為 B 的 A/B 倍」，並且讓學生練習更多比的放大與縮小的活動：「可以讓學生操作比的放大與所小，更能清楚找出倍數關係」。

相較之下，國中職前教師願意修改的原因分佈比較平均，在「新增數學內容」、「刪除原題目」、「修改原題目設計/教學」、「使用國小/國中課本題目」，四種原因各計數 1 次，例如國中個案 M2 提到可以國小課本小數比例的題目修改到教案之中：「活動三中化簡的部分可再加入小數去計算，[例如，2.5 : 7.5 的化簡] ... 亦可訓練小數化整數的方式 (國小教科書有放小數)」。

另外，在不願意修改的原因中，兩組教師則是都聚焦在認為國中與國小教學內容有所差異，不適合融入國小或國中的教材，例如國小個案 E1：「無，國中內容較為難且整體編排快速，不好使用於國小課程。」國中個案 M1 則是認為兩個群體的學生能力不一樣：「我看完國小教科書的東西之後，它提到就是它要講的比較詳細一點，可是那些東西其實只是會讓小學生比較好懂，但國中生應該已經具備那樣子的理解能力，所以就我自己覺得沒有必要特別說這個。」

**圖 13**

國中課本中關於比例視覺化表徵



註：引自《國中數學七下課本》(頁 100)，翰林出版，2023，作者 (<https://reurl.cc/GmbOZ>)。2023 翰林出版事業股份有限公司版權所有。

#### 四、國小與國中職前教師在「課程注意」、「課程解釋」、「課程回應」的可能關係

從上述表 5 與表 6，我們發現國小組教師在「課程注意」與課程回應兩個向度上，似乎沒有非常直接的關聯性，國小組教師在「部分-部分」(表 5, 18.8%)凝視的比例最高，但是教案中題目出現最多的是「集合」類別(表 8, 28.3%)。相反的，國中組教師則是出現些許的相同性，他們在「部分-整體」的凝視比例最高(表 6, 26.3%)，教案則是「部分-部分」的題型(表 8, 38.2%)，儘管沒有直接類型一致，但 Lamon (1993) 其實是把這「部分-部分」與「部分-整體」這兩個類別放在一起討論(稱之為：「部分-部分-整體」)，因此，根據 Lamon 的理念，國中組教師凝視與出題有某種程度的一致性。

此外，由於個案過少的關係，我們不太容易發現這三個向度間的關係，但兩位國中職前教師在「課程注意」與「課程解釋」上的表現也許可以作為參考(表 10)。我們從表 9 中可得知國中數學教師偏重於數學觀點的課程解釋，但在表 10 中，可以發現 M3 完全沒有出現數學觀點的解釋(0 次)，而 M5 是出現最多數學觀點解釋的個案(6 次，5 位個案平均是 3 次)，其中 M3 在「部分-部分」與「部分-整體」的凝視比例較高，而 M5 在集合的凝視比例較高，但由於個案過少，我們並不能有任何比較有意義的推論，也許這是一個可能的未來研究方向：對於「集合」題目類型或是「部分-部分-整體」題目類型的注意，或許有可能影響國中職前數學教師「數學觀點」的解釋。

表 10

兩位國中職前教師在「課程解釋」與「課程注意」上的表現差異

國中個案	課程解釋 數學觀點	課程注意					
		計算	複合單位	部分-部分	部分-整體	集合	教學指引
M3	0 次	2.78	1.10	4.72	7.19	4.39	1.62
		12.7%	5.0%	<b>21.6%</b>	<b>33.0%</b>	<b>20.1%</b>	7.4%
M5	6 次	3.28	0.75	4.02	6.16	5.65	1.93
		15.0%	3.5%	<b>18.5%</b>	<b>28.3%</b>	<b>25.9%</b>	8.9%

註：單位為「秒」。

#### 伍、結論與討論

本研究主要在探討國小與國中職前教師在閱讀「比和比值」單元的課程覺察力，研究結果發現：(1) 國小職前教師對課本凝視的總平均時間與國中職前教師相差 2 倍以上，這似乎反映了國小職前教師對於數學課本有較高的「課程注意」程度；(2) 關於教科書「注意」向度(凝視時間比例)，兩組教師對於閱讀不同題型的凝視時間比例分布，與其相對應的課本內容多寡有關，就國小課本，兩組教師較大的凝視比例差異在「部分-部分」上(約 6%)，而國中課本的凝視差異則是在「部分-整體」的題型上(約 9%)。此外，與課本內容

相較，國小組不論在國小或是國中課本，其與課本的內容比例差異較大，相較於國中組則是與課本的內容比例較相近。(3) 關於教科書「回應」向度(教案設計)，兩組教師出現明顯差異，國小職前教師出題的題型較多元，且偏重「集合」的題型(32.6%)；反之，國中職前教師的出題題型較侷限，並且著重「部分-部分」的題型(44.8%)。(4) 關於教科書「解釋」向度，國小組教師主要考量「學習者觀點」(40.9%)進行教案設計，而國中組教師主要依據「數學觀點」(46.9%)進行教案設計。(5) 國小組教師比國中組教師更願意在觀看另外一年段教科書後，修改自己的教案(4/5 vs 2/5)。(6) 不同題目類型的凝視比例與教案設計沒有非常明顯的關聯性，但國中組的「部分-整體」凝視時間與出題結果叫相符；此外，對於「集合」題目類型或是「部分-部分-整體」題目類型的注意，或許有可能影響國中職前數學教師「數學觀點」的解釋。

據此研究結果，本研究討論如下：

## 一、課程注意

### (一) 兩組教師在總平均總凝視時間差異

過去的研究指出，台灣國小教師偏向如實的使用教科書，教學時普遍以課本中的例題和教學歷程為主要依據。例如徐偉民(2017)調查45位國小教師如何使用數學教科書，研究結果發現在這些教師所有使用的709題問題中，完全或幾乎與課本相同幾乎接近100%(=699/709)；此外，如果只看教師的教學，其解題歷程與課本例題完全相同或是幾乎相同的，也在509題中佔了超過95%(=492/509)。反之，國中數學教師，雖然原則上也是使用教科書，但是對於題目的使用與解題歷程的講述較為自主，例如林彥伶(2011, 頁26)研究10位不同年資的國中數學老師如何使用教科書，研究結果發現多數教師都會完整的使用教科書的內容，但是會自己組織教學流程，並且適時補充額外的題目供學生練習：「我會將課本每個單元的概念拆成幾段，分段教，每次教完課本的習題後，觀念教完後，立刻要求學生打開我們所選用的講義，立刻多演練幾題。」

本研究結果發現國小職前教師與國中職前教師的總平均凝視時間具有明顯的差異，在閱讀國小課本方面，兩組教師的平均凝視時間相差約4倍(國小教師=60.44 vs. 國中教師=16.13)，而閱讀國中教材方面，兩組教師也差了約2倍(國小教師=27.83 vs. 國中教師=13.34)。這個結果與上述的過去研究相似，國小教師似乎較偏向直接使用教科書的內容，反之，國中教師則是較為自主的使用教科書。這也許是造成兩組教師凝視時間明顯差異的原因。

另外一方面，如果單純比較兩組教師在閱讀「國小教材」與「國中教材」的平均凝視時間差異，國小職前教師在兩者之間相差約2.2倍(國小=60.44 / 國中=27.83)，國中職前教師相差約1.2倍(國小=16.13 / 國中=13.34)，其中國中職前教師的表現與課本內容較多寡相似，根據表1，兩種教科書的總字數比例也接近1.2倍(國小=2643 / 國中=2224)。進一步分析國小職前教師差異的原因，我們發現國小職前教師停留在題目的時間比較長，這

意味著他們需要花費時間去理解教科書的內容，這可能是因為相較於國小數學教師，國中數學教師數學知識較佳，並且對於教學較有自信 (Depaepe et al., 2015; Ezaki et al., 2024)。此外，另外一個可能原因是如果只看課本題數，不管字數的話，國小課本有 41 題，國中課本有 31 題 (表 8)，國小教師花費比較多心力在閱讀不同題目上，這同樣可能是國小教師較缺乏自信或是較依賴教科書所造成的結果。最後，如果從 HCK 的角度來看，這樣的結果似乎反應國中職前教師有較好的 HCK，不需要花費過多的心力閱讀另一個年段的教科書，反之，對國小職前教師而言，就需要花費較多的心力去閱讀，當然這也跟國中職前教師對於教科書的信念有關 (誠如上述，對教科書的使用比較自主，不會拘泥在各個教科書細節上)。

從「題目」、「定義與解釋」、「教學指引」這三個向度來看，兩組職前教師都集中在題目的閱讀上，但是在國中課本中，定義與解釋的閱讀比例兩組都有明顯的提高 (國小教師，「定義與解釋」：閱讀國小課本=9.6%，閱讀國中課本=20.4%；國中教師，「定義與解釋」：閱讀國小課本=8.4%，閱讀國中課本=22.2%)。這樣的結果告訴我們，課本中題目的重要性，兩組教師都是最關注課本中的題目，這與徐偉民 (2013, 2017) 的研究一致，都強調分析題目與設計題目的重要性。此外，「定義與解釋」向度，這也許是國中數學課本內容難度較高，教師需要多專注在「定義與解釋」的閱讀上，同時，國中課本中的定義也會使用抽象代數符號，閱讀時需要解碼，這也許也是加深兩組教師凝視時間的原因。

儘管上述結果可能是因為課本內容比例多寡的原因造成 (如「題目」的比例在課本中本來就較高，占國中課本約 70%，國小課本約 84%)，但是我們也發現兩組教師在國小課本「定義與解釋」的凝視比例略少於課本中「定義與解釋」的內容比例 (約 5%)，而國中組教師在國中課本「定義與解釋」的凝視比例，稍稍高於課本的內容比例 (約 2%)，因此內容比例不是絕對因素，上述結果仍值得我們參考。

## (二) 兩組教師在八個 AOIs 平均凝視時間分布的差異

教科書的凝視時間與閱讀者的認知負荷有關，一般而言「內容的難度」、「內容的熟悉度」、「文字的多寡」等都是影響閱讀者認知負荷的因素 (林宓雯、吳昭容, 2016; Jian & Wu, 2015; Mézière et al., 2023)。從這個角度來看，兩組教師整體的凝視比例趨勢與課本的內容比例大致相符是一個合理的結果。儘管如此，我們仍然發現有兩個例外的類別，分別是：國小組的「計算」、「部分-部分」與「放大縮小」，國小組教師在這三個兩類別的凝視比例與國小課本差距略高 (約 5-6%間)。此外，兩組教師在國中課本的教學指引有比課本內容更高的比例 (國中約 2%、國小約 5%)，過去的研究已指出職前教師不論在學科教學知識 (PCK) 或是教師覺察力 (teacher noticing) 都顯著低於在職教師 (Bastian et al., 2022; Dreher & Kuntze, 2015)，因此兩組教師均花費比課本內容比例更高的凝視時間在「教學指引」上，也許是一個我們可以預期的結果，然而比較特別的是國小教師在兩種教科書的「計算」凝視時間皆高於課本內容比例；國中組則是指出現在國小教科書的計算 (略高於 3%)。我們先討論國中組教師的表現，他們在國小課本「計算」類別的凝視時間高於課本內容 (略高

於 3%)，但是對於國中課本則是略低於課本內容 (1%)，這或許可以解讀為對國小課本不熟悉所致 (Males & Setniker, 2019)。但國小組教師則是在兩種年段教科書的「計算」閱讀比例都高於課本內容比例，根據訪談結果，大部分的國小職前教師表示會將「這些題目在心中都計算過一次」，這也許是國小職前教師造成高閱讀比例的原因，這個結果似乎也反映出國中職前教師對於數學比較有自信 (Anderson & Taner, 2023)，不需要真的計算這些題目。此外，國中課本的計算題出現「負數」的計算，也是引起國小組教師較高凝視時間的可能原因之一。此外，國小組的結果也呼應了徐偉民 (2013) 關於國小教師使用教科書的個案研究，他發現國小教師很重視學生的「計算」能力，如果教科書中計算的練習量不夠時，還會出更多題目訓練學的計算能力。

另外一方面，我們也發現國小教師在國小課本「定義與解釋」凝視比例小於課本內容比例，國中課本的「定義與解釋」凝視比例也比國中教師低，這似乎反應國小教師比較不注重「數學」的定義。過去研究也提到國小與國中教師在這方面的差異，國中教師比較偏重以「數學」為中心，而國小教師比著重「教學策略」 (Anderson & Taner, 2023)。

如果屏除課本內容字數，單純看兩組教師的凝視差異，有三個比較值得注意的地方，分別是 (1) 國中小課本「計算」的凝視時間、(2) 國中課本「定義與解釋」的凝視時間、(3) 國中課本「部分-整體」的凝視時間，關於「計算」的凝視時間的差異 (國小組 > 國中組)，上述已經嘗試提供解釋，很可能是國小職前教師缺乏數學自信的因素，因此每一計算題都要先自己先算過，所以花費比較多的時間。此外，關於閱讀國中課本「定義與解釋」的差異 (國中組 > 國小組)，如同上述，可能是國小職前教師較不注重數學的定義。

最後，關於閱讀國中課本「部分-整體」的差異 (國中組 > 國小組)，這主要來自於「咖啡問題」 (圖 11)，而這對國小職前教師而言，並不是陌生的題目，國小組在國小課本中已有類似的題目 (圖 12，國小課本，第一題「調果汁問題」；儘管這屬於「部分-部分」的題目，但是結構相仿，都是飲料的調配)，另外一方面，這個文字題是國中課本中第一次出現的例題，國中組可能思考其後的教案設計，所以會特別認真閱讀關係。Males 與 Setniker (2019) 的研究指出職前教師會特別聚焦在這個單元第一次出現的題目類型，特別認真閱讀，這與上述結果一致。

上述結果的可以幫助我們瞭解教師閱讀教科書的行為模式，不同組教師在意的是哪部分的内容，這可以反饋到未來教科書的編制，例如我們發現國小教師對於「計算」問題的重視，國中教師對於「定義與解釋」、的重視，因此，對於國小職前教師課本中的計算問題應該提供充分的解答與充分的計算問題；對於國中職前教師則是應該充分且詳細的撰寫定義與解釋的內容，如此，方可藉由課本的內容，幫助教師設計更好的比和比值的教學。除此之外，這也可以幫助我們瞭解職前教師是如何的閱讀教科書，如何地與教科書互動，從這個研究我們發現，兩組教師基本上是依循內容多寡進行閱讀，但是在職教師未必有類似的結果。最後，這個研究做為前導性研究，可供未來量化研究的參考，藉由更多的樣本，可以討論凝視題目類型與教案品質間的關係，瞭解特別關注某一類型的題目，是否能決定教案設計的品質。

## 二、課程解釋

國小組與國中組教師的課程解釋有明顯的差別，國小組偏重在「學生學習」，國中組偏重在「數學概念」本身，這與過去的研究相符，國小與國中的情意領域的研究指出，國小教師偏重於「教學策略」與學生的「學習歷程」，而國中教師偏重「數學概念」的教學，以及學習數學的「邏輯結構」(Anderson & Taner, 2023; Dede, 2015; Jung et al., 2019)。

## 三、課程回應

國小職前教師集中在「集合」的題目類型，國中職前教師則是集中在「部分-部分」的問題上，不過國中組的「部分-部分」多是以咖啡的比例調配為情境(圖 11)，因此，兩組教師的出題類型其實都比較偏向課本中首次出現的正式題目類型。誠如上述，這與 Males 與 Setniker (2019) 的研究結果一致，教師會特別聚焦在首次遇到的課本活動類型。此外如果以最適合發展比例概念的角度來看，Lamon (1993) 認為「集合」是最佳的題目，儘管「部分-部分」的題目對學生相對來說比較簡單，但是學生能夠使用更多簡易的方法解題成功，並不一定能夠連結到比例概念上，據此觀之，國小教師的教案設計較佳，但是，這個結果可能是受課本題目編排順序所致(國小課本先「集合」後「部分-部分」；國中課本先「部分-部分」，但是無「集合」類型的題目)。

