英家銘、陳映竹（2025）。
古代數學論爭能告訴我們什麼？日本江戶時代關流與最上流著作中體現的數學素養價值。
臺灣數學教育期刊。待刊論文。
https://doi.org/10.6278/tjme.202502/PP.001

古代數學論爭能告訴我們什麼？日本江戶時代關流與最上流著作中體現的數學素養價值

英家銘[1]　陳映竹[2]
[1]國立清華大學通識中心 / 歷史研究所
[2]新竹市東區關埔國民小學

本文嘗試從日本江戶時代關流與最上流之間發生的數學論爭中，找出其爭議焦點所體現的數學素養價值。本文所採用的素養觀點，主要來自左台益與李健恆總結之數學素養意涵。從他們的論述可推論出，數學素養不只是在真實世界使用數學的能力，傳統上在數學世界解決問題與價值判斷的能力也包含在內。從這樣的觀點出發，本研究的發現如下：首先，最上流追求精簡，直指題目的數學概念，而關流的問題有時使用生活實例，數值較繁瑣。從數學素養的角度來看，我們希望使用實例作為教學，但實例可能有複雜的數值，計算上造成學生較多負擔。如何設計問題數值不致影響學習過程，是現代教育工作者需要權衡之處。其次，小數值固然可能好計算，但情境如果來自真實世界，那麼誤差的問題就需要考慮，這裡體現的數學素養價值，就是數值的設計要考慮計算與取概數的過程，即處理與數字相關議題之素養。最後，數學素養包含在各種數學實踐中所需要的能力，也延伸至對數學方法的評估與判斷。在代數思考中，算則或證明在過程中需要設定幾個未知數或變數，需要看學習者的脈絡而定。使用變數較多的過程，得到的算式可能較為簡潔，而使用較少的變數，過程的算式可能會較為複雜。在教學上，我們需要理解學習者的脈絡來選擇問題內容，以及論證過程中變數或未知數使用的個數。簡而言之，從江戶時代數學論爭中，我們可以看到數學教育工作者需要：（1）在使用真實問題教學時考慮問題複雜度與教學目標之間的平衡；（2）使用真實數值的過程中帶領學習者考慮取概數對最終解答的影響；（3）進行代數推論時考慮學習者的脈絡平衡變數數量與算式複雜度。以上是本文的發現與對教學的建議。

關鍵字：和算、最上流、關流、數學論爭、數學素養

通訊作者：英家銘，e-mail：jiaming.ying@mx.nthu.edu.tw
收稿：2024 年 7 月 27 日；
接受刊登：2024 年 12 月 17 日。

Ying, J. M., & Chen, Y. C. (2025).
What can pre-modern debates in mathematics tell us? The values of mathematical literacies reflected in the works of the Seki school and the Saijo school in Japan's Edo period.
Taiwan Journal of Mathematics Education. Advance online publication.
https://doi.org/10.6278/tjme.202502/PP.001

What Can Pre-Modern Debates in Mathematics Tell Us? The Values of Mathematical Literacies Reflected in the Works of the Seki School and the Saijo School in Japan's Edo Period

Jia-Ming Ying [1] Yi-Chu Chen [2]
[1] Center for General Education / Institute of History, National Tsing Hua University
[2] Guan-Pu Elementary School, Hsinchu City

This paper explores the values of mathematical literacies reflected during the mathematical debates between the Seki School and the Saijo School in Japan's Edo period. The framework of mathematical literacies adopted by this paper mainly comes from the viewpoints of Tai-Yih Tso and Kin Hang Lei. From their perspective, we can infer that mathematical literacies are not only the abilities to use mathematics in real life but also those of problem-solving and value judgements in the world of mathematics. From this viewpoint, the following are the findings. First, the Saijo School pursued conciseness, pointing directly towards the major mathematical concepts in questions, while the Seki School sometimes used real-life examples for teaching, but those examples might have complicated numerical values, resulting in more burdens for learners. How to design the numerical values to balance between reality and learning processes is an important question for educators to consider. Second, small numerical values might be easier to manipulate, but if the problem comes from the real world, then we also need to think about the issue of errors. The value of mathematical literacies reflected here is that the design of numerical values in problems needs to take into consideration the process of calculation and its errors, which is related to the literacy of handling issues of numbers. Last but not least, mathematical literacies include the abilities necessary in all mathematical practices, and by extension, they include the assessments and judgements of mathematical methods. During the process of algebraic thinking, how many unknowns or variables are needed in the process of an algorithm or a proof depends upon the context of the learner. The process with more variables might result in simpler equations / expressions, while using fewer variables may lead to more complicated equations/expressions. We need to adjust the problem and the number of variables according to the learner's context. In short, from the mathematical debates presented in this paper we can see that mathematics educators need to (1) balance between complexities and teaching goals when using real-world problems in teaching, (2) guide the learner to consider the influence of approximations on final solutions, and (3) consider the learner's context and balance between the number of variables and the complexities of algebraic expressions. These are our findings and suggestions for teaching.

