國立新竹師範學院
「新竹師院學報」第九期（民國85年）：363～390

聽覺障礙學生與普通學生分數減法演算法則之分析

黃桂君

特殊教育學系

摘要

本研究以「分數減法診斷測驗」實作原稿，分析比較581名聽覺障礙學生與746名普通學生演算所出現的錯誤法則，以捕捉其分數減法能力的認知狀態。研究結果顯示：聽障組與普通組學生較常出現的演算法則大致相同，但是，在常見錯誤演算法則與一般錯誤演算類型人數分配上，兩組學生均達顯著差異。最後，根據研究發現作進一步的討論，並提出若干教學與研究上之建議。

關鍵字：聽覺障礙、認知診斷、分數減法、演算法則

國立新竹師範學院
「新竹師院學報」第九期（民國85年）：363～390

聽覺障礙學生與普通學生
分數減法演算法則之分析

緒論

聽覺障礙兒童由於缺乏聽覺輸入，僅能依賴其他感覺線索發展其認知結構，對於抽象概念的學習有極大的影響。雖然，聽覺障礙研究領域少有探討數學能力或概念發展的研究(Beher，Wachsmuth & Post，1985；Post，Wachsmuth，Lesh，& Behr，1985； Titus，1992)，然而，從國內有關於聽覺障礙學生數學能力的研究可以發現，聽障學生數學學習約落後普通學生四至五個年級的程度(林寶貴、李如鵬，民79)；而美國「聽覺障礙示範中等學校」(Model Secondary School for the Deaf)，以及「聽覺障礙技術學院」(the National Technical Institute for the Deaf)的教育人員也強烈意識到聽障學生在數學學習具有特殊的困難，極力呼籲重視在這些課程領域的研究(Bone et al.,1984)，這些均顯示出聽障學生數學能力研究的迫切性。

而加以建構，因此，在學習過程裡，學生會主動地尋求合理的解題方法和解釋，並將新舊知識調適重組達成一致(洪志成，民79；郭重吉，民81)，此等學習觀目前似乎已逐漸形成數學教育上的一個運動(楊瑞智，民83)。另一方面，知識組織的結構化的特性，已促使一些理論模型的發展，其中，基模理論主張理解歷程是一個雙向的認知過程，由個體的知識結構所驅動(Rumelhart & Ortony，1977)，它假定人類的知識並非隨機、孤立的訊息集合，而是以相當規律而且有意義的方式組織在一起，此組織化的知識即稱爲「基模」(Rumelhart，1981)，在基模理論中，個人主動地處理訊息，並根據環境中的訊息及其先前的知識，對世界加以解釋(Marshall，Pribe & Smith，1987；Sweller，1989)。

從數學課程的剖析可以發現，有關分數、小數、比例、數線、和百分比等有理數主題，皆屬於數學課程的核心，在學生比例推理發展中扮演著基礎性的角色(引自Titus，1992)。以美國爲例，Jeck(1981)的研究提出，三至五年級的學生，不到10%具有分數的基本概念。一旦學生不瞭解分數的意義，將造成運算符號與具體實物操作無法連結，而在分數數值大小的判斷上產生困難(Jeck，1981；NAEP，引自Titus，1992；Mack，1988)，Clements和Lean(1987)研究四至六年級學生，也得到相同的結論。

這些學生分數直觀的知識(intuitive knowledge)方面的研究，主要透過直觀推理的原稿分析(protocols)，觀察學生在不同層次表徵互動的變化(林碧珍，民79；Kieren，1988)。例如，藉由學生在實際操作、或心象(mental images)操作，或口語與書寫的符號表徵，觀察學生在數

字經特定型式的轉換(transformation)後，判斷數值變化情形所採用的基本策略(Carpenter & Moser，1986)，其中之一即爲探討學生所發明的計算法則(Harel & Behr，1988；Pirie，1988；Resnick，1986)，如果學生不瞭解分數的意義，將僅能以機械式的記憶規則完成計算。因此，從學生所使用的錯誤算則，來推斷個體內在的數學演算架構，是研究學生數學能力認知結構的主要方法之一(例如：Behr，Wachsmuth，& Post，1985；Maurer，1987；Resnick，1987)。學生運用的策略與表現出的程序性技能的種類極多，有些錯誤的法則只是學生偶然產生的。其中分數演算最常見的法則是：對於相對應部份的分子或分母直接進行相加或相減的演算(Jeck，1981；The National Assessment of Educational Progress，簡稱NAEP，引自Titus，1992)。

在有關聽障學生分數概念的研究上，Titus(1992)透過「分數排序的作業」(“order and equivalence” task)發現，聽障學生在分數概念與計算能力的發展上雖然落後同年齡的普通學生，但均運用相同的解題策略，且呈現出一致的錯誤類型。這種情形和其他研究聽障學生認知和概念發展的研究(例如：Greengerg & Kusche，1989；Zwiebel & Mertens，1985)以及語文、閱讀、書寫(例如，Paul & Quigley，1990)、測量、和金錢(例如，Austin，1975) 等特定領域研究所獲得的結論類似。 其中，大部份聽障學生均能正確排序「同分母的正值分數」，然而，在排序「分母不同的分數」時，就會產生困難。雖然有2/3年齡較大的聽障生能答對同分子異分母的比較題(例如：1/2與1/3)，但是大部份聽障學生並不瞭解分子與分母乘上相同數值，整個分數數值不變，且對排序「分母、分子數值不同」分數感到最爲困難。聽障學生與普通學生在排序時均會受分數中整數數值大小的影響，如同Behr等人(1984)研究中所發現，聽障學生在分數概念發展早期，常以所謂「整數原則」(whole number dominance)，根據構成分數的個別數值來判斷分數的大小。

建構論學習觀強調的是學生所主動尋求合理的解題方法和解釋，重視學生個體透過解釋或理解的歷程所建構的數學知識， (Anderson，1984；Greeno，1978)。 反省以往聽障學生數學能力研究，無論是將「數學能力」當作學業能力依變項中的一個研究變項的研究，或者探討聽障學生與普通學生的數學能力的個人背景因素研究，皆以數學成就測驗的總分代表能力的高低，這樣的研究設計理念只能將「數學能力」當爲一項靜態「學習的結果」，難以推測聽障學生動態的數學「學習歷程」。因此，本研究的目的擬以實作原稿分析的方式，探討聽障學生與普通學生分數減法演算歷程所運用的法則，以比較其該領域能力的異同。

研究設計

本研究共分爲兩部份，第一部份爲試驗性實作原稿分析，用以提供擬訂正式實作原稿分析研究提議的依據，並作爲正式分析時分數減法演算法則編碼歸類架構之參考。第二部份爲正式實作原稿分析，共包含分數減法演算歷程中出現的錯誤法則分析、分數減法演算法則答案類型編碼系統與錯誤類型分析，以及分數減法演算法則次數分析。

壹・研究者的訓練與角色

研究者曾於台灣師範大學博士班修習「質的研究法」與「社會心理語言學分析」等課程，並自碩士班起即曾參與質的分析有關的其他研究。

本研究中研究者之角色主要爲：透過觀察學生分數減法演算的原始作答資料，進行實作原稿分析，歸納其所使用的運算法則，以回答研究提議下的待答問題。研究者須抱持向報導者(學生)學習的態度，用心設身處地模擬學生演算時的思考歷程，仔細地分析學生試題演算的原始資料，找出其運算法則。避免過早主觀地認定該名學生的錯誤在演算上是亂無章法、毫無脈絡可尋。

貳・資料分析

一、實作原稿分析

研究者主要使用原稿分析 (protocol analysis) 方法，分析學生在分數減法診斷測驗中所產生的錯誤實作原稿，對學生對於分數減法可能的迷失概念(misconception)，或錯誤類型及組型(types of error and error patterns)作系統性的辨認、分類及原因的推論(Gee, Michaels，& O’Conner，1992)。以了解個體在分數減法錯誤的演算歷程中所使用的法則。