國去研究指出，小學教師比中學教師接觸更多的專業成長，對於改變教學有較高的接受度(Jung et al., 2019)；另外一方面，Anderson 與 Taner (2023) 的研究指出中學的專家教師比小學的專家教師對於教學更有自信，也有更高的自我效能；此外，小學的教師在教學上在意的層面比中學教師更廣，中學教師比較關心師生互動方面，而小學教師除了師生互動外，也會在意課程的設計、培養學生的自主性、同儕之間的合作學習等。由此觀之，本研究中國小教師比較願意更改教案，而國中教師相對比較不願意在看過另一個年段課本後更改教案，似乎與文獻的看法一致。

## 四、「課程注意」、「課程解釋」與「課程回應」的可能關係

### (一)「課程注意」(凝視時間比例)與「課程回應」(教案設計題數比例)的關係

根據本研究的結果，我們沒有非常明顯的證據發現國小組教師在「課程注意」(凝視時間)與「課程回應」(教案設計題數)具有關聯性，但是國中組部分則是有潛在的相關性。就國小組部分，其出題數最高的比例是「集合」類型的問題，但是國小組最高的凝視比例是「計算」的題型；另外一方面，國中組出題數最高比例的類型是「部分-部分」，但是如同上述，如果將「部分-部分」與「部分-整體」計算的話，出題比例的趨勢與凝視比例的趨勢相符，特別是國中組教師的「部分-部分」題型，大多來自課本中「部分-整體」的咖啡問題(圖 11)，誠如前述，有些國外學者(例如：Lamon, 1993)不會特別區分「部分-部分」與「部分-整體」這兩類型的題目，而是將它們放在同一個類別。

上述國小組的結果與文獻不一致，在 Males 與 Setniker (2019) 的研究中，他們發現職前教師會在想要出題的題目有更多的凝視時間，但是國中組教師則是與研究結果相符，他們在咖啡問題的凝視時間比例偏高，這也反映在出題上，造成兩組差異的原因可能是如同前述，國小教師在出題時考量的面向比較多元，不是只有單一聚焦在數學內容上 (Anderson & Taner, 2023; Dede, 2015; Jung et al., 2019)。

## (二) 「課程注意」(凝視時間)與「修改教案與否」的關係

綜合兩組的表現來看，我們發現「定義與解釋」、「部分-整體」、「計算」是三個比較關鍵的指標，修改與不修改的教師在這三個向度上呈現比較大凝視比例差異(約莫 5%–10%)，首先「定義與解釋」似乎反映了教師對於數學概念的重視程度；「部分-整體」是國中課本中首次遇到且相對簡單易懂的題目情境；「計算」部分，我們發現國小組教師特別重視計算，不論國中課本與國小課本的閱讀都相當重視，而國中組教師在遇到不熟悉的國小課本也會特別去看計算這的題型，因此也許可以推論「計算」是兩組教師都很在意的題型。此外，國小組的結果也呼應了徐偉民(2013)關於國小教師使用教科書的個案研究，他發現國小教師很重視學生的「計算」能力，如果教科書中計算的練習量不夠時，還會出更多題目訓練學的計算能力。

## 未來研究

在本研究中，我們並未探討教科書中圖文閱讀的差異，然而林宓雯與吳昭容(2016)研究發現，不同的文本內容會造成讀者圖文閱讀的差異，研究者建議未來研究可以著眼於比和比值教科書中圖文閱讀的比較差異，幫助我們進一步釐清教科書閱讀與教學設計的關聯性。

本研究教案設計並沒有分析受試者文字精煉度與題目語意的清晰度，比較著重於程序「應用型」與「豐富學習型」(封閉或是開放的題型)，但是文字與題意也是重要指標，建議未來研究者能夠納入更多的分析因子。

## 研究限制

本研究為質性研究中的個案研究，主要透過個案的教科書閱讀眼動資料與教案設計的結果，儘管我們使用統計數據進行報導，但是主要目的在呈現一種可能或潛在的趨勢，為未來研究提供一個探索的開端，其研究設計不符合實驗研究設計，研究結果也無法推論到所有母群體。

## 誌謝

本文由國家科學及技術委員會〔國科會〕計畫 MOST 111-2410-H-007-080-MY3 補助支持，特此感謝。

## 參考文獻

- 吳昭容 (2019)。眼球追蹤技術在幾何教育的應用與限制。臺灣數學教育期刊, 6(2), 1–25。 [Wu, C.-J. (2019). Applications and limitations of eye tracking in geometry education, *Taiwan Journal of Mathematics Education*, 6(2), 1–25. (in Chinese)] [https://doi.org/10.6278/tjme.201910\\_6\(2\).001](https://doi.org/10.6278/tjme.201910_6(2).001)
- 林勇吉、金鈴 (2014)。探討學生對 HCK 取向與非 HCK 取向教學的知覺。科學教育月刊, 369, 2–16。 [Lin, Y.-C., & Chin, C. (2014). High school students' perceptions on the HCK and problem-solving teaching approaches. *Science Education Monthly*, 369, 2–16. (in Chinese)]
- 林彥伶 (2011)。新竹縣國中數學教師選用教科書歷程及選用因素之分析 (碩士論文)。中原大學。 [Lin, Y.-L. (2011). *Analysis of the process and factors in textbook selection among the math teachers in Hsin-Chu county* (Master's thesis). Chung Yuan Christian University. (in Chinese)] <https://doi.org/10.6840/CYCU.2011.00196>
- 林宓雯、吳昭容 (2016)。從眼動型態探討閱讀幾何文本的視覺化與推理歷程。教育學刊, 47, 41–77。 [Lin, T.-W., & Wu, C.-J. (2016). Examining eye movement to explore visualization and reasoning during the reading of geometric texts. *Journal of Education Research*, 47, 41–77. (in Chinese)] <https://doi.org/10.3966/156335272016120047002>
- 林碧珍 (2010)。比與比值初始概念的教學初探。新竹教育大學教育學報, 27(1), 127–159。 [Lin, P.-J. (2010). The exploration of teaching initial concept of ratio. *Educational Journal of NHCUE*, 27(1), 127–159. (in Chinese)] <https://doi.org/10.7044/NHCUEA.201006.0127>
- 徐偉民 (2013)。國小教師數學教科書使用之初探。科學教育學刊, 21(1), 25–48。 [Hsu, W.-M. (2013). An exploratory study of mathematics textbook use by elementary school teachers. *Contemporary Journal of Science Education*, 21(1), 25–48. (in Chinese)] <https://doi.org/10.6173/CJSE.2013.2101.02>
- 徐偉民 (2017)。小學數學教科書使用之探究。教科書研究, 10(2), 99–132。 [Hsu, W.-M. (2017). Investigation of elementary mathematics textbooks use in classrooms in Taiwan. *Journal of Textbook Research*, 10(2), 99–132. (in Chinese)]
- 康軒文教事業 (2021)。國小數學六上課本。作者。 [Kst Education Corp. (2021). *Elementary school mathematics textbook – 6th grade, 1st semester*. Author. (in Chinese)]
- 陳學志、賴惠德、邱發忠 (2010)。眼球追蹤技術在學習與教育上的應用。教育科學研究期刊, 55(4), 39–68。 [Chen, H.-C., Lai, H.-D., & Chiu, F.-C. (2010). Eye tracking technology for learning and education. *Journal of Research in Education Sciences*, 55(4), 39–68. (in Chinese)] <http://phpan.ndhu.edu.tw/EYE4EDU.pdf>
- 楊德清、鄭婷芸 (2015)。臺灣、美國與新加坡國中階段幾何教材內容之分析比較。教育科學研究期刊, 60(1), 33–72。 [Yang, D.-C., & Cheng, T.-Y. (2015). Geometry content of middle school textbooks in Taiwan, the United States, and Singapore. *Journal of Research in Educational Sciences*, 60(1), 33–72. (in Chinese)] [https://doi.org/10.6209/JORIES.2015.60\(1\).02](https://doi.org/10.6209/JORIES.2015.60(1).02)

- 翰林出版 (2023)。國中數學七下課本。作者。[Han Lin Publishing. (2023). *Junior high school mathematics textbook—7th grade, 2nd semester*. Author. (in Chinese)] <https://reurl.cc/GnnbOZ>
- 賴彥男 (2021)。差異化教學策略融入國中數學教學之準實驗研究—以國中第二冊第三章「比例」為例 (未出版碩士論文)。國立臺灣師範大學。[Lai, Y.-N. (2021). *Quasi-experimental research on the integration of differentiated teaching strategies into mathematics teaching in junior high schools—Taking “proportion” in chapter 3 of volume 2 of junior high school as an example* (Unpublished master’s thesis). National Taiwan Normal University. (in Chinese)]
- Adjage, R., & Pluvinaige, F. (2007). An experiment in teaching ratio and proportion. *Educational Studies in Mathematics*, 65(2), 149–175. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9049-x>
- Agathangelou, S. A., & Charalambous, C. Y. (2021). Is content knowledge pre-requisite of pedagogical content knowledge? An empirical investigation. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 24(5), 431–458. <https://doi.org/10.1007/s10857-020-09466-0>
- Anderson, J., & Taner, G. (2023). Building the expert teacher prototype: A metasummary of teacher expertise studies in primary and secondary education. *Educational Research Review*, 38, 100485. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2022.100485>
- Ball, D. L., & Bass, H. (2009, March 1–4). *With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners’ mathematical futures* [Paper presentation]. The 43rd Jahrestagung für Didaktik der Mathematik, Oldenburg, Germany.
- Bastian, A., Kaiser, G., Meyer, D., Schwarz, B., & König, J. (2022). Teacher noticing and its growth toward expertise: An expert–novice comparison with pre-service and in-service secondary mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 110(2), 205–232. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10128-y>
- Beach, P., & McConnel, J. (2019). Eye tracking methodology for studying teacher learning: A review of the research. *International Journal of Research & Method in Education*, 42(5), 485–501. <https://doi.org/10.1080/1743727X.2018.1496415>
- Blömeke, S., & Kaiser, G. (2014). Theoretical framework, study design and main results of TEDS-M. In S. Blömeke, F.-J. Hsieh, G. Kaiser, & W. H. Schmidt (Eds.), *International perspectives on teacher knowledge, beliefs and opportunities to learn: TEDS-M results* (pp. 19–47). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-94-007-6437-8\\_2](https://doi.org/10.1007/978-94-007-6437-8_2)
- Book, C. L., & Freeman, D. J. (1986). Differences in entry characteristics of elementary and secondary teacher candidates. *Journal of Teacher Education*, 37(2), 47–51. <https://doi.org/10.1177/002248718603700209>
- Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, 3(2), 77–101. <https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa>
- Breyfogle, M. L., Roth McDuffie, A., & Wohlhuter, K. A. (2010). Developing curricular reasoning for grades pre-K-12 mathematics instruction. In B. J. Reys, R. E. Reys, & R. Rubenstein (Eds.), *Mathematics curriculum: Issues, trends, and future directions* (pp. 307–320). National Council of Teacher of Mathematics.
- Cohen, D. K., Raudenbush, S. W., & Ball, D. L. (2003). Resources, instruction, and research. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 25(2), 119–142. <https://doi.org/10.3102/01623737025002119>
- Cortina, K. S., Miller, K. F., McKenzie, R., & Epstein, A. (2015). Where low and high inference data converge: Validation of CLASS assessment of mathematics instruction using mobile eye tracking with expert and novice teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(2), 389–403. <https://doi.org/10.1007/s10763-014-9610-5>

- de Guzman, A. B., & Adamos, J. L. (2020). Like the layers of an onion: Curricular noticing as a lens to understand the epistemological features of the Philippine K to 12 secondary mathematics curriculum materials. *Educational Research for Policy and Practice*, 19(3), 389–409. <https://doi.org/10.1007/s10671-020-09264-8>
- Dede, Y. (2015). Comparing primary and secondary mathematics teachers' preferences regarding values about mathematics teaching in Turkey and Germany. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(1), 227–255. <https://doi.org/10.1007/s10763-013-9483-z>
- Depaepe, F., Torbeyns, J., Vermeersch, N., Janssens, D., Janssen, R., Kelchtermans, G., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2015). Teachers' content and pedagogical content knowledge on rational numbers: A comparison of prospective elementary and lower secondary school teachers. *Teaching and Teacher Education*, 47, 82–92. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2014.12.009>
- Dietiker, L., Males, L. M., Amador, J. M., & Earnest, D. (2018). Curricular noticing: A framework to describe teachers' interactions with curriculum materials. *Journal for Research in Mathematics Education*, 49(5), 521–532. <https://www.jstor.org/stable/pdf/10.5951/jresmetheduc.49.5.0521.pdf>
- Dingman, S. W., Teuscher, D., Kasmer, L. A., & Olson, T. A. (2019). Dissecting curricular reasoning: An examination of middle grade teachers' reasoning behind their instructional decisions. In S. Otten, A. G. Candela, Z. de Araujo, C. Haines, & C. Munter (Eds.), *Proceedings of the 41st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 44–52). University of Missouri. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED606931.pdf>
- Dingman, S., Teuscher, D., Olson, T. A., & Kasmer, L. A. (2021). Conceptualizing curricular reasoning: A framework for examining mathematics teachers' curricular decisions. *Investigations in Mathematics Learning*, 13(4), 267–286. <https://doi.org/10.1080/19477503.2021.1981742>
- Dreher, A., & Kuntze, S. (2015). Teachers' professional knowledge and noticing: The case of multiple representations in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 88(1), 89–114. <https://doi.org/10.1007/s10649-014-9577-8>
- Ezaki, J., Li, J., & Copur-Gencturk, Y. (2024). Teachers' knowledge of fractions, ratios, and proportional relationships: The relationship between two theoretically connected content areas. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 22(2), 235–255. <https://doi.org/10.1007/s10763-023-10372-z>
- Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: Development status and directions. *ZDM – Mathematics Education*, 45(5), 633–646. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0539-x>
- Gaudin, C., & Chaliès, S. (2015). Video viewing in teacher education and professional development: A literature review. *Educational Research Review*, 16, 41–67. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.edurev.2015.06.001>
- Glassmeyer, D., Brakonieccki, A., & Amador, J. M. (2021). Identifying and supporting teachers' robust understanding of proportional reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, 62, 100873. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100873>
- Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372–400. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.39.4.0372>