Keyword: Wasan, Saijo school, Seki school, mathematical debates, mathematical literacy

Corresponding author：Jia-Ming Ying，e-mail：jiaming.ying@mx.nthu.edu.tw
Received：27 July 2024;
Accepted：17 December 2024.

壹、緒論

數學史的研究本質上是一種跨領域研究，在國際上不同的研究群體中，可能被視為哲學、數學或歷史的研究分支。從 1980 年代開始，作為數學研究分支的數學史研究者開始與教育研究者——特別是數學教育領域的研究者——有許多的合作，因為數學史與數學教育的研究者們都感覺到數學史對數學教學與學習的價值，而且透過研究逐步開發數學史融入數學教學的教材。在數學史融入數學教學與學習的研究（簡稱 HPM[1]），在過去四十年已經累積相當的研究產出，HPM 在學生的認知、技能、情意，以及其在師資培育的應用上，都有看到正向的成果（例如 Barbin et al., 2020; Fauvel & van Maanen, 2000; Katz & Tzanakis, 2011），國際與臺灣國內實務上也累積一些可以直接在課堂上使用的教案（例如蘇惠玉，2018；Katz, 2000）。在 HPM 相關研究成果中，有部分和「數學文化」（mathematical culture）有緊密的關係，例如 Fasanelli 等人（2000）分析了十六個國家的歷史融入數學教學策略，發現美國、巴西、丹麥、法國、紐西蘭、挪威等國家，主要是經由認識各民族各具特色之數學發展，珍視數學的文化性，達成有意義的學習。Wilson 與 Chauvot（2000）則建議可從以下三面向將歷史整合到數學課程中：做數學的人、做數學的方式、做數學的本質。歷史幫助我們不僅把數學視為方程式、函數、幾何和邏輯等數學主題的組合，而且還是數千年間不同文化的人類用各種方式努力的過程與結果。經由考慮數學的人、方式和內容，可以培養學生對課程中數學的洞察力，幫助學生理解不斷發展的數學之本質。

從歷史的角度來看，數學的確是人類文明發展過程中所產生的一種智識文化，但國內外研究中，很少對於「數學文化」有明確的定義。經過長期的研究，劉柏宏（2016，頁 61；2021，頁 4）對數學文化給出了以下的概念性定義：

> 數學文化就是人類探索數學知識時其行為的外顯和內隱模式，並藉由人類群體，特別是數學家社群，所創造獨特成就的符碼（符號、圖形或文字）來傳遞。

數學文化是一個長久存在於人類社會與我們日常生活的文化成分，對教學有其價值。事實上，108 數學課綱（教育部，2018，頁 1）也提到，「數學是一種人文素養，宜培養學生的文化美感」。數學文化的內容能幫助學生理解數學發展在不同時期與不同文化的差異，也可能協助教師釐清數學學習的主軸。

> 所以適時地在數學教學之中融入適當的數學史內容，可以提升數學教學品質與學生的學習成效。認識數學的文化面向，不僅有助於讓數學學習從工具性層次延伸到智識性層次，也更彰顯數學知識的人文價值。（教育部，2018，頁 1）

[1] 作為一個研究領域，HPM 是 Relations between History and Pedagogy of Mathematics 的縮寫，這個研究領域原本是國際數學教學促進會（International Commission of Mathematics Instruction [ICMI]）其中一個附屬研究群 IGHPM（International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics）的研究方向，也可用於指涉數學史融入數學教學的相關活動。詳見洪萬生（1998）或 Clark（2019）。