研究者採用Glasser和Strauss(1967)所倡導的「持續比較法」(constant comparison)及運用LeCompte、Preissle和Tesch(1993)所建議的幾種質的分析的一般程序來達成原稿分析的目的。所謂「持續比較」包含三個階段(1)比較各個事件(incidents)並作歸類；(2)統合所歸納出的各個類別並尋求類別的本質(properties)及作類別的調整；(3)比較各類別的本質、精簡描述變項和事項、尋求類別本質抽象的共同性，並探求這些共同性本質的適用解釋範圍(scope in the applicability)以形成結論。

爲確立研究時資料分析的可信度，資料分析之前研究者尋求一位曾以質的方法進行論文研究的諮商碩士協助進行編碼者間信度(intercoder reliability)。首先，研究者向另一位評判者說明本研究目的，並討論研究編碼之方式。資料分析時由兩位評判者先就一份文字稿進行編碼，之後進行討論，並明確定義編碼類別，之後再分別進行第二份文字稿之編碼，編碼後再

進行討論，二人經由十次討論，共計十份資料分析得出兩位評判者已顯示良好的一致性，因此由研究者自行進行其餘資料之編碼。

待全部資料編碼完成後，再依個別題目就各錯誤法則類別進行次數統計，以回答本部份研究提議之提議。

一致性的算法爲：

$$\frac{\text{編碼一致的次數}}{\text{編碼一致的次數}+\text{編碼不一致的次數}}$$

二、演算法則答案類型編碼系統與統計考驗

研究者以試驗性原稿分析的分類架構爲依據，反覆的判讀、分析、歸納正式研究資料之後，重新編碼建立另一個分類架構。本研究並以 SPSS-PC 進行常見法則出現次數的計數統計，以卡方考驗檢驗與兩組學生錯誤類型出現次數分配的差異。

實作原稿分析的預備性研究

壹、研究方法

由於本研究所採的實作原稿分析方式趨向於一種周而復始的探索模式(Bogdan & Biklen，1982)，因此爲增進研究者對於研究主題的洞察力，發展有關研究提議並改進資料蒐集的計畫，本研究在進行正式的實作原稿分析之前，先自編二十一道分數減法計算試題（題目成份之細目表請見表一），以台南市安順國小與志開國小95名學生爲樣本，進行一項小型的試驗性研究(pilot study)。

在原稿分析預備性研究中，研究提議暫訂爲「學生在錯誤的分數減法演算歷程中，會使用何種法則作答題目？」

表一　「分數減法演算歷程試驗性原稿分析試題」題目成份細目表

	整數與分數的減法			眞分數的減法						帶分數與帶分數的減法 帶分數與眞分數的減法											
	題型Ⅰ			題型Ⅱ		題型Ⅲ				題型Ⅳ		題型Ⅴ		題型Ⅵ				題型Ⅶ			
題目內容成份	4	10	15	20	2	8	13	18	1	7	12	19	5	17	3	9	14	11	16	21	6
A1 將a(b/C)化爲(ac+b)/c	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
A2 將d(f/e)化爲(de+f)/e	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
B1 區分帶分數中整數與分數部份	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
C1 將整數化爲假分數或帶分數	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C2 通分	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
LCD=c*f(c,f互爲質數	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
c是f(或f爲c)的因數	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
c,f不互質且爲LCD的因數	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
A3 分子相減涉及借位	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
A4 化簡答案	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
約分	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0
轉換爲帶分數	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
B2 分子相減需自整數借1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
B3 分子相減涉及借位	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1
B4 化簡答案(約分)	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0

註：1. A代表屬於方法A的成份；B代表屬於方法B的成份；C代表方法A與方法B共有的成份
2. N代表整數、M代表帶分數、F代表眞分數
3. LCD代表兩分母的最小公倍數
4. 0表示演算該類型題目不需用到的成份；1表示演算該題目需用到的成份

貳、試驗性研究初步結論與意涵

本階段研究施測共得有效資料95份，扣除得滿分的試卷27份，實際進行錯誤演算法則分析之試卷共68份，編碼者信度爲.90。經過原稿分析，對個體試卷上的答題痕跡(trace)作分析記錄，本研究對於此研究提議發現了一些可能的暫時性答案。

這些暫時性的答案，大致可以分成第一類是「特殊錯誤法則」，意指可能出現於牽涉某些演算成份的試題中的錯誤法則，包括：「有關分數意義的問題」、「將整數化爲分數的問題」、「將帶分數化爲假分數的問題」、「找出公分母的問題」、「通分的問題」、「分子向整數借1的問題」等六類型的錯誤法則；第二類是「一般錯誤法則」，意指可能出現於各題目中的錯誤法則。每一法則以三碼代表，第一碼爲「特殊錯誤法則」的代碼，第二碼爲某特殊錯誤法則的類型代碼，第三碼爲一般錯誤法則的代碼（試驗性原稿分析的結果請詳見黃桂君，民84）。

試驗性原稿分析結果，對於本研究正式的演算歷程實作分析有二項重要的意涵：

一、提供擬訂正式實作原稿分析研究提議的依據

由於在質的研究中，研究提議只用來導引資料蒐集的方向，而問題常形成於蒐集資料的過程中 (Jorgensen，1989)，因此在試驗性研究中發現，某些錯誤的法則會使學生在某些題型中得到正確答案，此提供了研究者擬訂後續研究研究提議的依據。

從試驗性研究的結果顯示：某些錯誤的法則會使學生在某些題型中得到正確答案，因此本研究正式的實作原稿分析研究提議，除原有問題一：「學生在錯誤的分數減法演算歷程中，會使用何種法則作答題目？」外，將增列問題二：「學生所在分數減法演算歷程中，所運用的法則如何影響答案的正確性？」並將試驗性分析所發展的編碼歸類架構，作為正式原稿分析資料處理歸類的參考。

二、作爲正式分析時分數減法演算法則編碼歸類架構的參考

試驗性分析所發展的編碼歸類架構，可視爲對於學生分數減法演算歷程概略性的原稿分析結果。本研究於正式實作原稿分析時將這個暫時性的編碼歸類架構引入所蒐集的資料中，當資料遇到不適合原已形成的編碼歸類架構的新事例時則修改該架構，並分析探尋每個反面事例的意義，反覆地定義現象和形成解釋，以獲得一個周全的演算歷程分析結果。

實作原稿分析正式研究

延續分數減法演算實作原稿試驗性分析，本研究在正式分析時，同樣依據Glaser和Strauss (1967)所主張的「持續比較法」，對於學生試卷上的答題痕跡(trace)作分析記錄，進行分析、比較、分類和歸納，以更廣泛地擷取學生在作答分數減法試題時可能出現的法則。

壹・研究提議

根據試驗性實作原稿分析的結果，本部份的研究提議修改爲：

(1)「學生在錯誤的分數減法演算歷程中，會使用那些法則作答題目？」

(2)「學生所在分數減法演算歷程中，所運用的法則如何影響答案的正確性？」

貳・研究樣本與工具

本研究取樣係根據教育部頒佈之國小數學課程爲標準，以完全學過分數減法演算單元後一學年的學生爲取樣對象。由於聽障學生與普通學生的數學課程進度並不相同且考慮樣本人數問題，因此，本研究聽障組學生樣本除以八十三學年度全國啓聰學校(班)國中一年級學生爲施測對象，同時將聽覺障礙組以全國啓聰學校(班)國中聽覺障礙學生納爲樣本，共計581