- Hurst, C. (2017). Provoking contingent moments: Knowledge for 'powerful teaching' at the horizon. *Educational research*, 59(1), 107–123. <https://doi.org/10.1080/00131881.2016.1262213>
- Jacobs, V. R., Lamb, L. L. C., & Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169–202. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.41.2.0169>
- Jian, Y.-C., & Wu, C.-J. (2015). Using eye tracking to investigate semantic and spatial representations of scientific diagrams during text-diagram integration. *Journal of Science Education and Technology*, 24(1), 43–55. <https://doi.org/10.1007/s10956-014-9519-3>
- Jung, Y. J., Cho, K., & Shin, W. S. (2019). Revisiting critical factors on teachers' technology integration: The differences between elementary and secondary teachers. *Asia Pacific Journal of Education*, 39(4), 548–561. <https://doi.org/10.1080/02188791.2019.1620683>
- Just, M. A., & Carpenter, P. A. (1980). A theory of reading: From eye fixations to comprehension. *Psychological review*, 87(4), 329–354. <https://doi.org/10.1037/0033-295X.87.4.329>
- Keller, L., Cortina, K. S., Müller, K., & Miller, K. F. (2022). Noticing and weighing alternatives in the reflection of regular classroom teaching: Evidence of expertise using mobile eye-tracking. *Instructional Science*, 50(2), 251–272. <https://doi.org/10.1007/s11251-021-09570-5>
- Krainer, K., Hsieh, F. J., Peck, R., & Tatto, M. T. (2015). The TEDS-M: Important issues, results and questions. In: S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 99–121). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_10)
- Lai, M. L., Tsai, M. J., Yang, F. Y., Hsu, C. Y., Liu, T. C., Lee, S. W.-Y., Lee, M. H., Chiou, G. L., Liang, J. C., & Tsai, C. C. (2013). A review of using eye-tracking technology in exploring learning from 2000 to 2012. *Educational Research Review*, 10, 90–115. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2013.10.001>
- Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(1), 41–61. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.24.1.0041>
- Males, L. M., & Setniker, A. (2019). Planning with curriculum materials: Interactions between prospective secondary mathematics teachers' attention, interpretations and responses. *International Journal of Educational Research*, 93, 153–167. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2018.09.016>
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. Routledge.
- Mézière, D. C., Yu, L., Reichle, E. D., von der Malsburg, T., & McArthur, G. (2023). Using eye-tracking measures to predict reading comprehension. *Reading Research Quarterly*, 58(3), 425–449. <https://doi.org/10.1002/rrq.498>
- Mitchell, R. N., & Marin, K. A. (2015). Examining the use of a structured analysis framework to support prospective teacher noticing. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 18(6), 551–575. <https://doi.org/10.1007/s10857-014-9294-3>
- Nicol, C. C., & Crespo, S. M. (2006). Learning to teach with mathematics textbooks: How preservice teachers interpret and use curriculum materials. *Educational Studies in Mathematics*, 62(3), 331–355. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-5423-y>
- Parish, L. (2010). Facilitating the development of proportional reasoning through teaching ratio. In L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 469–479). MERGA. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED520962.pdf>

- Phelps-Gregory, C. M., & Spitzer, S. M. (2021). Prospective teachers' analysis of a mathematics lesson: Examining their claims and supporting evidence. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 24(5), 481–505. <https://doi.org/10.1007/s10857-020-09469-x>
- Reinke, L. T., Stephan, M., Ayan-Civak, R., & Casto, A. R. (2023). Teachers' press for contextualization to ground students' mathematical understanding of ratio. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 26(3), 335–361. <https://doi.org/10.1007/s10857-022-09531-w>
- Sherin, M. G., & van Es, E. A. (2009). Effects of video club participation on teachers' professional vision. *Journal of Teacher Education*, 60(1), 20–37. <https://doi.org/10.1177/0022487108328155>
- Shinno, Y., & Mizoguchi, T. (2021). Theoretical approaches to teachers' lesson designs involving the adaptation of mathematics textbooks: Two cases from *kyouzai kenkyuu* in Japan. *ZDM – Mathematics Education*, 53(6), 1387–1402. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01269-8>
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14. <https://www.wcu.edu/webfiles/pdfs/shulman.pdf>
- van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2008). Mathematics teachers' "learning to notice" in the context of a video club. *Teaching and Teacher Education*, 24(2), 244–276. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2006.11.005>
- Wyss, C., Rosenberger, K., & Bühner, W. (2021). Student teachers' and teacher educators' professional vision: Findings from an eye tracking study. *Educational Psychology Review*, 33, 91–107. <https://doi.org/10.1007/s10648-020-09535-z>
- Zazkis, R., & Mamolo, A. (2011). Reconceptualizing knowledge at the mathematical horizon. *For the Learning of Mathematics*, 31(2), 8–13. <https://www.jstor.org/stable/pdf/41319556.pdf>

許慧玉、于靖、丁志堅、姚在府、潘柏宇 (2025)。  
數學教育的神經革命：腦科學新興技術之理論與實務應用。  
臺灣數學教育期刊，12 (1)，109–124。  
[https://doi.org/10.6278/tjme.202504\\_12\(1\).004](https://doi.org/10.6278/tjme.202504_12(1).004)

## 數學教育的神經革命：腦科學新興技術之理論 與實務應用

許慧玉<sup>1</sup> 于靖<sup>2</sup> 丁志堅<sup>3</sup> 姚在府<sup>4</sup> 潘柏宇<sup>5</sup>

<sup>1</sup> 國立清華大學數理教育研究所/教育與心智科學研究中心

<sup>2</sup> 中研院數學院士/國立清華大學理學院講座教授

<sup>3</sup> 國立清華大學環境與文化資源學系

<sup>4</sup> 國立清華大學教育心理與諮商學系/竹師教育學院/教育與心智科學研究中心

<sup>5</sup> 東吳大學數學系

本研究探討教育神經科學在數學教育中的應用潛力與挑戰，並嘗試透過魔術方塊的操作過程，闡述空間推理及問題解構能力等認知歷程與其對應的神經基礎。傳統數學教育研究侷限於外顯行為觀察與結果分析，難以掌握學生即時且內隱的認知歷程；而腦科學技術（如 fMRI、EEG、fNIRS）則能深入探索數學學習時的神經機制，彌補傳統方法不足。此外，國際間已有專刊及書籍積極討論神經理解、神經預測及神經介入的跨領域研究架構，反映數學教育與神經科學整合的趨勢。本文進一步提出被動式腦機介面（passive BCI）技術，結合 AI 分析腦波訊號，可即時診斷學生在數學解題中的多元認知策略與視覺化歷程，提升教師對學生解題歷程的掌握。此文章期望推動台灣在數學教育神經科學的創新發展，提供更精準的個別化教學模式與教學現場實用之重要參考。

**關鍵字：**數學教育、神經革命、腦科學、被動式腦機介面

通訊作者：潘柏宇，e-mail：pan740102@gmail.com

收稿：2025 年 4 月 24 日；

接受刊登：2025 年 4 月 24 日。

---

Hsu, H. Y., Yu, J., Ding, T. J., Yao, Z. F. & Pan, B. Y. (2025).

The neuroscience revolution in mathematics education: Theoretical and practical applications of emerging brain technologies.

*Taiwan Journal of Mathematics Education*, 12(1), 109–124.

[https://doi.org/10.6278/tjme.202504\\_12\(1\).004](https://doi.org/10.6278/tjme.202504_12(1).004)

# The Neuroscience Revolution in Mathematics Education: Theoretical and Practical Applications of Emerging Brain Technologies

Hui-Yu Hsu    Jing Yu    Tsu-Jen Ding    Zai-Fu Yao    Bo-Yu Pan

This study reports the potential and challenges of educational neuroscience applications in mathematics education. By analyzing cognitive processes such as spatial reasoning and problem solving through the analogy of solving a Rubik's Cube, we elucidate their underlying neural mechanisms. Traditional mathematics education research relies primarily on observable behaviors and outcome analyses, limiting insights into students' real-time and implicit cognitive processes. In contrast, neuroscience techniques (e.g., fMRI, EEG, fNIRS) offer deeper exploration into the neural foundations of mathematical learning, overcoming traditional methodological limitations. Internationally, special journal issues and book chapters actively discuss interdisciplinary frameworks including neuro-understanding, neuro-prediction, and neuro-intervention, reflecting growing trends toward integrating neuroscience into mathematics education. This article further proposes the application of passive Brain-Computer Interface (passive BCI) technology combined with artificial intelligence for real-time analysis of neural signals. This approach aims to diagnose diverse cognitive strategies and visualization processes employed by students during mathematical problem-solving, thereby enhancing teachers' understanding of students' cognitive processes. Ultimately, this paper seeks to foster innovative developments in Taiwanese educational neuroscience research and provide practical insights for individualized mathematics instruction in classroom contexts.

**Keyword:** Mathematics Education, Educational Neuroscience, Passive BCI

---

Corresponding author : Bo-Yu Pan , e-mail : [pan740102@gmail.com](mailto:pan740102@gmail.com)

Received : 24 April 2025;

Accepted : 24 April 2025.

## 壹、前言

近年來，隨著神經科學與教育學的跨領域整合逐漸成熟，「教育神經科學」(educational neuroscience) 已成為全球教育研究的重要發展趨勢之一 (Ansari et al., 2011; Howard-Jones, 2014)。特別是在數學教育領域，過去以行為觀察與學習成效為主的傳統研究方法，雖提供了豐富的知識累積，卻難以揭示學生在解題過程中潛藏的即時與內隱認知歷程。面對數學教學現場中日益強調素養導向與個別差異回應的挑戰，導入腦科學的新興技術，提供了一種創新的觀察與解析學習歷程的視角 (Hawes & Ansari, 2020; Leikin, 2018)。透過腦造影技術、腦電圖監測、神經調節工具等方式，我們不僅能夠追蹤學生在數學活動中神經系統的活化模式，還能進一步建立與學習策略、能力發展以及教學介入成效相關的神經指標。

本篇論文由跨領域團隊合力撰寫，嘗試從神經科學與數學教育的跨領域對話，探索腦科學技術在數學教育領域中的應用潛力與實務挑戰。首先，本文將透過魔術方塊的操作歷程與數學認知策略進行類比，闡述其對於空間推理與問題解構能力的啟發，作為橋接神經科學與數學教育思索脈絡的開端。接著分析當前數學教育研究方法的限制，並指出腦科學技術在補足其不足之處的角色與價值。隨後，我們介紹幾項核心腦科學技術，包括 fMRI、EEG 與 fNIRS 等，並說明其在數學學習歷程中所觀察到的神經機制。同時我們也將探討神經科學與數學教育整合研究的現況與發展趨勢，並提出未來可能的研究方向。最後，透過被動式腦機介面 (passive BCI; Aricò et al., 2017; Beauchemin et al., 2024; Belo et al., 2021; Dehais et al., 2019) 與神經回饋訓練的實務案例，我們論述腦科學技術實際進入數學教育場域的可能形式與影響，期望為未來數學教育改革與科技輔助學習模式提供新的思維理路與應用的可能性。

## 貳、數學認知的腦科學歷程：從魔術方塊談起

魔術方塊 (Rubik's Cube) 是一種廣為人知的三維益智玩具，其外觀看似簡單，實則內蘊龐大且結構嚴謹的組合邏輯。對教育工作者而言，魔術方塊提供了一個引發學生對數學興趣的實作工具，因其解題過程涉及空間視覺操作、圖案與顏色模式識別、序列規劃、錯誤修正與解題策略調整等多重認知歷程。從神經科學的觀點來看，這些歷程涵蓋了多個腦區的神經細胞參與，包括頂葉皮質 (特別是右側頂下小葉) 參與空間關係的整合與視覺圖形轉換，前額葉皮質 (特別是背外側前額葉) 則負責維持工作記憶、抑制錯誤反應與策略調整 (Krawczyk, 2002; Woolgar et al., 2010)。具體而言，解魔術方塊的能力與流體智力 (fluid intelligence) 和工作記憶容量 (working memory capacity) 呈正相關，這些認知能力在數學問題解決中亦扮演關鍵角色。此外，魔術方塊訓練已被證實能提升學生的二維與三維心像操作能力 (如：心像旋轉、視角轉換)，此能力在幾何概念與空間推理上扮演著重要的角色。

解魔術方塊時，大腦需在龐大的「問題空間」中（可能狀態數量高達天文數值）快速搜尋解決路徑，這過程仰賴對顏色排列模式的識別和步驟序列的推演，類似於數學家面對複雜問題時將其拆解並轉譯成許多子問題的求解方式。事實上，善用此類遊戲化的類比引導，有助於激發學生對數學結構與推理的興趣：例如教師可藉由討論魔術方塊的解法策略，引導學生體會群論中的置換概念或空間對稱性，進而培養數學上的抽象思考與問題解構能力。這樣的跨領域類比不僅提供了親身體驗數學推理的機會，也突顯了將腦認知科學融入數學教育的契機與挑戰（De Smedt et al., 2010）。這些發現突顯了將魔術方塊作為教學工具的潛力，不僅能激發學生對數學結構與推理的興趣，還能培養其抽象思考與問題解構能力。

以生活化的例子來說，當學生試圖將魔術方塊某一面的顏色歸整為同一色塊時，必須先觀察旋轉後魔術方塊色塊、藉由經驗或外在協助瞭解魔術方塊操作與色塊改變的對應關係，再將其應用於觀察到的排列組合中，並藉由回饋修改操作策略。這類「先觀察－再策略性行動－再修正」的循環思維正是數學問題解題的縮影。例如當學生練習“十字架法”（cross method）或“CFOP 解法”（Cross, F2L, OLL, PLL）時，需將複雜的轉動序列轉換為具邏輯性的步驟，此與數學證明中拆解命題、提出中介引理、逐步邏輯推演的過程如出一轍。同時魔術方塊的操作歷程可完美對應到高等數學內容（Cornock, 2015; Davis, 1982）。儘管魔術方塊的解法最終並不需形式化的數學證明，但其本質上的解構（decomposition）、規則內推（rule-based induction）與圖像推理（visuospatial reasoning）正是數學思維所倚賴的核心能力（Uttal et al., 2013）。若能將魔術方塊解題過程結合腦科學研究，例如透過功能性磁共振造影（fMRI）觀察學生在學習前後頂葉與前額葉活化差異，如圖 1 所示，將有助於理解策略學習與認知控制在數學理解上的神經基礎（Qin et al., 2004）。

圖 1  
魔術方塊之神經回饋系統示意圖

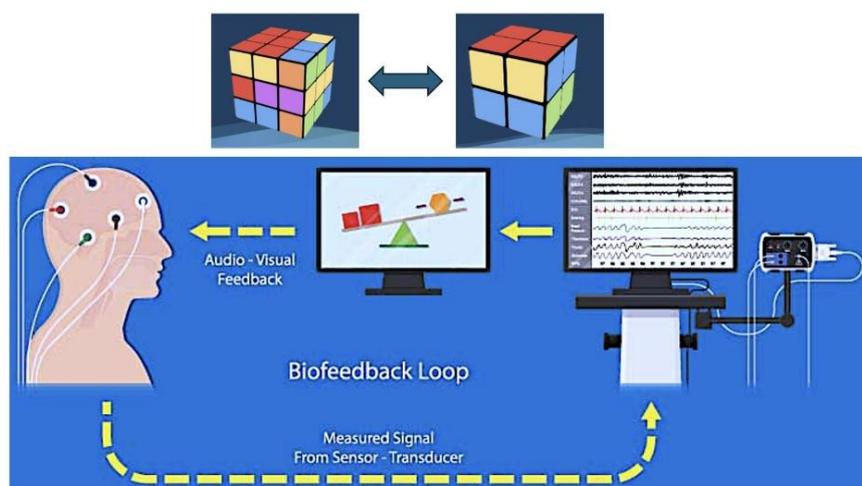


圖 1 示意學生在操作魔術方塊時，以其所歷經的空間關係整合、視覺圖形轉換、策略選擇與錯誤監控等認知歷程進行系統性建模。

進一步而言，當我們從腦科學的角度重新檢視學生在解魔術方塊過程中的行為與思維歷程，會發現其中蘊含著高度可觀測、可量化且具教育意涵的神經模式，而且可進一步對應至高等數學的定理。這也正顯示出一種新的數學教育思維轉向的可能：從結果導向的評量，轉為歷程導向的認知理解；從靜態的學科知識，轉為動態的神經歷程追蹤。在這樣的背景下，魔術方塊所代表的不僅是一項遊戲式學習活動，更是一個教育與神經科學對話的起點，為我們開啟一條通往更深層次數學學習理解的途徑。未來若能結合神經影像技術與教育實作經驗，發展出具診斷性、介入性與預測性的整合研究模式，將可能徹底改寫我們對數學學習、理解與教學介入。