根據前段的定義，人類探索數學知識時會有很多內隱與外顯行為，透過數學家族群所創造的各類符碼傳遞給眾人，形成數學文化。人類探索數學知識時會有各種行為，劉柏宏（2016）將數學文化分為「文化中的數學」與「數學中的文化」。「文化中的數學」被細分為「歷史」、「社會」和「民族」三個面向，而「數學中的文化」則包含「歸納猜想」、「邏輯演繹」和「社群辯證」等行為。從數學史的角度來說，在歷史文本中，我們看到古代數學家不斷地因為遇到真實世界的問題而發展出數學方法解決（例如為了建築工程的需求而發展出各種體積公式），但也看到數學家為了討論數學方法而用真實世界的情境包裝（例如《九章算術．卷八方程》的編者為了展示「高斯消去法」而用三種不同等級稻米的混合問題來包裝）（Dauben et al., 2013）。更有甚者，我們也會看到不同學派的數學家在解決真實世界問題之後，繼續用同樣的問題情境來討論數學方法的良窳。這種不同學派的數學論爭，會從真實情境或純數學情境出發，討論並互相批評數學方法的好壞，就是一種「社群辯證」。在某種意義上，數學論爭可以讓我們深刻地理解數學方法的本質，並且將之應用於真實世界。數學論爭並非僅僅是優先權之爭（例如牛頓與萊布尼茲誰先發明了微積分？），或者討論證明的貢獻度與正確性（例如谷山豐和志村五郎對證明費瑪最後定理的貢獻是否比 Andrew Wiles 大？）。對於現代中、小學數學教學與學習更有意義的論爭，或許是關於初等數學方法的討論，比如面對類似的問題與情境，哪個處理方法比較「迂迴」？那個解法比較「簡捷」或「易懂」？這些問題的答案可能因人而異，但從數學家關於這些方法的論爭，或許可以幫助我們對數學教育進行反思。

舉例來說，Pollet 與 Ying（2017）的研究討論東亞代數「天元術」與「借根方」之間的競爭。從十八世紀後期《四庫全書》編者與乾嘉學派李銳的論述，到十九世紀中葉朝鮮算家南秉吉的著作，我們除了看到在不同政治社會脈絡中文化對數學的影響，我們也看到「polynomial」與「polynomial equation」這兩個概念容易混淆之處。從純數學的角度來說，兩個多項式必須要每一項的係數都相等才是恆等，但在一個方程式等號兩邊都應用等量公理運算後得到的方程式與原方程式仍為等價。而作為國中數學重要主題，上述研究的結果讓我們知道，在國中生代數學習的過程中，教師需要適當地強調「多項式」vs.「方程式」，以及「多項式的恆等」vs.「方程式的等價」這兩組概念各自的差異。

上面的研究材料來自「中算」（中國古代傳統數學）與「東算」（近代朝鮮傳統數學）脈絡內算學家們的論爭。而關於這類數學論爭，在筆者近年研究的「和算」——日本江戶時代（公元 1603–1868 年）的特色傳統數學——領域中，也存在十分有趣的討論。數學教育學者 Bishop（2001）認為，數學教育研究中的「價值」（values）是「行動中的信念」（beliefs in action），價值比「態度」（attitudes）更深層且更個人化。前面敘述中的論爭，特別是來自競爭對手之間的論爭，兩造會在論述中很努力地說服讀者某件事的合理性，而這通常比較少是關於計算或邏輯的正確性，而是某些關於概念的觀點或者學習與教學的方法，這個時候我們就可以看到作者背後深層的「價值」。在現在的臺灣，基於「數學素養」的教與學是我們數學教育工作者的主流價值之一，而古代數學論爭也可能顯現出某些跟素養相關的價值。所以本研究想要問的問題是：

一、在擁有流派競爭傳統的日本和算出現的論爭案例中，曾有哪些與現代數學素養相關的討論？

二、這些討論對於現代的數學教育工作者可以有什麼啟發？

在這樣的問題意識之下，本研究先採取內容分析法進行，選取和算論爭中的重要文本，主要為《精要算法》、《改精算法》、《神壁算法》、《神壁算法真術》的內容，針對其中爭論的焦點進行文本分析，以當代數學方法解讀古代文本內容之後，再輔以數學素養的觀點說明論爭中兩造觀點的差異，並找出其體現的「數學素養價值」。在下一節，本文會對「數學素養」進行相關討論，之後將簡要介紹日本和算的發展與流派競爭，最後以數學素養的觀點討論論爭中展現的價值。

貳、數學素養意涵及其展現之價值

「數學素養」（Mathematical Literacy）為近年來國際數學教育界十分重視的研究與實務教學導向，而臺灣在 108 學年上路的十二年國教新制數學課綱也呼應這樣「素養導向」的想法。任何教育改革必然會引發社會多方的討論與反省，108 課綱的「素養導向」教學以及數學科核心的「數學素養」當然也會讓數學教育研究者、現場教師、家長與學生有各種不同的解讀。國際學生能力評量計畫（Programme for International Student Assessment [PISA]）2021 年數學架構所提出的數學素養定義如下（內容為本文作者翻譯）：

> 數學素養是個人在各種真實世界脈絡下運用數學推理，並且形成、使用與詮釋數學來解決問題的能力。它包含用來描述、解釋與預測現象的概念、程序、事實與工具。數學素養可以幫助個人瞭解數學在世界所扮演的角色，並且做出有良好根據的判斷與決定，而這些判斷與決定都是 21 世紀有建設性、積極參與社會，且有反思能力的公民所需要的。（Organization for Economic Cooperation and Development [OECD], 2018, p. 7）