名；普通組樣本則包含台南市安慶國小、和順國小、安順國小、石門國小、台南縣北門國小、歡雅國小、澎湖縣興仁國小、赤崁國小等八所國小六年級學生共746人。

本研究以自編「分數減法診斷測驗」爲施測工具，共計三十二道計算題。各題題目成份之細目表請見表二。

表二　「分數減法診斷測驗」各題目成份細目表

	整數與分數的減法			眞分數的減法								帶分數與帶分數的減法 帶分數與眞分數的減法																				
	題型Ⅰ			題型Ⅱ		題型Ⅲ						題型Ⅳ				題型Ⅴ					題型Ⅵ						題型Ⅶ					
題目內容成份	13	26	6	20	31	11	22	2	18	24	9	1	14	25	4	17	28	7	19	15	12	23	3	16	32	5	30	29	8	21	27	10
A1 將帶分數化爲假分數	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
將a(b/c)化爲(ac+b)/c0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
將d(f/e)化爲(de+f)/e	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1
B1 區分a和d，b/c和f/e	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
C1 將整數化爲假分數或帶分數	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C2 通分	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
LCD=c*f(c,f互爲質數)	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
c是f(或f爲c)的因數	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1
c,f不互質且爲LCD的因數	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
A3 分子相減涉及借位	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1
A4 化簡答案	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
答案約分	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
答案轉換爲帶分數	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0
B2 分子相減需自整數借1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
B3 分子相減涉及借位	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1
B4 化簡答案(約分)	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1

註：1. A代表屬於方法A的成份；B代表屬於方法B的成份；C代表方法A與方法B共有的成份

2. N代表整數、M代表帶分數、F代表眞分數

3 LCD代表兩分母的最小公倍數

4. 0表示演算該類型題目不需用到的成份；1表示演算該題目需用到的成份

參・分數減法演算歷程中出現的錯誤法則分析結果與討論

「分數減法診斷測驗」正式施測結果，本研究扣除普通組滿分的試卷 125 份， 聽障組滿分的試卷 33 份、實際進行錯誤演算法則分析之試卷爲普通組 621 份，聽障組 689 份。

從原稿分析的結果顯示，兩組學生在研究提議一「學生在錯誤的分數減法演算歷程中，會使用那些法則作答題目？」上，所使用的法則類型極爲相似，因此，兩組學生所顯現的演算法則合併呈現於表三「聽障學生與普通學生分數減法演算實作正式原稿分析歸類法則」。此與文獻研究所顯示，聽障學生在分數概念與計算能力的發展，以及其他研究聽障學生認知和概念發展雖然落後同年齡的普通學生，但兩組學生均運用相同的解題策略，且運用一致的錯誤類型的研究結論類似（Austin，1975； Greengerg & Kusche，1989； Paul & Quigley，1990；Titus，1992；Zwiebel & Mertens，1985），似乎聽障學生聽覺學習管道的缺陷對於其

認知發展的速率有較大的影響。惟聽障組較普通組有更多的學生有空白未填答、或呈現毫無系統的錯誤法則的答案，可能與部份聽障學生極其低落的數學能力有關。

以下將分別從兩組學生所出現的各類別的錯誤法則，就各法則的性質、可能出現的題型，及不同的法則對於答案正確性影響，加以說明。

一、各類單純的特殊錯誤法則

以下將對於各類單純的特殊錯誤法則加以闡述：

(一)整數化爲分數的問題

本類錯誤出現於題型 I ，當學生作答分數與整數相減的題目時，所可能運用的錯誤法則。

【法則110】將整數N化爲N(N/N)

例如：2 - 4/5 = 2(2/2) - 4/5 (第13題)

承續上面演算式，運用此法則作答題目其結果有兩種可能，一是以正確的方式繼續演算，則得到的答案爲1/5；例如：2(2/2) - 4/5 = 2(10/10) - 8/10 = 2(2/10) = 2(1/5)一是採「相對應的部份大數減小數的法則」，則得到答案爲 2(2/3)。

【法則120】將整數N化爲N/0

例如：2 - 4/5 = 2/0 - 4/5 = 2/5 (第13題)

運用此法則的學生， 化整數爲n/0之後，接著採用「相對應部份大數減小數」的法則，得到2/5的答案。

【法則130】整數直接與整數相加

例如：5(2/3) - 3 = 8(2/3) (第26題)

【法則140】將整數N化爲另一分數的(分母/分母)

例如：2 - 4/5 = 5/5 - 4/5 = 1/5(第13題)

【法則150】將整數N化爲(1/N)

本研究發現，採用方法A的學生中，有些使用本法則處理整數與分數相減的問題者。

例如：5 2/3 - 3 = 17/3 - 1/3 = 16/3= 5(1/3)(第26題)

除了得答案5(1/3)外，另有學生繼續使用了「N-1=N」的法則，而得到5(2/3)的答案。

例如：17/3 - 1/3 = 17/3 = 5(2/3)

【法則160】將整數N化爲(N/1)，相對應的整數相減本研究發現，採用方法A的學生中，有些使用本法則處理整數與分數相減的問題。

例如：8 - 4(1/6) = 8/1 - 25/6 = 17/5 = 3(2/5)(第6題)

除了得答案3(2/5)外，另有學生繼續使用了「N-1=N」的法則，而得到2(5/6)的答案。

例如：8 - 4(1/6) = 8/1 - 25/6 = 17/6 = 2(5/6)(第6題)

【法則170】整數直接與分子相加

例如：2 - 4/5 = 6/5 =1(1/5) (第13題)

【法則180】帶分數化假分數後分子與整數相減

本法則出現於第6、26題。

例如：5(2/3) - 3 = 17/3 - 3 = 14/3 = 4(2/3) (第26題)

【法則190】減數爲整數，被減數爲帶分數，兩者整數直接相減

例如： 4(1/6) = 4(1/6)(第6題)

運用此策略的學生，雖然在第6題答錯，但在第26題卻仍然會得到正確答案。

5(2/3) - 3 = 2(2/3)(第26題)

(二)分母相同時的錯誤

類錯誤出現於同分母分數相減時(題型Ⅱ、Ⅳ、Ⅴ)，其產生的原因可能由於學生對於分數的意義毫不瞭解，可將分數的減法完全類比爲整數的減法加以處理。使用方法A或方法B進行分數減法演算的學生均可能發生此類錯誤。

【法則210】分子、整數大數減小數；分母爲1

例如：3(3/4) - 1(1/4) = 2(2/1) (第1題)

【法則220】分子、整數大數減小數；分母正確

例如：2(1/8 - 7/8 = 2(6/8) (第28題)

在分母相同下運用本法則，雖然在減數分母小於被減數分母時，答案錯誤；但是當減數的分母大於被減數的分母時，則仍會得到正確答案。

例如：3(3/4) - 1(1/4) = 2(2/4) = 2(1/2)(第1題)

【法則230】分子、整數大數減小數；分母爲0

例如：3(3/4) - 1(1/4) = 2(2/0) (第1題)

【法則240】分子、整數大數減小數；兩分母相乘

例如：3(3/4) - 1(1/4) = 2(2/16) = 2(1/8)(第1題)

【法則250】分子與分母交叉相乘，大數減小數；分母正確

例如：2/5 - 1/5 = 10/5 -5/5 = 5/5 = 1/1 = 1(第20題)

(三)帶分數化爲假分數的問題

將帶分數化爲假分數的錯誤法則，推斷來自於學生無法眞正明瞭整數與分數間的關係所產生的結果。當學生採用方法 A 演算分數減法時，在帶分數減法的題型Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ中，即可能產生此錯誤法則。

【法則310】新分子=整數+原分子

例如：2(6/7) =(2+6)/7 = 8/7 (第25題)

【法則320】新分子=整數×原分子

例如：2(6/7) = (2×6)/7 = 12/7(第25題)

【法則330】新分子=整數×原分子+原分母

例如：2(6/7) = (2×6+6)/7= 18/7(第25題)

(四)找出公分母的問題

當題目中相減的兩個分數分母不相同時(題型Ⅲ、Ⅴ、Ⅵ)，無論使用方法 A 或方法 B 演算分數減法的學生在「找出公分母」的演算步驟，均有可能產生下列的錯誤法則。根據本部份所使用的法則，推斷學生可能知道分母相同才能相減，但並沒有通分的觀念；或者學生未必能眞正理解分數在分母相同才能相減的意義，這些法則僅是僵化地依固定步驟計算的結果。

【法則410】公分母爲最小公倍數，分子大數減小數

例如：4/5 - 1/3 = 3/15(第18題)

【法則420】公分母爲兩分母相乘，分子大數減小數

例如：7/12 - 1/3 = 6/36 = 1/6(第22題)