### 參、傳統數學教育研究的侷限

當前數學教育研究的方法大致可分為質性研究、量化研究與混合方法。質性研究常透過課堂觀察、訪談、個案、社會學相關研究等方式，深入探討學生的思考方式與解題歷程、課室文化、師生互動等。另一方面，量化研究則以測驗、問卷等工具為主，目的是藉由數據的收集、量化統計分析以掌握群體性的學習成效與行為特徵。數學教育也常混合質性研究與量化研究的方法，結合兩者的優點，兼顧數據的廣度與深度。這些傳統方法為數學教育研究奠定了重要的基礎，尤其在課室文化、學生解題策略、錯誤類型與學習成效的分析上提供了大量寶貴資料。

然而，這些方法在理解學生「即時」且「內隱」的認知行為上仍存在明顯限制。首先，這些方法多依賴外顯行為的觀察與事後推論，無法直接掌握學生在解題歷程中腦內所發生的認知變化。其次，學生對自身思考過程的描述往往不夠精準或存在回憶偏差，使研究結果可能產生誤判。此外，傳統方法多聚焦於學生在特定任務上的表現結果，較難深入剖析學生概念理解、知識提取、注意分配與視覺加工等認知機制及過程細節，也難以判斷學生失誤背後的真正原因是來自哪一種認知子系統的障礙。

因此，在面對日益強調素養導向、深層理解與個別化學習需求的當代教育現場，我們急需一種能夠跨越外顯行為限制，深入探查學生即時認知歷程的技術。這項技術必須能捕捉學生在解題歷程中的細微變化，具備時間解析度高、非侵入性且可自然融入課堂情境的特性。尤其是在數學學習這類高度依賴抽象推理與視覺空間加工的領域，更需要一種能即時追蹤大腦運作模式的研究工具，以彌補傳統研究在掌握「思維進行中」這一層次的不足。也唯有如此，我們才能真正理解學生在數學問題解決過程中所歷經的注意轉換、錯誤監控、策略選擇與概念轉換等關鍵環節，並進一步設計更有針對性的教學介入與學習支持。

### 肆、數學學習歷程中的腦科學新興技術

為了回應上述對即時且內隱認知的數學思索歷程理解的需求，神經科學的新興技術逐漸成為補足傳統數學教育研究侷限的關鍵利器，包括功能性磁振造影（functional magnetic

resonance imaging [fMRI])、正子斷層掃描 (positron emission tomography [PET])、腦電圖 (electroencephalography [EEG])、近紅外光譜儀 (functional near-infrared spectroscopy [fNIRS])，以及神經調節技術 (如經顱直流電刺激 [tDCS]；與經顱磁刺激 [TMS])。

根據生理機制，神經元活化時會消耗葡萄糖與氧氣，導致局部血流變化，這正是功能性磁振造影 (fMRI) 與正子斷層掃描 (PET) 偵測訊號的基礎理論依據 (Raichle & Mintun, 2006)。例如當神經元大量放電時會消耗葡萄糖與氧氣，導致局部血流增加以供能 (Raichle & Mintun, 2006)。透過這些技術，研究者得以觀察學生在解題時大腦哪些區域被活化，進而探索數學認知的神經基礎與學習歷程。例如，功能性腦造影已運用於比較有無專業訓練者在數學任務上的腦區差異，甚至觀察經過一段認知訓練後大腦網絡的可塑性變化 (Supekar et al., 2015)。透過這些技術，研究者已能區辨在數字比較、數學推理、代數運算與幾何理解等不同任務中，大腦所招募的神經元活化及迴路，例如雙側頂葉與額葉迴路即常與數學運算相關 (Dehaene et al., 2004)。這些技術為我們打開一扇窗，使我們能觀察到學生在數學學習歷程中如何逐步建構內在表徵、運用注意資源、進行錯誤修正與策略選擇，進而了解其學習瓶頸及潛在能力。

此外，非侵入性的腦功能監測技術如腦電圖 (EEG) 和近紅外光譜 (fNIRS) 因設備相對簡便，也開始引入教育情境：前者以毫秒等級的時間解析度記錄大腦電活動，不僅用於注意力與認知負荷的即時測量，也應用在「神經回饋 (Neurofeedback)」訓練，透過即時呈現學生專注程度來增進其學習表現；後者則利用近紅外光監測皮質區域的血氧變化，可在自然教室環境下評估學生思考時的大腦反應 (Ferrari & Quaresima, 2012)，已開始被應用於教育現場以偵測學生在課堂中專注力的波動、認知負荷變化與問題解題歷程 (Ferrari & Quaresima, 2012; Kovelman et al., 2009)。例如，研究指出，解決數學難題時學生的  $\theta$  波活動會上升，而當進入熟練階段後則轉為  $\alpha$  波活動主導，這表示神經系統由高負荷控制轉為自動化程序 (Borghini et al., 2016)。除了量測工具，神經調節技術如經顱直流電刺激 (tDCS) 與經顱磁刺激 (TMS) 亦逐漸被用於數學學習研究，部分研究顯示針對左頂葉進行低劑量刺激能顯著提升初學者對於符號與數字規則的敏感度，並促進其後測表現 (Kadosh et al., 2010)。更前瞻的神經調節 (Neuromodulation) 技術亦逐漸融入教育研究，例如經顱直流電刺激 (tDCS) 可溫和地調控大腦特定區域的興奮性，有研究發現對頂葉施以適當的 tDCS 可提升被試者對新數字符號的掌握能力，且效果可持續數月之久 (Kadosh et al., 2010)。類似地，針對數學學習困難的兒童，結合腦造影與神經回饋訓練的初步研究也顯示出改善認知表現的潛力 (Hashemian & Hashemian, 2015)。

值得注意的是，目前多數研究仍集中於短期神經可塑性與小樣本實驗設計，未來尚需更大規模的縱貫研究來驗證神經影像指標與數學學習成效之穩定性與預測性。此外，這些技術的應用亦涉及教育公平、神經倫理與教學實踐可行性等重要議題，尤其在台灣推動 STEM 教育與新課綱素養導向的背景下，跨域合作顯得更加關鍵。數學教育的本質並非要求人人成為數學家，而是協助學習者建立穩固的數學邏輯與抽象推理能力，就如同魔術方塊的解題歷程不需數學證明卻要求高度的模式分析與策略選擇一般。因此，未來數學教育

的推展應善用腦科學所觀察到的神經機制，設計出更具神經效能導向的學習介入方案，推動具體可行的腦基礎數學教學模式。

## 伍、數學教育與神經科學整合研究的全球趨勢

近年來，數學教育與神經科學的跨領域研究已日益成為國際教育研究的重要趨勢之一。透過將腦造影技術和認知測量工具引入教育現場，研究者期待能更精確地理解學生的數學學習歷程與個體差異背後的神經機制(De Smedt et al., 2011; Grabner, 2022; Grabner & Ansari, 2010; Yu, 2023; Zacks, 2008)。例如，神經科學的方法不僅可用於診斷學生的學習狀態，更進一步支持規劃個人化的教學介入方案，以滿足不同年級和學習水準學生的需求(Stavy & Babai, 2010; Yu, 2023)。然而，在神經科學與數學教育整合的早期階段，許多研究者抱持懷疑態度，質疑此跨領域合作是否能有效促進教育實踐的進步。尤其研究者認為神經科學知識如何真正轉化為教育課程與教學實務，是存在最大的挑戰。其包括學習歷程、學習環境影響、教師同儕互動等變因，致使神經科學轉換教育實務現場存在巨大落差(Bowers, 2016; Clement & Lovat, 2012)。

儘管如此，多位數學教育及神經科學重要學者仍試圖橋接兩個研究領域。國際重要期刊亦紛紛出版專刊以促進兩個領域之間的對話。包括 Anderson 等人(2014)於《International Journal of Science and Mathematics Education》期刊編輯的專刊。而《ZDM—Mathematics Education》期刊則是陸續提出三本專刊，分別由 Grabner 與 Ansari (2010); De Smedt 與 Grabner (2016); Leikin、Grabner 與 Vogel 預計 2026 年即將發行的神經科學和數學學習關係的研究成果。Anderson 等人(2014)編輯的專刊聚焦於運用眼動追蹤技術揭示學生解題歷程中的認知處理模式。Grabner 與 Ansari (2010)專刊關注在基礎數學能力，共收錄了 10 篇研究，探討不同年齡層及學業成就水準學生的數學能力與其大腦活動的相關性。就數學內容而言，多數研究聚焦於四則運算，例如 Menon (2010) 探討運算活動與大腦區域定位的關聯；亦有三篇研究專注於數學推理歷程，例如 Bornemann 等人(2010) 研究高認知能力學生如何解幾何類比題。只有少數研究處理進階數學內容，例如 Stavy 與 Babai (2010) 探討學生在圖形與代數表徵(如一次與二次函數)間的轉換歷程。此專刊所使用的神經科學技術主要為功能性磁共振造影(fMRI)與功能性近紅外線光譜儀(fNIRS)。基於這些研究與相關文獻回顧，Grabner 與 Ansari (2010) 指出數學教育與神經科學整合研究中的潛在危機，包括研究參與者的選取、實驗設計於教育現場的可行性、以及基礎數字處理與高階數學技能之間的關聯性問題。

五年後，《ZDM—Mathematics Education》再度出版由 De Smedt 與 Grabner 主編的專刊，並依據他們提出的三種神經科學應用框架組織所收錄的研究(De Smedt & Grabner, 2015)，分別為：神經理解(neuro-understanding)、神經預測(neuro-prediction)與神經介入(neuro-intervention)。其中，「神經理解」指運用神經科學技術來累積個體如何習得數學技能的知識，並理解其生物層次的表現與歷程；「神經預測」則關注於如何透過神經影像資

料預測學生未來數學能力發展及其對教育介入的反應；而「神經介入」則探討如何利用大腦影像設計針對數學學習的實驗性介入措施，並研究教育如何形塑與支持學校數學所需的神經網絡。

De Smedt 與 Grabner (2016) 指出，該期專刊中大多數的九篇研究皆可歸類為神經理解取向。在研究內容方面，與前一期專刊主要集中於數感與運算不同，此期所涵蓋的數學主題更為多元。例如，Obersteiner 與 Tumpek (2016) 透過眼動技術探討分數比較任務，Babai 等人 (2016) 則檢視在簡單幾何周長任務中，無關但顯著變項干擾對學生答題正確率的影響。僅有兩篇研究專注於較複雜的數學內容，包括 Leikin 等人 (2016) 運用事件相關電位 (ERP) 探討洞察力導向與基本數學課程數學問題解題歷程的腦波異同；及 Waisman 等人 (2016) 運用腦電圖 (EEG) 資料分析學生解幾何推理題時的邏輯推理歷程。

Grabner (2022) 於《Cognitive Mathematics Handbook》中主編第三部分內容，歸納了數學教育與神經科學交叉研究的五大趨勢：其一為從數量處理發展至運算的腦部動態歷程 (Vogel, 2022)；其二為分數處理的神經認知基礎 (Wortha et al., 2022)；其三為數學能力與表現的個體差異 (Caviola et al., 2022)；其四為數學焦慮及其心理與神經基礎 (Pizzie, 2022)；其五為促進數學學習的神經認知介入方法 (Kucian & Cohen Kadosh, 2022)。上述專刊與專書章節皆共同指出，有必要進行系統性的跨期刊文獻整合與評析，全面掌握數學教育與神經科學跨領域研究的發展趨勢，並識別當前所面臨的挑戰與未來研究方向。例如，Clement 與 Lovat (2012) 曾指出，神經科學知識如何轉化為實用且具教育影響力的知識，仍為一大挑戰；Ansari 與 Lyons (2016) 則強調，需進一步探討如何透過神經影像技術驗證教育介入的效果，並利用神經指標預測學生的個體差異表現。

在國際數學教育大會 (International Conference of Mathematics Education [ICME]) 的演講中，Leikin (2018) 試圖比較數學教育中的認知研究與認知神經科學中與數學處理相關的研究。她指出這兩個領域在研究目標、數學主題、所分析的表徵、研究參與者、研究條件與環境、使用的研究工具、所設計的任務，以及評估結果的指標等方面皆存在差異。這些差異可作為理解兩個研究領域之間鴻溝的框架。例如，就數學主題而言，數學教育中的認知研究涵蓋從小學到大學的廣泛數學主題、概念與性質；相對地，認知神經科學的研究則多聚焦於數感與四則運算等基礎內容，只有少數研究探討較進階的數學內容。Leikin 透過這些比較，突顯出兩個交錯研究領域之間的差距，並指出兩個領域未來應努力發展的方向。國際數學教育委員會 (ICMI) 亦高度關注這項發展，近期委託專家團隊撰寫《神經科學、心理學與數學教育的跨領域交流》專題報告 (Leikin et al., 2024)，進一步凸顯該領域未來發展的關鍵性。

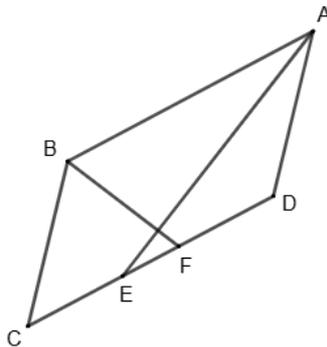
對於台灣而言，如何跟上國際研究趨勢並有效落實相關成果至本土教育情境，是當前的重要課題。在 108 課綱強調的素養導向與差異化教學背景下，台灣應積極選擇兼具理論價值與實務需求的研究主題，例如學生數學焦慮的神經基礎 (Suárez-Pellicioni et al., 2016) 或空間認知與數學能力的互動關係 (Cheng & Mix, 2014; Mix, 2019)，將有助於創造具有國際影響力且貼近教學現場需求的研究突破點。

## 陸、結合 AI 與腦訊號的教學診斷模式：被動式 BCI 於數學教育的實踐構想

被動式 BCI 定義為中央神經系統（central nervous system [CNS]）活動的量測工具，且具備將中央神經系統訊號轉換成其他可替換、儲存、增強、補充或改善的其他訊號系統的介面（Wolpaw & Wolpaw, 2012）。被動式 BCI 的其中一個重要研究方向則是利用腦部活動來監控正常受試者的認知和情感狀態（Aricò et al., 2018; Belo et al., 2021; Dehais et al., 2019; Khan & Hong, 2015）。

在數學教育評量逐漸走向歷程導向與個別化診斷的當下，我們認為以神經訊號為核心的被動式 BCI 技術，結合 AI 進行腦波數據的即時分析與解讀，研究者與教師將有機會建立具診斷性、預測性與適應性的教學診斷模式。舉例來說，以下為一道數學幾何題目：

如下圖所示，平行四邊形  $ABCD$  中，線段  $\overline{AE}$  和  $\overline{BF}$  分別為角  $\angle BAD$  和  $\angle CBA$  的平分線，且  $\angle AED = 25^\circ$ 。



根據上述題目敘述，下列選項何者正確：

- (1)  $\angle EAD = 15^\circ$
- (2)  $\angle EAD = 25^\circ$
- (3)  $\angle EAD = 65^\circ$
- (4)  $\angle EAD = 155^\circ$

根據題目已知和給定的幾何圖形，可以藉由多元推理歷程得到正確答案為(2)  $\angle EAD = 25^\circ$ 。以下為兩種學生可能使用的解題策略。

**解題策略一：**

觀察子圖由  $\overline{BA}$ 、 $\overline{AE}$  以及  $\overline{ED}$  所形成的「Z 型圖」。因為  $\overline{BA} \parallel \overline{ED}$ ，根據內錯角定理得  $\angle BAE = \angle AED = 25^\circ$ 。又因  $\angle BAD$  被角平分線  $\overline{AE}$  平分， $\angle BAE = \angle EAD$ ，故  $\angle EAD = 25^\circ$ 。