當兩分數的分母互質，則利用法則420與法則410演算的結果相同。

【法則430】公分母爲大數，分子大數減小數

例如： 4/5 - 1/3 = 3/5(第18題)

當兩分數的分母之中，有一個分母爲另一個分母的因素，則採用法則430與法則410演算的結果相同。

【法則440】公分母爲兩分母相加

例如：7/8 - 1/6 = 6/14 = 3/7 (第9題)

【法則450】公分母爲兩分母大數減小數

例如：7/12 - 1/3 = 6/9 = 2/3 (第22題)

【法則460】公分母爲小數

例如：2/3 - 1/2 = 1/2 (第11題)

【其他】

(1)原分母先與對角線分子約分，公分母爲第一個分數之分母

例如：2/3 - 1/2 = 1/3 - 1/1 = 0/3 (第11題)

(2)公分母爲兩分母之公因數

例如：7/12 - 1/3 = (7-1)/3 = 6/3 (第22題)

(3)公分母爲大數減小數， 分子爲原分子加原分母

例如：7/12 - 1/3 = (7+12)/9 - (1+3)/9 = (19-4)/9 = 15/9 = 1(2/3) (第22題)

(4)公分母爲靠近等號之分母，分子大數減小數

例如：7/12 - 1/3 = (7-1)/3 = 6/3 (第22題)

當兩分數的分母之中，有一個分母爲另一個分母的因素，且靠近等號之分母爲大數則利用法則 440、法則430與法則410演算的結果相同。

(5)公分母爲減數之分母，分子大數減小數

例如：7/12 - 1/3 = (7-1)/12 = 6/12 = 1/2 (第22題)

當兩分數的分母之中，有一個分母爲另一個分母的因素，且靠第一個分數之分母爲大數則採用法則450、法則430與法則410演算的結果相同。

(五) 通分的問題

和特殊錯誤法則(四)相同，當題目中相減的兩個分數分母不相同時(題型Ⅲ、Ⅵ、Ⅶ)，無論使用方法A或方法B演算分數減法的學生在「通分」的演算步驟，均有可能產生下列的錯誤法則。本部份的錯誤法則，最大的特徵在於學生能求出公分母，但不能正確地改變分子的數值，使分數數量維持不變，然後再運用「分子部份，大數減小數」的法則，計算最後的答案。

【法則510】公分母爲兩分數分母相乘，分子被交叉加上另一分母

例如：4/5 - 1/3 = (7-6)/15 = 1/15 (第18題)

【法則520】公分母爲最小公倍數，新分子爲原分子與原分母交叉相乘

例如：7/12 - 1/3 = 21/12 - 12/12 =9/12 (第22題)

運用本法則演算，當兩分數的分母互質時，會得到正確答案。但是，當公分母小於原分母相乘時，演算的結果是錯誤的。

例如：4/5 - 1/3 = (7-6)/15 = 1/15 (第18題)

【其他】

(1)通分後，整數與分子均乘上分母最小公倍數的因數

例如：1(1/4) - 2(2/3) = 1×3(3/12) - 2×4 (8/12) = 5(5/12) (第21題)

(2)通分後，分子加上公分母對原分母的倍數

例如：7/12 -1/8 = (7+2)/24 - (1++3)/24 = (9-4)/24 = 5/24 (第2題)

(3)通分後，分子爲該公分母對原分母的倍數

例如：7/12 - 1/8 =(2-3)/24 = 1/24 (第2題)

(4)分母先約分，再利用相對應的分子分母大數減小數

例如：7/12 - 1/8 = 7/3 - 1/2 = 6/1 (第2題)

(5)通分後，每一分子乘以本身分母

例如：4/5 - 1/3 = (20-3)/15 = 17/15 = 1(2/15) (第18題)

(6)通分後，忽略原有分子

例如：4/5 - 1/3 = 3/15 - 5/15 = 2/15 (第18題)

(六) 向整數借 1 的問題

當學生採用方法B演算分數減法， 當相減的兩分數經過通分後，減數的分子小於被減數的分子(題型Ⅵ、Ⅶ)時，減數的子須要向整數借1以減去被減數的分子，則會出現此類型的錯誤法則。其產生的原因，可能是學生並不確切瞭解整數與分數間的關係。

【法則610】分子加10

例如：2(2/9) -5/9 =1(12/9) - 5/9 = 1(7/9) (第19題)

【法則620】整數未減1

例如：2(2/9) -5/9 = 2(11/9) - 5/9 = 2(6/9) = 2(2/3) (第19題)

【其他】

(1)借1，新整數加1

例如：2(2/9) - 5/9 = 3(11/9) - 5/9 = 3(6/9) (第19題)

(2)借1，新分子加10，新整數未減1

例如：2(2/9) -5/9 =2(10+2)/9 - 5/9 = 2(7/9) (第19題)

(3)借1，新分子加10，新整數加1

例如：2(2/9) -5/9 = 3(12/9) - 5/9 = 3(7/9) (第19題)

(4)借1，新分子爲原整數乘原分母加原分子

例如：2(2/9) - 5/9 = 2(2×9+2)/9 - 5/9 =1(20/9) - 5/9 = 1(15/9) (第19題)

(5)借1，小數的分子乘以另一分數的分母，另一大數分子不變

例如：2(2/9) - 5/9 = 1(2×9)/9 - 5/9 = 1(18-5)/9 = 1(13/9) (第19題)

二、以兩種以上的的特殊錯誤法則作答的情形

根據學生所使用的特殊錯誤法則可以發現，有些題型可能產生以兩種以上的特殊錯誤法則作答的情形，以下分別就其大類說明之。

(七)出現於方法 A 的混合特殊錯誤法則的問題

特殊錯誤法則(三)「化假分數的錯誤」與錯誤法則(四)(五)「分母不同時的錯誤」的混合錯誤。此類型的錯誤法則出現於題型Ⅴ與題型Ⅵ。

(八) 出現於方法 B 的混合特殊錯誤法則的問題

特殊錯誤法則(四)(五)「分母不同時的錯誤」與錯誤法則(六)「借1錯誤」的混合錯誤，然後再運用「大數減小數」的法則進行演算。此類錯誤法則出現於題型Ⅶ。

三、一般的錯誤法則

一般的錯誤法則是可能出現於各題中的錯誤，其產生視題目演算的過程是否產生出現某

種一般錯誤法則的條件。接著將對各類的一般錯誤法則，分類舉例闡述如下：

【法則002】答案未約分

最後的答案分子與分母之間有公因數時，並未約分。

例如：2(5/8) - 3/8 = 2(2/8) (第4題)

【法則003】答案未化成帶分數

演算結果爲假分數，最後的答案未化爲帶分數，此類法則多出現使用A法演算的情況。

例如：1(3/4) -1/6 = 17/12(第5題)

【法則004】答案未約分又未化成帶分數演算結果爲分子與分母之間仍有公因數，且爲假分數，但是答案並未化爲最簡分數。

例如：3(3/4) - 1(1/4) = 15/4 - 5/4 = 10/4 (第1題)

【法則005】忽略整數

運算過程將整數部份忽略，只做分數部份的運算。

例如：3(3/4) - 1(1/4) = 3/4 - 1/4 = 2/4 = 1/2(第1題)

【法則006】計算錯誤

在演算過程中，由於計算錯誤而導致答案不正確，例如：分子相減錯誤、分母相減錯誤、整數相減錯誤，以及筆誤等原因。

【法則007】以其他的方法計算

在作答分數減法試題時，以其他方法如加法、乘法、除法等其他方法計算所導致的錯誤。

綜合上述所歸類的法則，正符應有關建構學習觀的文獻所稱，學習是一種解釋或理解的歷程，在學習的過程裡，學生會主動地尋合理的解題方法和解釋，並將新舊知識重組達成一致，因此，當學生使用不完全的演算法則解題時遭遇到困難時，則會尋求其他的方式來加以解決。

表三　聽障組與普通組學生分數減法演算實作正式原稿分析歸類法則

	整數與分數的減法	眞分數的減法		帶分數與帶分數的減法 帶分數與眞分數的減法			
	題型 I	題型 II	題型 III	題型 IV	題型 V	題型 VI	題型 VII
壹、特殊錯誤法則							
一、將整數化爲分數	*						
110 將整數N化爲N(N/N)							
120 將整數N化爲N/0							
130 整數直接和整數相加							
140 將整數N化爲另一分數的(分母/分母)							
150 將整數N化爲(1/N)							
160 將整數N化爲(N/1)							
170 整數直接與分子相加							
180 帶分數化假分數後分子與整數相減							
190 減數爲整數，被減數爲帶分數，兩者整數直接相減							
二、分母相同時的錯誤		*	*	*	*	*	*
210 分子、整數大數減小數；分母爲 1							
220 分子、整數大數減小數；分母正確							
230 分子、整數大數減小數；分母爲 0							
240 分子、整數大數減小數；兩分母相乘							
250 分子與分母交叉相乘，大數減小數；分母正確							
三、將帶分數化爲假分數的錯誤				*	*	*	*
310 新分子=整數+原分子							
320 新分子=整數*原分子							
330 新分子=整數*原分子+原分母							
四、分母不同時的錯誤(一)公分母有不同的錯誤法則，分子爲大數減小數			*			*	*
410 公分母爲最小公倍數							
420 公分母爲兩分母相乘							
430 公分母爲大數							
440 公分母爲兩分母相加							
450 公分母爲兩分母大數減小數							
460 公分母爲小數							
499 其他							
(1)原分母先與對角線分子約分，公分母爲第一個分數之分母							
(2)公分母爲兩分母之公因數							
(3)公分母爲大數減小數，分子爲原分子加原分母							
(4)公分母爲靠近等號之分母							
(5)公分母爲減數之分母							
五、分母不同時的錯誤(二)能正確求出公分母，但通分後分子錯誤			*			*	*
510 分子被交叉加上另一分母							
520 公分母爲最小公倍數，新分子爲原分子與原分母交叉相乘							
599 其他							
(1)通分後，整數與分子均乘上最小公倍數的因數							
(2)通分後，分子加上公分母對原分母的倍數							
(3)通分後，分子爲該公分母對原分母的倍數							
(4)分母先約分，再利用相對應的分子分母大數減小數							
(5)通分後，每一分子乘以本身分母							
(6)通分後，忽略原有分子							
六、向整數借1					*		*
610 借1，新分子加10							
620 借1，新整數未減1							
630 借1，忽略原分子							
699 其他							
(1)借1，新整數加1							
(2)借1，新分子加10、新整數未減1							
(3)借1，新分子加10、新整數加1							
(4)借1，新分子爲原整數乘原分母加原分子							
(5)借1，小數的分子乘以對角線分母，另一大數分子不變							
七、化假分數錯誤且通分錯誤 (只出現於方法A)						*	*
八、通分錯誤且借 1 錯誤 (只出現於方法B)*							
貳、一般的錯誤法則	*	*	*	*	*	*	*
002 未約分、約分錯誤、不該約分而約分							
003 未化成帶分數、化帶分數錯誤							
004 未約分又未化帶分數							
005 忽略整數							
006 計算錯誤（分子相減錯誤、分母相減錯誤、整數相減錯誤、筆誤)							
007 以其他的方法（加法、乘法、除法)							

肆、分數減法演算法則答案類型編碼系統與錯誤類型分析結果與討論

在正式的研究資料上，研究者利用「持續比較」法來進行原稿分析，以試驗性原稿分析的架構爲依據，進一步對於正式資料進行編碼：透過比較各個演算法則並作歸類，綜合所歸納出的各個類別並尋求類別的本質並作類別的調整，比較各演算法則的本質、尋求演算法則本質抽象的共同性，並探求這些共同性本質的適用解釋範圍以形成結論，最後形成「分數減法演算法則答案類型的編碼系統」，做爲歸類聽障學生與普通學生分數減法演算法則之依據。

爲說明分數減法錯誤法則的複雜性，並配合以SPSS-PC統計軟體進行法則出現次數計數的需求，每項法則均編有四碼：

(1)「答案正確」代碼爲「1111」。

(2)「省略未答」代碼爲「9999」。

(3)「無法判斷運用的法則類型」代碼爲「0000」。

(4)第一碼爲學生演算該題所使用的方法碼，以方法A演算其代碼爲「2」，方法B代碼爲「3」，當題目僅爲眞分數與眞分數相減而無方法A或方法B之分時，則代碼爲「0」。

(5)第二碼爲「特殊錯誤法則」的類別碼，包括「將整數化爲分數的錯誤」代碼爲「1」、「分母相同時求公分母的錯誤」代碼爲「2」、「將帶分數化爲假分數的問題」代碼爲「3」、「分母不同時的通分錯誤(一)」代碼爲「4」「分母不同時的通分錯誤(二)」代碼爲「5」、「分子向整數借 1 的錯誤」代碼爲「6」、「化假分數與通分均錯代碼爲「7」(此僅出現於運用 A 法演算)、「通分與向整數借 1 均錯」代碼爲「8」(此僅出現於運用B法演算)。

(6)第三碼爲所屬的特殊錯誤法則的次類別碼。

(7)第四碼爲「一般錯誤法則」的類別碼，包括「未約分、不該約分而約分、約分錯誤」代碼爲「2」、「未化成帶分數」代碼爲「3」、「未約分又未化成帶分數」代碼爲「4」、「忽略整數」代碼爲「5」、「分子相減錯誤、分母相減錯誤、整數相減錯誤、筆誤」代碼爲「6」、「以其他方法計算(如乘法、加法、除法)」代碼爲「7」。

本研究以上述原則對學生演算時所使用的錯誤法則進行編碼，以統計聽障組與普通組學生各法則出現的次數。

本研究所設計的「分數減法演算法則答案類型編碼系統」，可以處理更爲複雜的演算法則答案類型。如果有一個學生使用編碼「2434」的法則進行演算，那麼可以清楚地顯示，該學生「以方法A作答」(第一碼爲2)、「當分母不同需要通分時，以大數爲公分母」(第二、三碼爲43)、而且「最後的答案既未約分又未化帶分數」(第四碼爲4)。

本研究同時發現，在沒有計算錯誤的情況下，使用相同的法則作答時，會得到相同的答案。因此，以學生的答案初步推斷學生所使用的演算法則，對於分數減法歷程的診斷分析具有積極性的意義。所以，研究者一方面分析學生演算法則，同時整理出一些較常見的錯誤法

則演算之後所得到的答案以作爲參考。研究者並擷取兩組學生共同常見的演算法則，分析其可能出現的答案，整理爲「聽障組與普通組學生分數減法演算錯誤法則類型圖」（詳請參閱黃桂君，民84）。

接著，探討研究提議二「學生所在分數減法演算歷程中，所運用的法則如何影響答案的正確性？」研究顯示某些題目的演算，即使使用錯誤的演算法則，答案依然正確。最明顯的例子爲，當相減的兩分相同且減數的分子大於被減數，學生即使採用法則220演算，也會得到正確的答案，因此該情況以A法演算會發生20題，31題，1題，14題，25題，4題，17題，28題，7題，19題，15題；以B法演算會發生在20題，31題，1題，14題，25題、4題，其他當學生採用法則190時，則在第26題得到正確答案。傳統上，評量人員通常以題目答案的答對與答錯，來決定學生是否已具備該題目所要測量的能力，但是透過原稿分析卻發現，學生即使對分數減法擁有錯誤的概念，依然可以答對題目，因此，以答案對錯來判定學生的能力的評量方式值得再加探討。

伍、分數減法演算法則次數分析結果與討論

根據原稿分析的結果，本研究接著統計各錯誤成份與法則出現的次數，並對聽障組與普通組各錯誤成份與法則的分配進行卡方考驗，以瞭解兩者之間的次數分配是否具有顯著差異。以下將分別就 1)各類演算錯誤成份的次數分配；(2)出現次數較高的特殊錯誤演算法則次數分配；(3)出現次數較高的一般錯誤演算類型次數分配等進行分析。