**解題策略二：**

設  $\angle BAD = 2x$ 。則由平行四邊形性質得  $\angle ADE = 180^\circ - 2x$ 。又因  $\angle AED = 25^\circ$ ，利用  $\triangle ADE$  的內角，有：

$$\begin{aligned}\angle EAD + \angle AED + \angle ADE &= 180^\circ \\ x + 25^\circ + 180^\circ - 2x &= 180^\circ \Rightarrow x = 25^\circ,\end{aligned}$$

故  $\angle EAD = 25^\circ$ 。

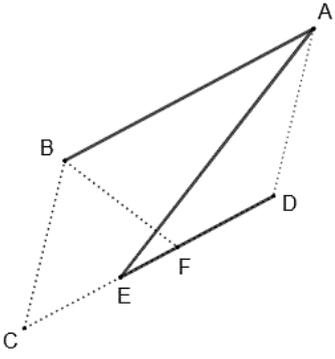
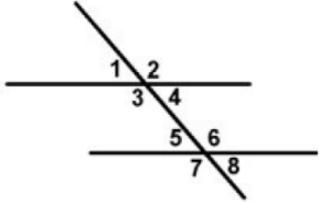
此範例題說明數學解題通常涉及多個的解題策略，一個題目可以藉由不同的推理方式來得到答案。這種多元性不僅彰顯了數學本身開放與彈性的特質，也提供了學生多角度理解與探索數學概念的機遇。透過嘗試不同的解題方法，學生能逐步培養批判性思考與創造性思維，進而累積豐富的數學解題經驗，發展出靈活性與洞察力等關鍵能力。

然而，在實際的教學現場中，教師通常只能根據學生的最終答題結果判斷其正確性，難以深入瞭解學生在解題過程中究竟採用了何種策略，以及此過程中涉及的認知歷程為何。這樣的限制使得教師難以即時辨識學生的學習困難，更無法準確掌握學生思考過程中的誤解或盲點。例如，當題目條件提及角度為  $25^\circ$  時，有些學生可能僅因直覺而猜測答案為(2)，教師若只從答案上判斷，很容易忽略學生其實尚未具備關鍵的幾何推理能力。

實際上，幾何推理歷程並非僅僅是寫出正確計算步驟或有效的證明式子，而更關鍵的是學生如何有效地解構 (decomposition) 與重構 (recomposition) 幾何圖形，進一步正確視覺化 (visualization) 圖形中隱藏的幾何性質，並運用這些性質形成有效的解題策略。幾何圖形視覺化涉及許多重要的認知歷程，包括圖形重要訊息的辨識；抑制圖形不相關訊息的提取；長期記憶幾何性質圖形心像的提取；外在圖形訊息與長期記憶提取心像的對應及調整；同一給定圖形對應不同幾何性質的確認；不同辨識子圖與長期記憶中不同幾何性質的確認等。此外，幾何圖形視覺化過程也涉及空間工作記憶能力的有效運作，以維持和操控多個視覺元素之間的空間關係，並進行動態的心像旋轉或視角轉換。個體需要具備足夠的視覺注意力，以迅速聚焦於圖形中的關鍵結構與線索，同時排除不必要的干擾資訊。研究指出，圖形視覺化能力的高低，不僅影響學生解題的速度與正確性，亦影響學生在複雜幾何問題中能否成功整合不同的圖形資訊，從而進行有效推理 (Duval, 1999; Waisman et al., 2023; Weckbacher & Okamoto, 2014; Zykova, 1975)。此外，個體的圖形視覺化歷程可能受到先備知識、問題情境或個體差異 (例如空間能力、視覺空間處理速度與工作記憶容量) 的影響。這樣的認知歷程正是當代數學教育關注的核心議題，也正是應用腦科學研究，尤其被動式 BCI 技術可提供重要協助之處。

以具體的幾何問題為例，學生必須能夠辨識出題目中  $\overline{AB}$ 、 $\overline{AE}$  和  $\overline{ED}$  所共同形成的「Z 形圖案」，進而察覺此圖案所隱含的內錯角性質。然而，題目所提供的幾何圖形往往與學生平時課本中所熟悉的典型內錯角圖形有所差異。因此，學生需要在解題時能有效地抑制非必要的視覺訊息，精準提取關鍵視覺特徵 (如： $\overline{AB}$ 、 $\overline{AE}$  和  $\overline{ED}$ )，並對照以往所建構的幾何圖形心像 (mental imagery) (如：內錯角性質、平行四邊形性質)，靈活調整視覺訊息，進而確認並有效運用相應的幾何性質。這種視覺訊息的選擇與處理，以及對幾何性質的靈

活應用，正是幾何學習過程中的核心關鍵，也是腦科學透過被動式 BCI 工具協助研究的重要所在。透過分析學生解題歷程的神經訊號特徵，教師便能更精準地掌握學生在解題過程中真實的認知狀態，進一步發展出更具針對性且有效的數學教學策略。

本題目子圖	對應課本該性質對應的幾何圖形
	<p>內錯角性質</p> 

不同於傳統的主動式或反應式 BCI，被動式 BCI 不需使用者主動產生特定的腦波或透過外部刺激誘發反應，而是透過直接分析使用者在自然情境下的腦波特徵，揭示其認知與情緒狀態 (Zander & Kothe, 2011)。這種特性使被動式 BCI 特別適合應用於教育場域，因為學生能在真實、自然且無干擾的情境中進行解題，從而讓教育者獲得更豐富且真實的認知資訊。

這樣的想法來自於許多研究的積累，在各種腦波訊號分析方法中，事件相關電位 (Event-Related Potential, ERP) 的 P300 成分已被證實與注意力資源的配置及工作記憶的更新過程具有密切的關聯 (Polich, 2007)。近期的研究進一步指出，學生在進行科學問題解題時，其腦波中的不同 ERP 成分 (如 N200 與 P300) 能有效地反映視覺空間推理、注意力集中程度及記憶負荷等內在的認知歷程 (Awh et al., 2000; Salillas et al., 2008)。因此，我們可以合理推測，學生在進行解題過程中的關鍵認知步驟，同樣可能伴隨著特定且可區分的腦波反應。以上述幾何問題的解題為例，當學生成功識別出隱藏的「Z 形圖案」、察覺平行四邊形 ABCD 的鄰角和為 180 度，或是以心像旋轉的方式成功將內錯角圖形進行旋轉後，皆可能會在其腦波數據中產生特定的 EEG 波形特徵。透過蒐集並分析大規模的腦波數據，結合人工智慧 (AI) 技術進行訓練與比對，研究者即可建構出一套標準化的解題思維模型。透過這套模型，結合被動式 BCI 技術，便可應用於個別學生的數學解題過程，精準地診斷該學生是否掌握了解題過程中各項關鍵的認知步驟。此種基於腦波數據而建構的標準化模型，在概念上類似於大型語言模型 (LLM) 透過大量文本訓練所建立的語言理解系統，可有效提供學生解題認知過程的基準參考。

不過，我們所提之將被動式 BCI 技術實際應用於數學教育現場可能存在許多的挑戰。這些挑戰包括腦波數據分析程序的複雜性、不同個體間腦波訊號的高度變異性，以及教育

實務現場對於此新技術的接受度與認可程度等重要考量因素 (Beauchemin et al., 2024)。因此，未來的研究工作必須特別著重於提升腦波數據分析方法的準確性與穩定性，並建立能廣泛適用於不同數學教育解題情境的通用模型。此外，數學教育者與學生對此技術的接受度亦為關鍵因素。藉由提高教育相關人員對被動式 BCI 技術的理解，並設計易於操作與實際應用的工具與系統，將有助於此技術更有效且順利地融入現有的教學實踐之中。

透過被動式 BCI 技術建構以腦波為基礎的解題思維歷程模型，我們認為將能為數學教育提供嶄新的視野與實用工具。這種新穎的方法不僅能顯著提升教學過程中的個別化程度與診斷的精準性，更有望激發學生主動參與學習，全面提高教育的整體效能。此外，若學生透過更具創意的思維方式進行解題，其腦波特徵也將與標準模型有所不同，因此此模型的另一重要價值在於能辨識前瞻且創新的想法。這將有助於數學教育者與學生進行更具創造性的互動。隨著技術的逐漸成熟，以及教育現場對新科技的逐步接納，這種創新的教育模式必將成為未來數學教育發展的重要趨勢之一。

## 柒、結論

數學素有「科學之母」之稱，其邏輯結構與抽象思維能力的培養，對於跨領域知識的建構與創新應用具有根本性影響。過去三十年來，台灣在國際數學能力評比中表現名列前茅 (Mullis et al., 2020; Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD], 2023)，反映出台灣學生在數學認知策略上具備領先優勢。然而，這些優勢究竟源自於文化背景、教育系統設計，還是潛藏的認知特質，目前仍缺乏系統性的探究。若能善用腦科學技術與大數據分析工具，發展本土化的教學診斷模型，將有助於量化這些優勢背後的關鍵機制，進而釐清台灣學生數學表現亮眼的深層原因。

台灣在神經科學與資訊科學領域皆具備世界級的研究能量，若能進一步將這些技術應用於教育現場，特別是數學教學評量與學習支援系統的設計，將為數學教育帶來全新的突破。本文所提出結合被動式腦機介面 (passive BCI) 與人工智慧分析的教學診斷模式，即是一項具可行性、可擴展性與跨領域整合潛力的創新方向。

透過此類技術的應用，不僅能強化教師對學生學習歷程的掌握，提升個別化教學的準確性與實用性，更有機會促使台灣在「教育神經科學」領域的研究，成為全球學術領導地位，為全球教育轉型提供有利的科學與經驗支持，真正實踐數學教育的神經革命。

## 參考文獻

- Anderson, O. R., Love, B. C., & Tsai, M.-J. (2014). Neuroscience perspectives for science and mathematics learning in technology-enhanced learning environments. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 12(3), 467–474. <https://doi.org/10.1007/s10763-014-9540-2>
- Ansari, D., & Lyons, I. M. (2016). Cognitive neuroscience and mathematics learning: How far have we come? Where do we need to go? *ZDM—Mathematics Education*, 48(3), 379–383. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0782-z>
- Ansari, D., Donna, C., & De Smedt, B. (2011). Connecting education and cognitive neuroscience: Where will the journey take us? *Educational Philosophy and Theory*, 43(1), 37–42. <https://doi.org/10.1111/j.1469-5812.2010.00705.x>
- Aricò, P., Borghini, G., Di Flumeri, G., Sciaraffa, N., & Babiloni, F. (2018). Passive BCI beyond the lab: Current trends and future directions. *Physiological Measurement*, 39(8), 08TR02. <https://doi.org/10.1088/1361-6579/aad57e>
- Aricò, P., Borghini, G., Di Flumeri, G., Sciaraffa, N., Colosimo, A., & Babiloni, F. (2017). Passive BCI in operational environments: Insights, recent advances, and future trends. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 64(7), 1431–1436. <https://doi.org/10.1109/TBME.2017.2694856>
- Awh, E., Anllo-Vento, L., & Hillyard, S. A. (2000). The role of spatial selective attention in working memory for locations: Evidence from event-related potentials. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 12(5), 840–847. <https://doi.org/10.1162/089892900562444>
- Babai, R., Nattiv, L., & Stavý, R. (2016). Comparison of perimeters: Improving students' performance by increasing the salience of the relevant variable. *ZDM—Mathematics Education*, 48(3), 367–378. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0766-z>
- Beauchemin, N., Charland, P., Karran, A., Boasen, J., Tadson, B., Sénécal, S., & Léger, P. M. (2024). Enhancing learning experiences: EEG-based passive BCI system adapts learning speed to cognitive load in real-time, with motivation as catalyst. *Frontiers in Human Neuroscience*, 18, 1416683. <https://doi.org/10.3389/fnhum.2024.1416683>
- Belo, J., Clerc, M., & Schön, D. (2021). EEG-based auditory attention detection and its possible future applications for passive BCI [Mini Review]. *Frontiers in Computer Science*, 3, 661178. <https://doi.org/10.3389/fcomp.2021.661178>
- Borghini, G., Aricò, P., Graziani, I., Salinari, S., Sun, Y., Taya, F., Bezerianos, A., Thakor, N. V., & Babiloni, F. (2016). Quantitative assessment of the training improvement in a motor-cognitive task by using EEG, ECG and EOG signals. *Brain Topography*, 29(1), 149–161. <https://doi.org/10.1007/s10548-015-0425-7>
- Bornemann, B., Foth, M., Horn, J., Ries, J., Warmuth, E., Wartenburger, I., & van der Meer, E. (2010). Mathematical cognition: Individual differences in resource allocation. *ZDM—Mathematics Education*, 42(6), 555–567. <https://doi.org/10.1007/s11858-010-0253-x>
- Bowers, J. S. (2016). The practical and principled problems with educational neuroscience. *Psychological Review*, 123(5), 600–612. <https://doi.org/10.1037/rev0000025>
- Caviola, S., Toffalini, E., Giofrè, D., Ruiz, J. M., Szűcs, D., & Mammarella, I. C. (2022). Math performance and academic anxiety forms, from sociodemographic to cognitive aspects: A meta-analysis on 906,311 participants. *Educational Psychology Review*, 34, 363–399. <https://doi.org/10.1007/s10648-021-09618-5>
- Cheng, Y.-L., & Mix, K. S. (2014). Spatial training improves children's mathematics ability. *Journal of Cognition and development*, 15(1), 2–11. <https://doi.org/10.1080/15248372.2012.725186>

- Clement, N. D., & Lovat, T. (2012). Neuroscience and education: issues and challenges for curriculum. *Curriculum Inquiry*, 42(4), 534–557. <https://doi.org/10.1111/j.1467-873X.2012.00602.x>
- Cornock, C. (2015). Teaching group theory using Rubik's cubes. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 46(7), 957–967. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1070442>
- Davis, T. (1982). Teaching mathematics with Rubik's cube. *The Two-Year College Mathematics Journal*, 13(3), 178–185. <https://www.jstor.org/stable/pdf/3027317.pdf>
- De Smedt, B., & Grabner, R. H. (2015). Applications of neuroscience to mathematics education. In R. Cohen Kadosh & A. Dowker (Eds.), *The Oxford Handbook of Numerical Cognition* (pp. 612–632). Oxford University Press. <https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780199642342.013.48>
- De Smedt, B., & Grabner, R. H. (2016). Potential applications of cognitive neuroscience to mathematics education. *ZDM—Mathematics Education*, 48(3), 249–253. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0784-x>
- De Smedt, B., Ansari, D., Grabner, R. H., Hannula, M. M., Schneider, M., & Verschaffel, L. (2010). Cognitive neuroscience meets mathematics education. *Educational Research Review*, 5(1), 97–105. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2009.11.001>
- De Smedt, B., Ansari, D., Grabner, R. H., Hannula-Sormunen, M., Schneider, M., & Verschaffel, L. (2011). Cognitive neuroscience meets mathematics education: It takes two to Tango. *Educational Research Review*, 6(3), 232–237. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2011.10.003>
- Dehaene, S., Molko, N., Cohen, L., & Wilson, A. J. (2004). Arithmetic and the brain. *Current Opinion in Neurobiology*, 14(2), 218–224. <https://doi.org/10.1016/j.conb.2004.03.008>
- Dehais, F., Rida, I., Roy, R. N., Iversen, J., Mullen, T., & Callan, D. (2019). A pBCI to predict attentional error before it happens in real flight conditions. *2019 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics (SMC)* (pp. 4155–4160). IEEE. <https://doi.org/10.1109/SMC.2019.8914010>
- Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking: Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 3–26). ERIC. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED433998.pdf>
- Ferrari, M., & Quaresima, V. (2012). A brief review on the history of human functional near-infrared spectroscopy (fNIRS) development and fields of application. *NeuroImage*, 63(2), 921–935. <https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2012.03.049>
- Grabner, R. H. (2022). Section III Cognitive neuroscience of mathematics. In M. Danesi (Ed.), *Handbook of cognitive mathematics* (pp. 251–256). Springer. <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-031-03945-4.pdf>
- Grabner, R. H., & Ansari, D. (2010). Promises and potential pitfalls of a ‘cognitive neuroscience of mathematics learning’. *ZDM—Mathematics Education*, 42(6), 655–660. <https://doi.org/10.1007/s11858-010-0283-4>
- Hashemian, P., & Hashemian, P. (2015). Effectiveness of neuro-feedback on mathematics disorder. *Journal of Psychiatry*, 18(2), 243.
- Hawes, Z., & Ansari, D. (2020). What explains the relationship between spatial and mathematical skills? A review of evidence from brain and behavior. *Psychonomic Bulletin & Review*, 27, 465–482. <https://doi.org/10.3758/s13423-019-01694-7>