一、各類演算錯誤成份的次數分析

由表四可知，聽障組與普通組學生在五類錯誤成份歸類的次數分配上均具有顯著差異($P<.001$)，聽障組學生在五項成份演算錯誤佔出現題型數在75％(歸類爲3)以上者人數最多，而普通組學生在五項成份演算錯誤佔出現題型數在25％(歸類爲0)以下者人數最多，此係聽障學生分數減法演算能力較差，使得其產生演算錯誤的次數較普通學生爲多。

表四　聽障組與普通組學生各類成份演算錯誤的次數歸類分配的差異比較

演算錯誤成份	各類演算錯誤成份次數歸類	聽障學生(N=581) 人數	百分比	普通學生 (N=746) 人數	百分比	X^2	P
(一)帶分數化假分數	0	280	48.2	636	85.2	232.511	.000
	1	95	16.4	54	7.2		
	2	67	11.5	37	4.9		
	3	139	23.9	19	2.5		
(二)整數化為假分數	0	141	24.3	549	73.5	364.463	.000
或帶分數1	71	12.2	81	10.8			
	2	132	22.7	58	7.7		
	3	237	40.8	58	7.7		
(三)通分	0	233	40.1	522	69.9	259.973	.000
	1	74	12.7	110	14.7		
	2	82	14.1	85	11.3		
	3	192	33.0	29	3.8		
(四)答案約分0	112	19.3	426	57.1	575.434	.000	
	1	50	8.6	98	13.1		
	2	39	6.7	72	9.6		
	3	380	65.4	150	20.1		
(五)向整數借1	0	189	32.5	589	78.9	292.45	.000
	1	109	18.8	62	8.3		
	2	82	14.1	43	5.7		
	3	201	34.6	52	6.9		

註：1.凡答錯、省略未答或無法判定作答法則，均視為該種成份演算錯誤。
2.成份演算錯誤佔出現題型數的25%以下歸類為0；佔25%至50%間歸類為1；佔50%至75%間歸類為2；佔75%以上歸類為3。

二、出現次數較高的特殊錯誤演算法則次數分析與討論

表五為「聽障組與普通組學生出現次數較高的特殊錯誤演算法則人數分配表」結果，在以下三類錯誤類型的各法則人數分配出現差異：

(一)「將整數化為帶分數或假分數的錯誤」演算類型 聽障組與普通組學生在「將整數化為帶分數或假分數的錯誤」的演算類型中各法則的人數分配達顯著差異(X^2=16.759，$P<.05$)，聽障組與普通組學生均以出現法則190「減數為整數，被減數為帶分數，兩者整數直接相減」的人數最多(聽障組159人，佔27.4%；普通組57人，佔7.6%)，這可能由於當學生不具備整數與分數抽象表徵間轉換的能力，在面對解答整數與分數減法的題目時，直接將整數與整數相減是解決演算僵局最簡便的方法。此外，持有此一法則的學生，當題目的減數為帶分數，被減數為整數時，也可能答對題目(例如：第26題)，似乎因此也會使得運用此一法則

的人數增多。其次，兩組所佔數較多的法則分別爲：

(1)聽障組爲法則130「整數直接和整數相加」(68人，佔11.7%)、法則120「將整數N化爲N/0」(22人，佔3.8%)、法則140「將整數N化爲另一分數的(分母/分母)」(12人，佔2.1%)、法則150「將整數N化爲(1/N)」(13人，佔2.2%)、法則170「整數直接與分子相加」(16人，佔2.8%)。(2)普通組爲法則120「將整數N化爲N/0」(10人，1.3佔%)、法則130「整數直接和整數相加」(13人，佔1.7%)、法則180「帶分數化假分數後分子與整數相減」(11人，佔1.5%)。

表五　聽障組與普通組學生在出現次數較高的特殊錯誤演算法則人數分配差異比較

特殊的錯誤演算類型	法則	聽障學生(N=581)		普通學生 (N=746)			
		人數	百分比	人數	百分比	X^2	P
(一)將整數	110	10	1.7	3	.4	16.759	.032
化爲帶分數	120	22	3.8	10	1.3		
或假分數的	130	68	11.7	13	1.7		
錯誤	140	12	2.1	9	1.2		
	150	13	2.2	6	.8		
	160	4	.7	4	.5		
	170	16	2.8	4	.5		
	180	11	1.9	11	1.5		
	190	159	27.4	57	7.6		
(二)分母相	210	25	4.3	29	3.9	40.868	.000
同時的公分220	146	25.1	21	2.8			
母錯誤230	10	1.7	2	.3			
	240	17	2.9	9	1.2		
	250	5	.8	1	.1		
(三)將帶分	310	34	5.8	21	2.8	5.494	.064
數化爲假分	320	21	3.6	12	1.6		
數的錯誤	330	2	.3	7	.9		
(四)分母不	410	61	10.5	52	7.0	19.460	.002
同時的公分	420	49	8.4	45	6.0		
母錯誤 I	430	53	9.1	52	7.0		
	440	28	4.8	6	.8		
	450	211	36.3	112	15.0		
	460	80	13.8	61	8.1		
(五)分母不	510	4	.7	6	.8	2.795	.094
同時的公分	520	32	5.1	15	2.0		
母錯誤 II							
(六)向整數	610	45	7.7	59	7.9	6.849	.077
借1的錯誤	620	38	6.5	57	7.6		
	630	63	10.8	50	6.7		

(二)「分母相同時的公分母錯誤」演算類型

聽障組與普通組學生在「分母相同時的公分母錯誤」演算類型中各法則的人數分配上達顯著差異(X^2=40.868，P <.001)，聽障組使用的法則集中於法則220「分子、整數大數減小數；分母正確」人數最多(146人，佔25.1%)，其次爲法則210「分子、整數大數減小數；分母爲1」(25人，佔4.3%)比例相當懸殊；普通組則以法則210人數最多(29人，佔3.9%)，法則220居次(21人，佔2.8%)。

聽障組與普通組學生有較人數集中在法則 210，可能使用該法則在「減數分子大於被減數分子」時，可得到正確的答案，故有較多的學生偏向使用此一法則。而另一法則 220 則顯示，有部份學生直接將兩數值相同的分母相減的結果當成公分母，且運用「N -N=1」的減法法則，他們不僅沒有正確的公分母概念，而且減法演算也有困難，這是教學上值得注意的現象。

(三)「分母不同時的公分母錯誤 I 」演算類型

聽障組與普通組學生在「分母不同時的公分母錯誤 I 」的演算類型中各法則的人數分配上達顯著差異(X^2=19.460，P <.001)，聽障組與普通組學生均以出現法則450「公分母爲兩分母大數減小數，分子爲大數減小數」人數最多(聽障組211人，佔36.3%；普通組112 人，佔15.0%)，其次爲法則460「公分母爲小數，分子爲大數減小數」(聽障組80人，佔13.8%；普通組61人，佔8.1%)，再則聽障組爲法則410「公分母爲最小公倍數，分子爲大數減小數」(61人，佔10.5%)，普通組爲法則410與法則430「公分母爲大數，分子爲大數減小數」(均爲52人，佔7.0%)。

兩組學生均以使用法則450的人數最多，此和Tatsuoka的系列研究結論相同，將分數相對應的部份大數減小數，是分數減法中最常見的錯誤。最主要的原因在於學生將分子分母都當成整數來處理，或將分數的減法類比爲整數的減所致。

然而，聽障組與普通組學生在「將帶分數化爲假分數的錯誤」、「分母不同時的公分母錯誤 Ⅱ 」與「向整數借1的錯誤」三類錯誤演算類型中，各法則人數分配並無顯著差異(P >.05)。

三、出現次數較高的一般錯誤演算類型次數分析

表六爲「聽障學生與普通學生出現次數較高的一般錯誤演算類型人數分配表」，聽障組與普通組學生在各一般錯誤演算類型人數分配達顯著差異(X^2=55.036，P<.001)，聽障組學生以「未約分、約分錯誤、不該約分而約分」的錯誤演算類型人數最多(364人，佔62.7%)，其次爲「化帶分數錯誤」(219人，佔37.3%)，以及「計算錯誤」(165人，佔28.4%)；普通組學生以「計算錯誤」的錯誤演算類型人數最多(99人，佔13.2%)，其次爲「未約分、約分錯誤、不該約分而約分」(82人，佔11.0%)，以及「化帶分數錯誤」(51人，佔6.8%)。