- Howard-Jones, P. A. (2014). Neuroscience and education: myths and messages. *Nature Reviews Neuroscience*, 15(12), 817–824. <https://doi.org/10.1038/nrn3817>
- Kadosh, R. C., Soskic, S., Iuculano, T., Kanai, R., & Walsh, V. (2010). Modulating neuronal activity produces specific and long-lasting changes in numerical competence. *Current Biology*, 20(22), 2016–2020. <https://doi.org/10.1016/j.cub.2010.10.007>
- Khan, M. J., & Hong, K.-S. (2015). Passive BCI based on drowsiness detection: An fNIRS study. *Biomedical Optics Express*, 6(10), 4063–4078. <https://doi.org/10.1364/BOE.6.004063>
- Kovelman, I., Shalinsky, M. H., White, K. S., Schmitt, S. N., Berens, M. S., Paymer, N., & Petitto, L.-A. (2009). Dual language use in sign-speech bimodal bilinguals: fNIRS brain-imaging evidence. *Brain and language*, 109(2-3), 112–123. <https://doi.org/10.1016/j.bandl.2008.09.008>
- Krawczyk, D. C. (2002). Contributions of the prefrontal cortex to the neural basis of human decision making. *Neuroscience & Biobehavioral Reviews*, 26(6), 631–664. [https://doi.org/10.1016/S0149-7634\(02\)00021-0](https://doi.org/10.1016/S0149-7634(02)00021-0)
- Kucian, K., & Cohen Kadosh, R. (2022). Neurocognitive interventions to foster mathematical learning. In M. Danesi (Ed.), *Handbook of cognitive mathematics* (pp. 385–411). Springer. <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-031-03945-4.pdf>
- Leikin, R. (2018). How can cognitive neuroscience contribute to mathematics education? Bridging the two research areas. In G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt, & B. X. (Eds.), *Invited lectures from the 13th International Congress on mathematical education* (pp. 363–384). Springer.
- Leikin, R., Waisman, I., & Leikin, M. (2016). Does solving insight-based problems differ from solving learning-based problems? Some evidence from an ERP study. *ZDM—Mathematics Education*, 48(3), 305–319. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0767-y>
- Menon, V. (2010). Developmental cognitive neuroscience of arithmetic: implications for learning and education. *ZDM—Mathematics Education*, 42(6), 515–525. <https://doi.org/10.1007/s11858-010-0242-0>
- Mix, K. S. (2019). Why are spatial skill and mathematics related? *Child Development Perspectives*, 13(2), 121–126. <https://doi.org/10.1111/cdep.12323>
- Mullis, I. V. S., Martin, M., Foy, P., Kelly, D., & Fishbein, B. (2020). *TIMSS 2019 international results in mathematics and science*. <https://timssandpirls.bc.edu/timss2019/international-results/>
- Obersteiner, A., & Tumpek, C. (2016). Measuring fraction comparison strategies with eye-tracking. *ZDM—Mathematics Education*, 48(3), 255–266. <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0742-z>
- Organisation for Economic Co-operation and Development. (2023). *PISA 2022 results: The state of learning and equity in Education, PISA* (Vol. 1). OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/53f23881-en>
- Pizzie, R. (2022). Mind, Brain, and Math Anxiety. In M. Danesi (Ed.), *Handbook of cognitive mathematics* (pp. 349–383). Springer. <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-031-03945-4.pdf>
- Polich, J. (2007). Updating P300: An integrative theory of P3a and P3b. *Clinical Neurophysiology*, 118(10), 2128–2148. <https://doi.org/10.1016/j.clinph.2007.04.019>
- Qin, Y., Carter, C. S., Silk, E. M., Stenger, V. A., Fissell, K., Goode, A., & Anderson, J. R. (2004). The change of the brain activation patterns as children learn algebra equation solving. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 101(15), 5686–5691. <https://doi.org/10.1073/pnas.0401227101>
- Raichle, M. E., & Mintun, M. A. (2006). Brain work and brain imaging. *Annual Review of Neuroscience*, 29, 449–476. <https://doi.org/10.1146/annurev.neuro.29.051605.112819>

- Salillas, E., El Yagoubi, R., & Semenza, C. (2008). Sensory and cognitive processes of shifts of spatial attention induced by numbers: An ERP study. *Cortex*, 44(4), 406–413. <https://doi.org/10.1016/j.cortex.2007.08.006>
- Stavy, R., & Babai, R. (2010). Overcoming intuitive interference in mathematics: Insights from behavioral, brain imaging and intervention studies. *ZDM—Mathematics Education*, 42(6), 621–633. <https://doi.org/10.1007/s11858-010-0251-z>
- Suárez-Pellicioni, M., Núñez-Peña, M. I., & Colomé, À. (2016). Math anxiety: A review of its cognitive consequences, psychophysiological correlates, and brain bases. *Cognitive, Affective, & Behavioral Neuroscience*, 16(1), 3–22. <https://doi.org/10.3758/s13415-015-0370-7>
- Supekar, K., Iuculano, T., Chen, L., & Menon, V. (2015). Remediation of childhood math anxiety and associated neural circuits through cognitive tutoring. *Journal of Neuroscience*, 35(36), 12574–12583. <https://doi.org/10.1523/JNEUROSCI.0786-15.2015>
- Uttal, D. H., Meadow, N. G., Tipton, E., Hand, L. L., Alden, A. R., Warren, C., & Newcombe, N. S. (2013). The malleability of spatial skills: A meta-analysis of training studies. *Psychological Bulletin*, 139(2), 352–402. <https://doi.org/10.1037/a0028446>
- Vogel, S. E. (2022). Developmental Brain Dynamics: From Quantity Processing to Arithmetic. In M. Danesi (Ed.), *Handbook of Cognitive Mathematics* (pp. 257–287). Springer. <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-031-03945-4.pdf>
- Waisman, I., Hsu, H.-Y., & Leikin, R. (2023). Complexity of geometry problems as a function of field-dependency and asymmetry of a diagram. In R. Leikin (Ed.), *Mathematical challenges for all* (pp. 501–520). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-18868-8\\_26](https://doi.org/10.1007/978-3-031-18868-8_26)
- Waisman, I., Leikin, M., & Leikin, R. (2016). Brain activity associated with logical inferences in geometry: focusing on students with different levels of ability. *ZDM—Mathematics Education*, 48(3), 321–335. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0760-5>
- Weckbacher, L. M., & Okamoto, Y. (2014). Mental rotation ability in relation to self-perceptions of high school geometry. *Learning and Individual Differences*, 30, 58–63. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2013.10.007>
- Wolpaw, J. R., & Wolpaw, E. W. (2012). Brain-computer interfaces: Something new under the sun. *Brain-computer interfaces: Principles and practice*, 14, 3–12.
- Woolgar, A., Parr, A., Cusack, R., Thompson, R., Nimmo-Smith, I., Torralva, T., Roca, M., Antoun, N., Manes, F., & Duncan, J. (2010). Fluid intelligence loss linked to restricted regions of damage within frontal and parietal cortex. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 107(33), 14899–14902. <https://doi.org/10.1073/pnas.1007928107>
- Wortha, S. M., Obersteiner, A., & Dresler, T. (2022). Neurocognitive foundations of fraction processing. In M. Danesi (Ed.), *Handbook of cognitive mathematics* (pp. 289–316). Springer. <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-031-03945-4.pdf>
- Yu, H. (2023). The neuroscience basis and educational interventions of mathematical cognitive impairment and anxiety: A systematic literature review. *Frontiers in Psychology*, 14, 1282957. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2023.1282957>
- Zacks, J. M. (2008). Neuroimaging studies of mental rotation: A Meta-analysis and review. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 20(1), 1–19. <https://doi.org/10.1162/jocn.2008.20013>
- Zander, T. O., & Kothe, C. (2011). Towards passive brain–computer interfaces: Applying brain–computer interface technology to human–machine systems in general. *Journal of Neural Engineering*, 8(2), 025005. <https://doi.org/10.1088/1741-2560/8/2/025005>
- Zykova, V. I. (1975). Operating with concepts when solving geometry problems. In J. Kilpatrick & I. Wirszup (Eds.), *The learning of mathematical concepts* (Vol. 1, pp. 93–148). University of Chicago Press.

## 《臺灣數學教育期刊》稿約

2013.04.03 編審委員會會議通過  
2013.09.27 編審委員會會議修訂通過  
2014.09.04 編審委員會會議修訂通過  
2017.03.17 編審委員會會議修訂通過  
2021.04.09 編審委員會會議修訂通過  
2022.04.08 編審委員會會議修訂通過

壹、《臺灣數學教育期刊》(*Taiwan Journal of Mathematics Education*) (以下簡稱本刊) 是國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同發行之期刊，內容以出版數學教育領域相關議題的原創性論文為宗旨。

貳、本刊歡迎符合宗旨的多元型態學術論文，類型如下：

- 一、實徵論文 (research report)：透過資料收集與分析來探究理論或檢驗假設。
- 二、回顧性論文 (review article)：整合相關之實徵研究，並提出批判性或創發思考的評析。
- 三、學術瞭望 (academy observatory)：針對國內外數學教育理論、議題、新知、研究成果、實務發展、改革趨勢，進行說明、分析、評論、反思或建議。
- 四、書評 (book review)：以導讀、討論、分析、闡釋，或比較，來介紹並評論數學教育領域新出版的重要書籍。

參、撰寫文別及字數如下：

- 一、實徵性論文與回顧性論文：可以中文或英文撰寫，中文稿件字數以20,000字、英文10,000字為上限（包含論文全文、中英文摘要、圖表、附註、參考文獻、附錄等），並需經正式審查流程（請參見第捌項之說明）。
- 二、學術瞭望與書評：以中文5,000字為原則，由編輯室邀稿。不經正式審查，但需通過編輯委員會議。

肆、本刊每年發行兩期，分別於四月、十月出刊，並採電子和紙本方式發行。全年徵稿，隨到隨審。

伍、本刊所刊之文稿須為原創性的學術論文之文稿，即未曾投遞或以全論文形式刊登於其他期刊、研討會彙編或書籍。若文稿在送審後自行撤稿，或出現一稿多投、修正稿回覆逾期、侵犯著作權等違反學術倫理等情況，將依下列規則處理：

- 一、來稿一經送審，不得撤稿。因特殊理由而提出撤稿申請者，案送主編決定；非特殊理由而自行撤稿者，一年內將不再接受該作者的投稿。
- 二、若文稿被發現一稿多投、侵犯著作權或違反學術倫理等情況，除文稿隨即被拒絕刊登外，一切責任由作者自負，且本刊於三年內不接受該作者來稿，並視情節嚴重程度求償。

三、作者應於發出文稿修正通知的三週內回傳修正稿及修正回覆說明書，逾期視同撤稿。若有特殊情況請先與本刊聯絡。

陸、未經本刊同意，已發表之文章不得再於他處發表。投遞本刊之學術論文須經編審委員會送請專家學者審查通過後予以刊登，被刊登文章之著作財產權歸國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同擁有，文責由作者自負。投稿至《臺灣數學教育期刊》之文章，若經編輯委員推薦且經作者同意，可轉稿至《臺灣數學教師》。

柒、中文文稿格式請參考本期刊論文撰寫體例的說明或已發行之文稿，若為英文撰寫之文稿、引用英文文獻以及數學符號、公式等請參考APA第七版出版手冊。投稿時應注意下列事項：

一、填寫投稿資料

(一) 文稿基本資料。

(二) 通訊作者之姓名、服務單位、職稱、通訊地址、聯絡電話和電子郵件地址。

一位以上作者時，非通訊作者只需填寫姓名、服務單位和職稱。

(三) 任職機構及單位：請寫正式名稱，分別就每位作者寫明所屬系所或單位。

(四) 頁首短題 (running head)：中文以不超過15個字、英文以不超過40個字元為原則。

(五) 作者註 (author note)：說明與本篇研究相關的資訊。

二、除文稿正文外，還需包含中英文摘要，相關規定請詳見《臺灣數學教育期刊》論文撰寫體例。

三、若為修正稿，遞交修正的文稿（上述第伍項第三點之資料）上請以色字標示修改處，並需依審查意見逐項說明修改內容或提出答辯。

捌、本刊審查流程分為預審與正式審查兩個階段：

一、預審：不符合本刊宗旨、品質要求，或撰寫體例者，逕行退稿或退回請作者修改後再上傳。

二、正式審查：為雙向匿名審查，除基本資料表外，不得出現任何足以辨識作者身份之資料，包括請先省略誌謝。

玖、文稿透過線上投稿系統 (<http://tjme.math.ntnu.edu.tw>) 方式投遞。當文稿被接受，作者需在本刊提供的著作財產權讓與同意書上簽名，以掃描檔或紙本方式寄回。作者應負論文排版完成後的校對之責。被接受刊登之文稿，作者需提供文獻之doi，以及中文參考文獻之英譯資料。被接受刊登的英文文稿，作者需自行負責檢查文稿中的用詞、語法、拼寫、含意和邏輯的正確性，編輯委員僅負責格式上之校對。

壹拾、期刊助理聯絡郵箱：[TJME.taiwan@gmail.com](mailto:TJME.taiwan@gmail.com)

# 《臺灣數學教育期刊》研究論文撰寫體例

2013.04.03 編審委員會會議通過  
2013.09.27 編審委員會會議修訂通過  
2014.09.04 編審委員會會議修訂通過  
2017.03.17 編審委員會會議修訂通過  
2022.04.08 編審委員會會議修訂通過

本期刊原則上依循美國心理學會 (American Psychological Association) 的撰寫格式，中文文稿請參考下面的說明或本刊已發表的文稿，若為英文撰寫之文稿、引用英文文獻以及數學符號、公式等請參考 APA 第七版出版手冊。文稿請使用 Microsoft Word 98 以上之繁體中文文書軟體處理。除另有規定外，中文字型一律採用新細明體，英文字型一律為 Times New Roman。

## 壹、撰稿格式

- 一、**稿件順序**：投稿除需要附上作者基本資料表檔案外，中文稿件內容依序為中文摘要頁（含關鍵字）、英文摘要頁（含關鍵字）、正文（包括圖、表、附註、誌謝、參考文獻）以及附錄（若無必要可省略）；英文稿件之撰寫順序相同，唯中英文摘要頁位置對調。
- 二、**稿件版面**：以單欄版面橫向印列的A4規格紙張，上下左右各留2.5公分空白，除基本資料表頁外每頁需加註頁碼。文稿字數（包含摘要、正文、圖表、附註、參考文獻、附錄等）中文以20,000字為上限，英文以10,000字為上限。
- 三、**中文文稿的中文摘要在前，英文摘要在後**：中文摘要頁內容包括論文題目（粗體20級字、置中）、摘要（不分段，限500字以內）、與關鍵字（以五個為上限，並依筆畫順序由少到多排列）。英文摘要頁內容包括 Title（bold, 20 pt, central）、Abstract（不分段，限300字以內）及 Keywords（字詞及順序須與中文關鍵詞相對應）。
- 四、**英文文稿的英文摘要在前，中文摘要在後**：英文摘要頁內容包括 Title（bold, 20 pt, central）、Abstract（不分段，限300字以內）及 Keywords（以五個為上限，並依字母順序排列）；中文摘要頁內容包括論文題目（粗體20級字、置中）、中文摘要（不分段，限500字以內）及中文關鍵詞（字詞及順序須與英文關鍵詞相對應）。
- 五、**字級與行距**：除各項標題、表之註記與另起一段之引文外，內文不分中英文均為12級字，單行行距。
- 六、**字型與符號**：除另有規定外，中文字型一律採用新細明體，標點符號及空白字為全形字；英文字型一律為Times New Roman。

## 貳、正文規格

一、正文內容：原則上包括「緒論」、「文獻探討」、「方法」、「結果」、「討論」與「參考文獻」等六部分，「緒論」含研究動機與目的、假設或研究問題等內容。前述格式為原則性規定，作者可依論文性質斟酌改變。

### 二、標題的層次、選用次序與字體：

- (一) 標題請用字簡明，勿用句號或冒號。若逢頁尾最後一行，應移至次頁首行。第一級標題為「緒論」、「文獻探討」、「方法」、「結果」、「討論」與「參考文獻」等，各層次標題選用次序為：壹、一、(一)、1、(1)、A 最多以六個層次為原則。
- (二) 第一層次標題置中，其餘靠左對齊。第一、二、三、四、五層次標題請使用粗體。第一層次標題使用 16 級字，第二層次標題使用 14 級字，其餘 12 級字。
- (三) 第一、二、三層次標題為單行間距，並與前後段距離均為 1 行；第四、五、六層次標題為 12 點最小行高，並與前後段距離均為 0.5 行。
- (四) 第五、六層次標題內縮 1.5 字元，而第六層次標題加上底線。

## 壹、16級字、粗體、置中

### 一、14級字、粗體、靠左對齊

#### (一)12級字、粗體、靠左對齊

##### 1. 12級字、粗體、靠左對齊

###### (1)內縮1.5字元、12級字、粗體、靠左對齊

###### A.內縮1.5字元、12級字、底線、靠左對齊

三、英文統計符號：須用斜體字，例如 $F(1, 53) = 10.03$ ,  $t$ ,  $F$ ,  $M$ ,  $SD$ ,  $N$ ,  $r$ ,  $p$ 等。希臘字母則不要斜體，例如： $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\epsilon$ ,  $\eta$ 。

四、資料分析結果的有效位數須全文一致：恆小於「1」的數值，例如 $KR20$ ,  $\alpha$ ,  $p$ 等統計數值的個位數字「0」請省略。

### 五、誌謝與附註：

- (一) 誌謝應力求簡短扼要，置於正文之後。誌謝二字為 16 級字、粗體、置中。誌謝文另起、第一行內縮 2 字元、12 級字。
- (二) 附註應置於參考文獻之前，每項附註均另起一行，並以阿拉伯數字編號，依順序排列。

## 參、文獻引用格式

### 一、注意事項

- (一) 引用文獻時，必須有作者姓名（中文作者姓名全列，英文作者僅列姓氏）及論文年份（中文文獻及英文文獻均使用西元年份）。
- (二) 相同作者在同一段中重複被引用時，第一次須寫出年代，第二次以後，在不造成混淆的情況下年代可省略。若在不同段落中重複引用時，則仍須完整註明。
- (三) 本文中引用之文獻必須在參考文獻中列出。

### 二、引用部分文獻內容

若引用特定文獻時，資料來自於特定章、節、圖、表、公式，須標明特定出處；如引用整段原文獻資料，須加註頁碼。中文以「頁」表示；西文單頁為“p.”、兩頁以上為“pp.”。

**範例：**吳昭容（2019，頁9）或（洪萬生，2006，頁167）  
          (Dubinsky, 1991, p. 102) 或 (Heath, 1956, pp. 251-252)

### 三、作者人數為一人、二人、三人以上或機構：

#### (一) 作者人數為一人

**中文格式** 作者（年代）或（作者，年代）

**英文格式** Author (Year) 或 (Author, Year)

**範例：**劉柏宏（2021）或（劉柏宏，2021）  
          Heinz (2015) 或 (Heinz, 2015)

#### (二) 作者人數為二人。每次引用均須列出全部作者，在行文中，以「與」連接；在括號和參考文獻中，中文以頓號「、」，西文以“&”連接。

**中文格式** 作者1與作者2（年代）或（作者1、作者2，年代）

**英文格式** Author 1 與 Author 2 (Year) 或 (Author 1 & Author 2, Year)

**範例：**蔡政樺與秦爾聰（2021）或（蔡政樺、秦爾聰，2021）  
          Yang 與 Idris (2021) 或 (Yang & Idris, 2021)

#### (三) 作者人數為三人以上。

1. 僅需要寫出第一位作者，後面再加上「等人」或「et al.」。
2. 若作者縮減後與其他文獻會產生混淆（第一作者與年代皆相同），請將作者逐一列出至可區辨者。
3. 若僅最後一位作者不同，則每次引用時都要將所有作者列出。

**範例 1：**呂鳳琳等人（2018）或（呂鳳琳等人，2018）或 Green 等人(2014)  
          Sherry et al. (2010) 或 (Sherry et al., 2010)

**範例 2：**Hong、Hwang、Liu 等人（2014）  
          Hong、Hwang、Tai 等人（2014）

**範例 3：**Mullis、Martin、Foy 與 Arora（2012）  
          Mullis、Martin、Foy 與 Drucker（2012）

(四) 當作者或作者之一為機構。第一次引用應寫出機構全名，並以中括號註明慣用之簡稱，第二次之後即可使用簡稱替代。

**範例：**行政院國家科學委員會（國科會，2011）或（行政院國家科學委員會 [國科會]，2011）  
National Science Council (NSC, 2011) 或 (National Science Council [NSC], 2011)

四、同一作者不同著作：在文章中引用同一作者在同一年的多篇著作時，應在年代後加註 a, b, c.....以茲區別。

**範例：**（教育部，2009a，2009b，2009c，2009d）

五、引用相同姓氏作者：當兩筆西文文獻之第一作者同姓時，須引用全名，且採「名在前姓在後」方式書寫。

**範例：**A. J. Bishop（1985）和 E. Bishop（1970）都認為.....。

六、同時引用多筆文獻：依作者姓名筆畫（英文用字母）排序；若同時有中英文作者，則先列中文作者。不同作者之間用分號分開，相同作者不同年代之文獻用逗號隔開年代。

**範例：**（陳學志、賴惠德、邱發忠，2010；Lai et al., 2013; Yen & Yang, 2016）

七、引用翻譯文獻：採用（原作者，原著出版年代/譯本出版年代）或原作者（原著出版年代/譯本出版年代）的標示方式。

**範例：**Skemp (1987/1995) 或 (Skemp, 1987/1995)

八、間接引註：當引用之觀念或陳述，來自第二手資料時，應將原始資料和第二手資料同時註明。在括號中首先列出原始作者與年代，接續中文以「引自」註明第二手資料之作者與年代，並說明出處頁碼；或直接引出第二手資料之文獻。

**範例：**（Garner, 1988，引自蘇宜芬、林清山，1992，頁246）

（引自蘇宜芬、林清山，1992，頁246）

九、直接引述：引文超過中文 80 字（西文 40 字），則須另起一段，並改為標楷體 10 級字，左右縮排 2 字元，與正文間前後空一行，且在引文前後無需用引號。

**範例：**

Schoendfeld (1992, p.335) 有一段話可以用來討論：

數學從其創生之始就是一種社會活動，在此活動中一群訓練有素的實踐者（數學科學家）從事組型的科學—基於觀察、研究和實驗，有系統地試圖要決定一個公理化或理論化之系統中的規律的性質和原理（此為純數學），或者從實在世界物體中抽象出來之系統的模式（此為應用數學）。數學的工具是抽象、符號表徵、和符號操作。然而學會運用這些工具，其意義乃謂一個人以數學方式思考而非如一個工匠使用工具。以數學的方式思考就是：（1）形成數學觀點—珍視數學與抽象的歷程，並偏愛其應用，（2）發展此學科的工具的能力，並應用這些工具以協助我們理解結構—數學的建構意義（mathematical sense-making）。

#### 肆、圖與表格：

- 一、圖與表格均配合正文出現。圖和表格標題需分為上、下兩行，置左。圖表序在上行，以阿拉伯數字序碼，且需粗體；圖表名在下行，精簡命名，不粗體。
- 二、若有資料來源，應於圖表下方附加說明，同時可視需要加以註解，圖表中文字可用簡稱，若簡稱尚未約定俗成或未曾在正文中出現，則須於圖表的註解中列出全稱。
- 三、表格之製作以簡明清楚、方便閱讀為原則，頂端與底端採用粗線（1.5pt）繪製，中間與兩邊不必畫線。
- 四、每一個圖表的大小以不超過一頁為原則，如超過時，須在續表之表序後加上（續）/ (continued)，但無須重現圖表名，如：表1（續）或 Table 1 (continued)。
- 五、圖和表格內容若有解釋的必要，可作註記。註記與圖表之左邊界切齊，列在圖、表之下方，每註另起一行，按編號順序排列，句末須句號。
  - (一) 一個註解：中文稿件以「註：」表示；英文稿件以「*Note.*」表示（*Note.*為斜體）。
  - (二) 一個註解以上，註解順序依序為：
    1. 一般註解：限定、解釋或提供表、圖的相關資訊（以「註」表示）。
    2. 特別註解：特定的某個直欄、橫欄或個別的條目有關（以上標「a、b、c」分段表示）
    3. 機率註解：指出顯著性考驗的結果（以「 $*p < .05$ .  $**p < .01$ .  $***p < .001$ .」表示）。

#### 圖例：

##### 圖 2

兩種不同的表徵(a)不規則排列的表徵(b)線性排列的表徵

(a) Irregular



(b) Linear-Spatial



引自“Materials count: Linear-spatial materials improve young children's addition strategies and accuracy, irregular arrays don't,” by J. Schiffman and E. V. Laski, 2018, *Plos One*, 13(12), p. 4.

表例：

表2

實驗教學前兩組學生的作文成績比較（獨立t考驗）項目

項目	控制組		實驗組		兩組平均差 <sup>c</sup>	t值
	平均數	標準差	平均數	標準差		
內容 <sup>a</sup>	5.25	1.03	3.73	1.08	1.52	4.57***
組織 <sup>a</sup>	5.23	.95	3.85	1.07	1.38	4.31***
文法 <sup>a</sup>	5.44	1.08	4.17	1.18	1.27	3.53*
語辭 <sup>a</sup>	5.39	1.08	4.15	1.13	1.24	3.55**
整體 <sup>b</sup>	21.32	3.81	15.90	4.18	5.42	4.28***

註：控制組與實驗組受試者各20名。

<sup>a</sup> 各項目的滿分為10。

<sup>b</sup> 整體分數為四個分項的得分加總。

<sup>c</sup> 兩組平均差＝控制組平均數－實驗組平均數。

\* $p < .05$ . \*\* $p < .01$ . \*\*\* $p < .001$ .

## 伍、參考文獻格式

### 一、注意事項

- (一) **排序方式**：正文中引用過之文獻，必須全部列舉在參考文獻內，且不得列出未引用之文獻。中文文獻依作者姓氏筆畫順序排列，外文文獻則依作者姓氏字母順序排列。每個作者第一行由第一格開始寫，第二行中文內縮三個字；英文內縮六個字母。
- (二) **標點符號**：中文文獻應使用全形的標點符號，英文文獻則使用半形的標點符號，在半形標點符號後須空一格半形空格書寫。
- (三) **英文名稱之大小寫**：期刊篇名與書名除了第一個、冒號之後或專有名詞之第一個字母大寫外，其餘均使用小寫。期刊名稱除了介系詞與連接詞外，每個字的第一個字母大寫。
- (四) **中文姓名英譯寫法**：中文姓名的英譯若有“-”(例如：Li-Li Huang)，則寫法為Huang, L.-L.；若沒有(例如：Lung Hung Chen)，則寫法為Chen, L. H.。此部分請作者在投稿前自行確認原始參考文獻為何種用法。
- (五) **多人文章**
  1. 作者為一到二十位：須全列出作者姓名，如果為英文文獻，須在最後一位作者前加上「&」。
  2. 二十一位(含)以上作者群：僅列出前十九位與最後一位作者姓名，中間以「...」連接。
- (六) **接受刊登之稿件**
  1. 作者應提供參考文獻之數位物件辨別碼(DOI)，格式請使用「<https://doi.org/xxxxx>」。
  2. 中文參考文獻皆須英文化，附加於該筆中文文獻之後，並置於方頭括號[]內。
  3. 若中文參考文獻已有相對應英文翻譯，請以現成的英文意譯為主；沒有相對應英文翻譯時，有些作者姓名在學術界已有慣用拼法，有些名詞(如：數學)也已有通行或正式的拼法，請採用通行或官方拼法，請勿自行音譯。

## 二、期刊論文

### (一) 已發表：

#### 中文格式

作者名（年代）。篇名。期刊名，卷數（期數），頁數。[Author, A. A. (Year). Title of article. *Title of Periodical*, xx(xx), xxx–xxx.] <https://doi.org/xxxxx>

#### 英文格式

Author, A. A. (Year). Title of article. *Title of Periodical*, xx(xx), xxx–xxx. <https://doi.org/xxxxx>

#### 範例：

蔡文榮、張鈞淇、劉柏宏（2019）。臺灣學術界數學史研究之現況分析與建議：以1992年至2017年學位論文為例。臺灣數學教育期刊，6（1），27–51。[Tsai, W.-J., Chang, C.-C., & Liu, P.-H. (2019). Analysis of current state and recommendations for HPM research in Taiwan: The case of theses and dissertations from 1992 to 2017. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, 6(1), 27–51. (in Chinese)] [https://doi.org/10.6278/tjme.201904\\_6\(1\).003](https://doi.org/10.6278/tjme.201904_6(1).003)

### (二) 已接受，未發表

#### 中文格式

作者名（付梓中）。篇名。期刊名。[Author, A. A. (in press). Title of article. *Title of Periodical*.]

#### 英文格式

Author, A. A. (in press). Title of article. *Title of Periodical*.

#### 範例：

張子貴（付梓中）。數學系學生對函數極限的錯誤認知與解題困境。臺灣數學教育期刊。[Chang, T.-K. (in press). Math Students' Misunderstandings and Obstacles in Learning Limits of Functions. *Taiwan Journal of Mathematics Education*. (in Chinese)]

## 三、未出版碩博士論文

#### 中文格式

作者名（年代）。論文名（未出版博士/碩士論文）。學校名稱。[Author, A. A. (Year). *Title of article* (Unpublished doctoral dissertation/master's thesis). Name of Institution. (in Chinese)]

#### 英文格式

Author, A. A. (Year). *Title of article* [Unpublished doctoral dissertation/master's thesis]. Name of Institution.