兩組學生出現較多的一般錯誤法則均為「未約分、約分錯誤、不該約分而約分」與「化帶分數錯誤」，由實作原稿上可知，其中，部份的學生其答案有些進行了約分或化帶分數的處理，有些則否，這可能是粗心忘記未對需要約分或化帶分數的答案進一步演算所致。至於部份學生則在答案上均未約分或化帶分數，是否這些學生可能如文獻研究顯示，對於約分或約分的數值無相等的觀念(例如：不認為2/4和1/2是相等的)(呂玉琴，民83；Titus，1992)，以致於未將答案再約分或化帶分數，則有待將來以訪談方式進一步研究。

綜合上述三類「出現次數較高的特殊錯誤演算法則次數分析」結果，可知雖然兩組學生在部分錯誤演算類型中，各法則出現的人數分配並不一致，然而兩組出現人數較多的法則依然有集中的趨勢，其常見的錯誤演算法則都是相同的。雖然，文獻中並無聽障學生與普通學生分數減法的比較研究，和惟一探討聽障學生分數構念的研究(Titus，1992)結果比較，似乎均顯示聽障學生分數的計算能力雖落後於普通兒童，但均運用相同的解題策略，且呈現一致的錯誤類型。

表六　聽障組與普通組學生出現次數較高的一般錯誤演算類型人數分配的差異比較

一般的錯誤演算類型	聽障學生(N=581)		普通學生(N=746)			
	人數	百分比	人數	百分比	X^2	P
答案出現類型						
1.約分錯誤	364	62.7	82	11.0	55.036	.000
2.化帶分數錯誤	219	37.7	51	6.8		
3.約分與化帶分數同時錯誤	131	22.5	25	3.4		
4.忽略整數	87	15.0	15	2.0		
5.計算錯誤	165	28.4	99	13.2		
6.以其他方法(加、乘、除計算)	63	10.8	7	.9		
其他						
1.未答	263	45.3	172	22.1		
2.無法判斷類型	410	70.6	111	14.9		

結論與建議

壹、研究結論

一、分數減法演算歷程之作業結構分析

本研究透過分數減法演算歷程之作業結構分析，建構「分數減法演算流程圖」、分析「分數減法演算試題題型」與「分數減法演算試題之成份」，建構「題目與解題成份基本細目表」，以作爲編題的依據。

二、分數減法演算歷程中出現的錯誤法則分析

本研究從兩組學生實作原稿中，分析「將整數化爲分數」、「分母相同時的錯誤」、「將帶分數化爲假分數的錯誤」、「分母不同時的錯誤(一)」、「分母不同時的錯誤(二)」、「向整數借1」，以及「化假分數錯誤且通分錯誤(只出現於方法A)」、「通分錯誤且借1錯誤(只出現於B法)」等錯誤成份中，再自其中細分出常見的特殊錯誤法則；同時分析出「未約分」、「約分錯誤」、「不該約分而約分」、「未化成帶分數」、「化帶分數錯誤」、「未約分又未化帶分數」、「忽略整數」、「計算錯誤（分子相減錯誤、分母相減錯誤、整數相減錯誤、筆誤）」、「以其他的方法（加法、乘法、除法）」等常見的一般錯誤法則。

三、演算法則編碼系統與錯誤答案類型

研究資料在研究者反覆的判讀、分析、歸納之後，建立「分數減法演算法則編碼系統分析」，以說明分數減法錯誤法則的複雜性。其中，每項法則均編有四碼，第一碼爲「學生演算該題所使用的方法碼」、第二碼爲「特殊錯誤法則的類別碼」、第三碼爲「所屬的特殊錯誤法則的類別碼」、第四碼爲「一般錯誤法則的類別碼」。同時，研究者並擷取其中常見的演算法則，分析其可能出現的答案，整理得「聽障組與普通組學生分數減法演算錯誤法則類型一覽表」。

四、演算法則次數分配分析

聽障組與普通組學生在五類錯誤成份歸類的次數分配上均具有顯著差異（$\rho <.001$）；在出現次數較高的特殊錯誤演算法則人數分配上，「將整數化爲帶分數或假分數的錯誤」、「分母相同時的公分母錯誤」、「分母不同時的公分母錯誤Ⅰ」三類錯誤類型的各法則人數分配達顯著差異，而在「將帶分數化爲假分數的錯誤」、「分母不同時的公分母錯誤Ⅱ」與「向整數借 1 的錯誤」三類演算類型中，各法則人數分配並無顯著差異。聽障組與普通組學生則在各一般錯誤演算類型人數分配達顯著差異。

歸納本研究所獲致的重要結論：就聽障組與普通組學生分數減法演算歷程中所出現的演算法則，可說明學生能力背後隱藏具有系統性的認知結構，透過演算法則的分析，應可協助理解學生能力的本質。而在演算能力之差異比較顯示，兩組學生所容易出現的錯誤演算法則

大致相同，聽障學生並未因聽覺學習管道的損失，而明顯出現異於普通兒童的認知結構。但是，在常見錯誤演算法則與一般錯誤演算類型人數分配上，兩組學生均達顯著差異，因此，兩組學生在分數減法演算上雖運用相同的策略，但是對於分數減法演算歷程中所涉及的各成份，聽障組學生可能較普通組學生感到更爲困難。

貳、研究建議

一、數學分數學習研究方面的建議

本研究透過聽障組與普通組學生所呈現的多樣化演算錯誤法則，顯示學生所擁有的知識是學習時與外界環境互動的結果。從文獻分析中可知，個人的知識是以相當規律而有意義的方式組織，基模是一組可修正的結構，形諸過去經驗到的事件、情境、與事件順序間關係的集合。本研究雖然從表面上反映出聽障學生與普通學生對於分數減法各自擁有不同的基模，但是對於這些基模背後所蘊含的意義，則尚需進一步加以研究。

基模的形成與個人生活經驗有關，當給予相同的題目時，由於各人所擁有的基模不同，則題目所形成的初始條件和解題過程自然有所差異。基模理論雖可概略地說明聽障學生缺乏正常的聽覺學習管道，可能會影響正確的分數減法演算基模的形成，但是，在本研究中並無法進一步地解釋聽力損失是如何影響學生分數基模的形成而造成外顯演算法則的差異，亦即無法說明學生分數概念與分數減法演算能力間的關係。由於，學生分數減法的演算能力主要奠基於對分數概念的理解與統合應用，所以此項關係的釐清對於數學教學深具重要性。在後續研究中，可再以晤談法或其他實驗心理學研究方法加以探討，以更充分瞭解聽覺學習管道的缺損是如何影響學生分數的學習，更深入解釋不同知識基模對於個人能力表現的影響，以提供日後建立聽覺障礙教學法的依據。

二、數學教學研究方面的建議

數學分數概念的學習涉及真實世界（具體物）、數學語言與符號三種表徵間的轉換歷程；兩個有理數在比較大小時，是屬於乘法關係中數值變異的問題，學生必需能夠比較a/b至c/d間是否存在著一種透過a至c、b至d來加以定義的轉換，而判定出a和b的乘法關係所產生變異。因此，數學課程需要提供經驗以協助兒童建構分數和比例均等性的直觀知識。透過實作原稿分析可以直接地得知學生能力的「認知狀態」，提供教師教學時對學生個別起始學習狀況的瞭解。因此，如何根據不同的能力「認知狀態」所應相對採用的數學教學方法，以配合診斷分析結果提出適配的教學模型，，如何將學生潛在「認知狀態」評量的結果，真正落實在數學教學的過程中，而聽障教師在數學教學的過程中如何以實物配合語言精煉學生的數學抽象概念學習，啓迪聽障學生數學學習，俱是後續研究中的重點，同樣也是未來教學模型的研究中，亟待強調的課題。