#### 四、學術研討會論文

##### (一) 未出版：

###### 中文格式

作者名(年代,日期)。**篇名**(壁報/口頭發表論文)。研討會名稱,舉辦城市,國家。  
[Author, A. A. (Year, Month Day). *Title of contribution* (Paper presentation/Poster presentation/Symposium presentation). Conference Name, Location, Country. (in Chinese)] 研討會議程網址

###### 英文格式

Author, A. A. (Year, Month Day). *Title of contribution* [Paper presentation/Poster presentation/Symposium presentation]. Conference Name, Location, Country.  
<https://xxxxx>

##### (二) 有出版：

1. 期刊：與「期刊論文」相同格式，請見第二項。
2. 書：與「編輯書」相同格式，請見第六項。

#### 五、專書

###### 中文格式

作者名(出版年)。**書名**。出版社名稱。[Author, A. A. (Year). *Book Title*. Publisher Name. (in Chinese)] <https://doi.org/xxxxx>

###### 英文格式

Author, A. A. (Year). *Book Title*. Publisher Name. <https://doi.org/xxxxx>

#### 六、編輯書：主編只有一位時用「(Ed.)」，兩位以上用「(Eds.)」。

###### 中文格式

主編名(主編)(出版年)。**書名**。出版社。[Author, A. A. (Ed./Eds.). (Year). *Book title*. Publisher Name. (in Chinese)] <https://doi.org/xxxxx>

###### 英文格式

Author, A. A. (Ed./Eds.). (Year). *Book title*. Publisher Name. <https://doi.org/xxxxx>

#### 七、書籍中的專章：英文專書主編「名字」縮字放在「姓」之前。

###### 中文格式

作者名(出版年)。章節名稱。載於主編單位/主編名(主編)，**書名**(頁 xx-xx)。出版社名稱。[Author, A. A. (Year). Title of chapter. In E. E. Editor (Ed./Eds.), *Book title* (pp. xx-xx). Publisher Name. (in Chinese)] <https://doi.org/xxxxx>

###### 英文格式

Author, A. A. (Year). Title of chapter. In E. E. Editor (Ed./Eds.), *Book title* (pp. xx-xx). Publisher Name. <https://doi.org/xxxxx>

- 八、**翻譯作品**：若為中文譯本，其文獻須列於中文文獻最前面，如有兩筆以上翻譯文獻，依照英文字母排序，但若譯本有將原作者名翻譯為中文者，須使用其中文名，依筆劃，插入中文文獻之內；若沒有則維持原作者名。

#### 中文格式

原作者名/譯名（翻譯本出版年代）。**翻譯書名**（譯者名，譯）。譯本出版社。（原著出版於 xxx 年）[Author, A. A. (Year). *Book title* (Translator, Trans.). Publisher. (Original work published Year) (in Chinese)]

#### 英文格式

Author, A. A. (Year). *Book title* (Translator, Trans.). Publisher. (Original work published Year)

#### 範例1：

Struik, D. J. (2014)。**數學史**（吳定遠，譯）。水牛。（原作出版於 2012 年）[Struik, D. J. (2014). *A Concise History of Mathematics*. (Wu, D.-Y., Trans.). Buffalo Book Company. (Original work published 2012) (in Chinese)]

#### 範例2：

赫爾曼(2009)。**數學恩仇錄**(范偉，譯)。博雅書屋。（原作出版於 2006 年）[Hellman, H. (2009). *Great feuds in mathematics: Ten of the liveliest disputes ever* (Fan, W., Trans.). Goodness Publishing House. (Original work published 2006) (in Chinese)]

- 九、**研究計畫報告**：若沒有計畫編號或網址，則無須填寫。當機構名稱與出版單位相同時，可省略出版單位。

#### 中文格式

機構名稱或作者名稱（年代）。**篇名**（計畫編號：xxx）。出版單位。[Name of Group. (Year). *Title of report* (Report No. xxx). Publisher name. (in Chinese)] 計畫網址

#### 英文格式

Author/Name of Group. (Year). *Title of report* (Report No. xxx). Publisher name. <https://xxxxx>

- 十、**網路資訊**：檢索時間不需列出，除非該網路資料經常變動。括弧內日期為文章登錄於網站上的日期，如無日期可查，中文文獻則在括弧內註明為（無日期），英文文獻註明為 (n.d.)。日期可用形式為（年代）、（年月）、（年月日）、（無日期）。

#### 中文格式

作者/單位名（年月日）。**篇名**。網站名稱。[Author, A. A. (Year, Month Day). *Article title*. Website Name. (in Chinese)] 網址

#### 英文格式

Author, A. A. (Year, Month Day). *Article title*. Website Name. <http://xxxxx>

**範例：**

國教署 (2020 年 12 月 8 日)。臺灣參加國際數學與科學教育成就趨勢調查 (TIMSS 2019) 成果發表。教育部全球資訊網。[K-12 Education Administration. (2018, December 8). *The report of trends in international mathematics and science study 2019 for Taiwan*. Taiwan Ministry of Education. (in Chinese)]  
[https://www.edu.tw/News\\_Content.aspx?n=9E7AC85F1954DDA8&s=B822E38553C1D561](https://www.edu.tw/News_Content.aspx?n=9E7AC85F1954DDA8&s=B822E38553C1D561)



## 《臺灣數學教育期刊》著作財產權讓與同意書

茲同意投稿至國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會共同發行的《臺灣數學教育期刊》之一文，名稱為：

---

立書人聲明及保證本著作為從未出版之原創性著作，所引用之文字、圖表及照片均符合著作權法及相關學術倫理規範，如果本著作之內容有使用他人以具有著作權之資料，皆已獲得著作權所有者之（書面）同意，並於本著作中註明其來源出處。著作人並擔保本著作未含有毀謗或不法之內容，且絕未侵害他人之智慧財產權，並同意無償授權國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會於本著作通過審查後，以論文集、期刊、網路電子資料庫等各種不同方法形式，不限地域、時間、次數及內容利用本著作，並得進行格式之變更，且得將本著作透過各種公開傳輸方式供公眾檢索、瀏覽、下載、傳輸及列印等各項服務。國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會並得再授權他人行使上述發行之權利。惟著作人保有下列之權利：

- 1.本著作相關之商標權及專利權。
- 2.本著作之全部或部份著作人教學用之重製權。
- 3.出版後，本著作之全部或部份用於著作人之書中或論文集集中之使用權。
- 4.本著作用於著作人受僱機關內部分送之重製權或推銷用之使用權。
- 5.本著作及其所含資料之公開口述權。

著作人同意上述任何情形下之重製品應註明著作財產權所屬，以及引自《臺灣數學教育期刊》。

如果本著作為二人以上之共同著作，下列簽署之著作人已通知其他共同著作人本同意書之條款，並經各共同著作人全體同意，且獲得授權代為簽署本同意書。如果本著作係著作人於受僱期間為雇用機構所作，而著作權為讓機構所有，則該機構亦同意上述條款，並在下面簽署。

本著作之著作財產權係屬（請勾選一項）

- 著作人所有  
 著作人之僱用機構所有

立同意書人（著作人或僱用機構代表人）簽章：\_\_\_\_\_

著作人姓名或僱用機構名稱：\_\_\_\_\_

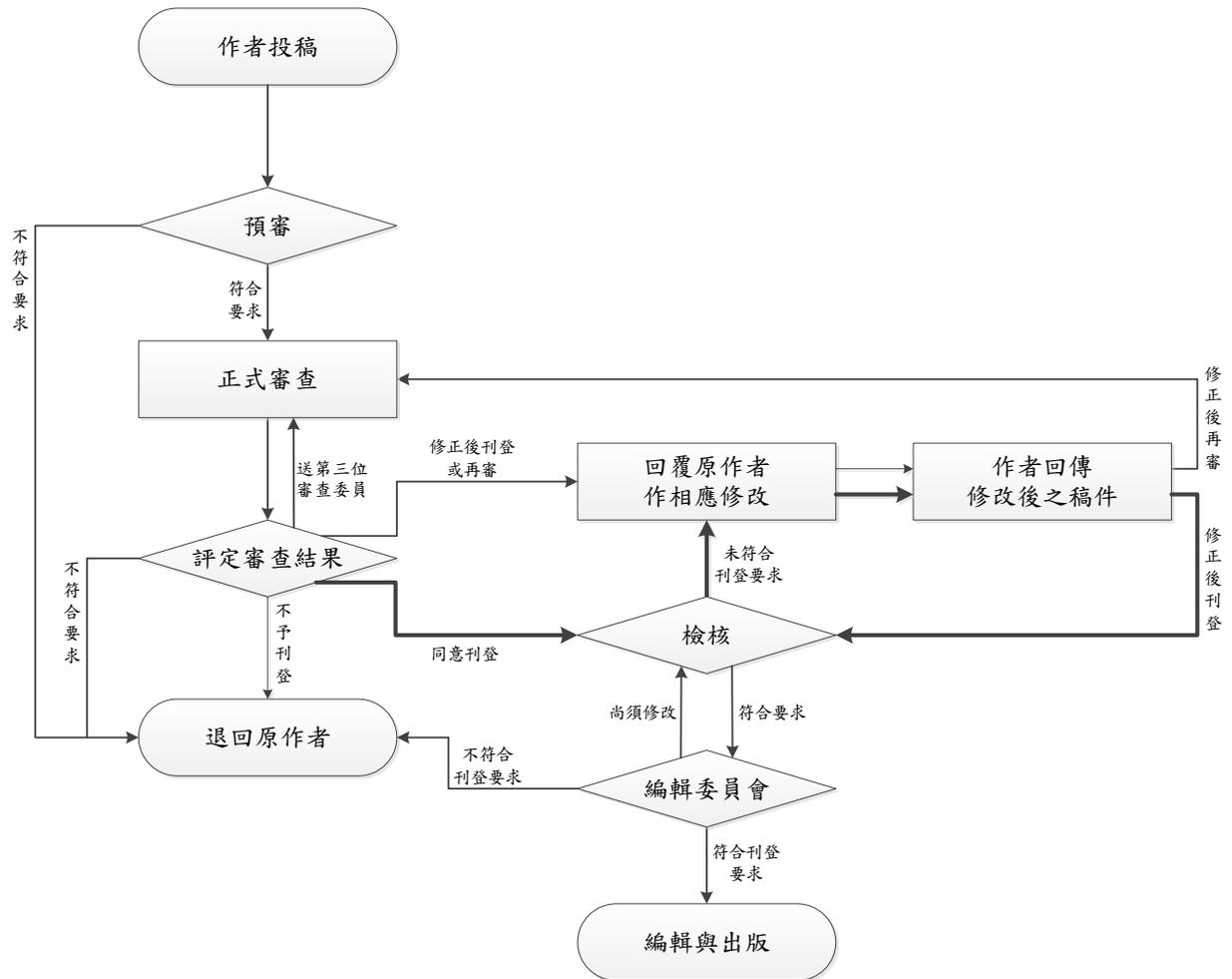
（正楷書寫）

中華民國 年 月 日

## 《臺灣數學教育期刊》編審辦法

2013.04.03 編審委員會會議通過

- 壹、《臺灣數學教育期刊》（以下簡稱本刊）之審查包括預審、正式審查兩個階段：
- 一、預審：檢視來稿是否符合本刊稿約之宗旨、論文品質以及進行論文格式之審查；
  - 二、正式審查：審查委員與投稿者採雙向匿名方式進行。主編就審查委員的回覆意見及論文品質決定接受或拒絕文稿，或是需要作者修改後再進行審查或檢核。需要「修正後再審」之稿件，交原審查委員或委由主編委任進行再審。所有文稿最後須經編輯委員會審查通過後，方能刊出。  
稿件之最終審查決定以投稿後六個月內完成並通知作者。
- 貳、審查委員針對稿件之學術原創性、正確性及價值等條件從嚴審查，以確保所刊文稿的品質。審查委員可提供作者具建設性的修改建議，以利文稿的修正及品質提昇，並以下列其中一種的刊登建議回覆：
- 一、「同意刊登」：論文不需要修改可作原稿刊登。
  - 二、「修正後刊登」：通知作者依審查意見修改或答辯後刊登。
  - 三、「修正後再審」：要求作者依審查意見修改或答辯，修正稿由編輯委員會送原審查委員或委由主編委任進行再審。
  - 四、「不宜刊登」：通知作者退稿。
- 稿件審查的時間以三週為限，若超過期限，編輯委員會將去函提醒審查委員儘速審查，若逾六週審查者仍未寄回審查意見，則編輯委員會得再聘請另一位審查者取代之。每位審查者皆為無償審查，但會在每年第二期期刊中列名致謝。
- 參、本刊主編、副主編或編輯委員如投稿本刊，該委員應迴避推薦審查委員名單、參與審查結果決定之討論或經手處理與個人稿件有關的資料(包括審稿者資料、推薦審查委員名單、審稿意見等)。
- 肆、本刊預計每年四月和十月出版，稿件刊登順序由主編原則上依文稿性質與投稿時間之先後次序決定之，而第一作者的文稿以一篇為限，超過篇數之稿件留至下期刊登。
- 伍、本刊稿件之編審流程如下圖所示：



**Publisher** | Department of Mathematics, National Taiwan Normal University  
 Taiwan Association for Mathematics Education

**Guest Chief Editor** | Hsu, Hui-Yu      Graduate Institute of Mathematics and Science Education,  
 National Tsing Hua University

**Editorial Board**

Chief Editor	Wu, Chao-Jung	Department of Educational Psychology and Counseling, National Taiwan Normal University
Vice Chief Editor	Lin, Yuan-Horng	Department of Mathematics Education, National Taichung University of Education
Editorial Panel	Chang, Yu-Liang	Master Program in Education Administration and Policy Development, Department of Education, National Chiayi University
	Chen, Fei-Ching	Graduate Institute of Learning and Instruction, National Central University
	Chen, Jhih-Cheng	Department of Applied Mathematics, National University of Tainan
	Hou, Ya-Ling	Department of Special Education, National Pingtung University
	Hsu, Hui-Yu	Graduate Institute of Mathematics and Science Education, National Tsing Hua University
	Huang, Hsin-Mei	Department of Learning and Materials Design, University of Taipei
	Lee, Yuan-Shun	Department of Mathematics, University of Taipei (Retired)
	Liu, Po-Hung	Fundamental Education Center, National Chin-Yi University of Technology
	Tam, Hak-Ping	Graduate Institute of Science Education, National Taiwan Normal University (Retired)
	Wang, Ting-Ying	Department of Mathematics, National Taiwan Normal University
	Wu, Chung-Chin	Department of Early Childhood Education, National Pingtung University
	Yuan, Yuan	Department of Mathematics Education, National Taichung University of Education
International Editorial Panel	Lo, Jane-Jane	Department of Mathematics, Western Michigan University, USA
	Seah, Wee-Tiong	Faculty of Education, University of Melbourne, Australia
	Toh, Tin-Lam	National Institute of Education, Nanyang Technological University, Singapore

---

**Address** | No.88 Sec. 4, Ting-Chou Rd., Taipei City, Taiwan, R.O.C.  
 Department of Mathematics, National Taiwan Normal University  
 "Taiwan Journal of Mathematics Education"

TEL 886-2-7749-3678

FAX 886-2-2933-2342

E-mail TJME.taiwan@gmail.com

Website <http://tjme.math.ntnu.edu.tw/contents/contents/contents.asp?id=21>

1 國二學生閱讀數學幾何證明問題之視覺行為特徵

／ 傅培軒、徐柏棻、蔡孟蓉

Eighth Graders' Visual Behavior Characteristics When Reading Mathematical Geometry Proof Problems

／ Pei-Hsuan Fu, Po-Fen Hsu, Meng-Jung Tsai

39 以眼球追蹤技術探討數學焦慮與閱讀解題範例歷程之關聯—以微分為例

／ 黃靖妤、邱國力

Exploring the Relationships Between Mathematics Anxiety and the Process of Reading Differentiation Worked Examples: An Eye-tracking Study

／ Jing-Yu Huang, Guo-Li Chiou

71 透過眼動探討國小與國中職前教師的數學課程覺察力：個案研究

／ 林勇吉

Using Eye-Tracking to Investigate Curricular Noticing Among Pre-service Elementary and Secondary Mathematics Teachers: A Case Study

／ Yung-Chi Lin

## 學術瞭望 Academy Observatory

109 數學教育的神經革命：腦科學新興技術之理論與實務應用

／ 許慧玉、于靖、丁志堅、姚在府、潘柏宇

The Neuroscience Revolution in Mathematics Education: Theoretical and Practical Applications of Emerging Brain Technologies

／ Hui-Yu Hsu, Jing Yu, Tsu-Jen Ding, Zai-Fu Yao, Bo-Yu Pan