三、數學能力診斷研究方面的建議

在建構的教與學之理念下，學生是主動的學習者，能自行選擇刺激、組織知識。教學者除了尊重學生原有的概念外，尙需尊重學生的思考歷程，去了解學生的思考，而這種教學的理念，實已隱含著從建構的觀點去瞭解學生解題歷程的重要。基於這樣的理念，未來可以實作原稿分析的結果爲基礎，藉著分析學生數學演算歷程，更有系統地探討數學學習程序性知識迷失概念的起源，並結合項目反應理論（item response theory)與「試題無關」(item ree)、「受試無關」(subject free)的題目參數與能力參數估計的特性，以突破傳統診斷工具的設計，將能力的測量提昇至微觀的層次，對於學生在測驗的表現進行更細緻的觀察，以達成透過學生在試題上的反應，來推論學生潛在認知歷程的目的，建立程序性知識的學習理論，設計診斷與補救學習錯誤的模型，這些對於學生數學能力的診斷與教學都具有重大的啓示與意義。

參考書目

一、中文部份

呂玉琴（民83）：國小教師分數教學之相關知識研究。臺灣師範大學科學教育研究所博士論文（未出版）。

林碧珍（民79）：從圖形表徵與符號表徵之間的轉換探討國小學生的分數概念，省立新竹師範學院學報，4期，295-347頁。

林寶貴、李如鵬（民79）：聽覺障礙學生數學能力測驗之編製及其相關因素之研究，國立彰化師範大學特殊教育學系。

林寶貴、錡寶香（民80）：高職階段聽覺障礙學生國語文與數學能力之研究，特殊教育學刊，7期，109-128頁。

洪志成（民79）：建構主義初探：兼論其在教育上的啓示。台灣省第一屆教育學術論文發表論文集，1-14頁。

郭重吉（民81）：從建構主義的觀點探討中小學數理教學的改進，科學發展月刊，第20卷，第5期，548-570頁。

黃桂君（民80）：皮亞傑認知發展學說與聽覺障礙兒童認知能力之探討。特殊教育季刊，38期，25-31頁。

黃桂君（民84）：聽覺障礙學生分數減法演算歷程之診斷分析，臺灣師範大學特殊教育研究所博士論文（未出版）。

楊瑞智（民83）：國小五、六年級不同能力學童數學解題的思考歷程，臺灣師範大學科學教育研究所博士論文（未出版）。

鄭昭明（民82）：認知心理學，402-405頁。台北：桂冠。

謝毅興（民80）：國小兒童解數學應用問題的策略。臺灣大學心理研究所碩士論文（未出版）。

二、英文部份

Anderson, R. C.(1984). Some reflection on the acquisition of knowledge. *Educational esearcher*, 13(9), 5-10.

Austin, G. F.(1975). Knowledge of selected concepts obtained by an adolescent deaf population. *American Annals of the Deaf*, 120, 360-370.

Behr, M. J., Wachsmuth, I., & Post, T. R.(1985). Tasks to assess children's perception of the size of a fraction. In A. Bell, B. Low, and J.K. Kilpatrick (Eds.), *Theory, Research, and Practice in Mathematical Education: Working Group Reports and Collected Papers*, Fifth International Congress on Mathematical Education, (pp. 179-185). University of Nottingham, United Kingdom: Shell Centre for Mathematical Education.

Bone, A. A., Carr, J. A., Daniele, V. A., Fisher, R.,Fones, N. B., Innes, J.I., Maher, H.P., Osborn, H.G., & Rockwell, D.L. (1984). *Promoting a clesr path to technical education.* Washington, D. C.: Model Secondary School for the Deaf.

Brown, J. S.,& Burton, R. R.(1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive Science*, *2*, 155-192.

Brown, J. S.,& VanLehn, K.(1982). Towards a generative theory of "bugs". In Carpenter, J. M.,Moser, & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Carpenter, T. P.,& Moser,J. M.(1986). The development of addition and subtraction problem-solving skills. In T. P. Carpenter, J.M. Moser, & T.A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective.* New York: Aca demic Press.

Clements, M. A.,& Lean, G. A.(1987). *Discrete fraction concepts and cognitive structure, P.M.E.X Ⅱ*. pp.215-232.

Greengerg, M. T., & Kusche, C. A.(1989). Cognitive, personal, and social development of deaf children and adolescents. In M. Wang, M. Reynolds, & H. Walberg(Eds.), *The handbook of special education: Vol, 3 Research and practice* (pp. 125-129). Oxford, England: Pergamon.

Greeno, J. G.(1987). Instructional representation based on research about understanding. In A. H. Schoenfeld(Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (pp61-88). Hillsdale, NJ:

Lawrence Erlbaum Associates.

Harel, G., & Behr, M.(1988). Structure and hierarchy of missing value proportion problems and their representations. *The Journal of Mathematical Bebavior*, 8, 77-119.

Jeck, P.(1981). Conceptual issues in the teaching and learning of fractions, *Journal research of mathematics education*, *12*, 339-348.

Kieren, T.(1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 53-92). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Mack, N. K.(1988). Learning fraction with understanding: Building upon informal knowledge. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association (New Orleans, LA, April 5-9, 1988).(*ERIC Document Reproduction Service No. ED 292682*).

Mats, M.(1982). Towards a process model for high school algebra errors. In D.Sleeman, & J.S.Brown (Eds), *Intelligent tutoring systems*.(pp.25-50). New York: Academic Press.

Maurer, S. B.(1987). New knowledge about errors and new views about learners: what they mean to educators and more educators would like to know. In A. H. Schoenfeld(ed), *Cognitive Science and Mathematics Education*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Paul, P. V.,& Quigley, S. P.(1990). *Education and deafness*. New York: Longman.

Pirie, S. E. B.(1988). Understanding: Instrumental, relational, intuitive, constructed, formalized...? How can we know? *For the Learning of Mathematics*. *8*(3), 2-6.

Post, T. R.,Wachsmuth, I.,Lesh, R.,& Behr, M.J.(1985). Order and equivalence of rational numbers: A cognitive analysis. *Journal for Research in Mathematical Education*, *16*(1), 18-36.

Resnick, L. B.(1986). The development of mathematical intuition. In M. Perlmutter (Ed.), *Perspectives on intellectual development: The Minnesota Symposia on Child Psychology* (Vol.19, pp. 159-194). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Resnick, L. B.(1987). Constructing knowledge in school. In L. S. Liben(Ed.), *Development Theory: Conflict or congruence*? Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Rumelhart, D. E., & Ortony, A.(1977). The representation of knowledge in memory. In R. C. Anderson, R. J. Spiro, & W. E. Montague(Eds.), *Schooling and the acquistion of knowledge*. Hillsdale, NJ:Drlbaum.

Rumelhart, D. E.(1981). Understanding understanding. (*ERIC Document Reproduction Service No. ED 198497*).

Tatsuoka, K. K.(1984). Caution indices based on item response theory. *Psychometrika, 49*, 95-110.

Titus, J. C. (1992). *The concept of fractional Number among hearing-impaired student.* Paper presented at the Annunal Conference of the American Educcational Research Association. (San Francisco, CA, April 20-24, 1992).

Zwiebel, A.,& Mertens, D.(1985). A comparison of intellectual structure in deaf and hearing children. *American Annals of the Deaf, 130*(1), 27-31.

Analysis of Computation Rules in Fraction Substraction Problems in Hearing-Impaired Students

Huang Kuei-Chun

Department of Special Education

Abstract

The purpose of this study was to compare the cognitive states of fraction substraction from the hearing-impaired (HI) students and those from the non-handicapped (NH) students by "Fraction Substraction Diagnostic Test (FSDT)" . Total of 1327 subjects, 581 HI students and 746 NH students, were included in this study. The data was analyzed by protocal analysis. The resultsindicated that I students, compared with NH students, were found to use similar strategies andmake similar errors in computation but performed significantly different from NH students on frequencies of computation rules in the fraction substraction items. Further discussion was made on basis of the previous findings, and some suggestions on teaching and future research were offered.