從 PISA 對數學素養的定義來看，使用數學思考在真實世界的脈絡中解決問題的確是數學素養的重要內涵。但在問題解決的過程中，個體必須能夠「形成、使用與詮釋數學」，而且數學素養可以幫助個體「做出有良好根據的判斷與決定」。所以，數學素養不僅僅是在真實世界的脈絡之下使用數學而已，它還包含對數學的詮釋與判斷，而這些能力是需要在真實世界與數學世界交互思考的過程中，或者是在純數學的脈絡下培養。數學世界與真實世界的互動，其實從歷史的角度來看是不斷地發生，前一節提到的古代建築所發展出的體積公式就是一例。而本文後面想要探討的數學論爭，則同時會包含數學世界與真實世界的互動，以及純數學的脈絡下展現的數學素養。

左台益與李健恆（2018）參考國內外學者與 PISA 對於素養的討論，總結出數學素養的三大意涵：（1）數學素養強調在生活中的建模過程；（2）數學素養強調處理與數字相關的

議題；（3）數學素養強調在各種數學實踐中所需要的能力。這三類意涵中，第一類較為接近一般人直覺上數學素養在真實世界的應用，第二類跟使用科技還有統計思維有關，而第三類就強調在數學內和數學外的脈絡中皆能理解、判斷、執行和使用數學的能力，也就是說，數學素養不只是在真實世界使用數學，傳統上在數學世界解決問題與價值判斷的能力也包含在內。此外，左台益與李健恆（2018）進一步提出「知」識（knowledge）、應「用」（application）、「觀」點（disposition）與「學」習（learning）是數學素養的構成要素。「知」與「用」對應到在數學內外的理解與應用數學工具進行問題解決的能力，而「觀」與「學」則更接近對數學方法的評估、判斷，以及學習者與自身和他人的相互溝通與理解。本研究希望透過綜合上述 PISA 與左台益、李健恆所發展出的數學素養內涵，來考慮日本江戶時代和算論爭中部分著作所體現的數學素養價值，從而反思現代數學教學與學習。在下一節中，我們會先介紹日本江戶時代的和算傳統，然後在其後給出案例分析。

參、東亞歷史脈絡中的日本江戶時代和算傳統

一般來說，廣義的「和算」是指在日本現代化之前所有傳統數學的內容與文化脈絡。東北亞的韓半島與日本列島，在公元三至六世紀逐漸從小型的部落社會整合成數個能夠控制廣大地域並集中調度資源的古代王國（Barnes, 2007）。在這段時間，位於日本列島的大和王權，經過自身的發展與來自韓半島百濟國的移民，認識並學習到東亞大陸的科技與文明（英家銘，2022；網野善彥，1997）。七世紀後半大和王權積極與韓半島新羅國以及大陸上的唐帝國交往。時間進入八世紀，日本於 701 年施行律令制度，在朝廷設置天文博士、曆博士等官職，及天文生、曆生各十人，算生三十人，是古代日本官方算學教育開始興盛的時期（英家銘，2022；網野善彥，1997；Keller & Volkov, 2014）。古代東亞的科舉考試與國家教育制度，並不如許多人刻板印象中，只能學習儒家經典再應試。像「算」這樣的學科因為有實用的需求，所以也列在唐帝國國子監的學科之中。國子監算學的學生完成學業之後，亦可參加算學科考試，通過後任官。同時代韓半島的新羅國，也在國學中設立算學科。唐、新羅與日本算學生學習的教材，大多是兩漢與魏晉南北朝的算學經典，包含東亞算學最重要的《九章算術》，算學生通過科舉考試後，就會敘位任官（英家銘，2022；城地茂，2014）。八世紀時日本頻繁派出遣唐使向唐帝國輸入文化，但九世紀的 838 年之後就再也沒有派出遣唐使，僅持續靠著新羅與佛教僧侶的交流瞭解東亞大陸的文化與情報。十世紀初，維持三個世紀榮華的唐帝國崩潰。從十世紀至十六世紀，是日本的平安時代後期到武家政權前半的鎌倉時代與室町時代。之前八世紀奈良時代建立的中央集權律令制度逐漸崩壞，原本以「課試」（科舉考試）選才的技術官僚，也逐漸變成由特定的氏族傳承朝廷的特定職位，也就是形成了與職業連結，有特定「家格」的「家」，這使得包含數學在內的技術性知識都知識變成秘傳家學（英家銘、黃俊瑋，2021；古瀨奈津子，2011；五味文彥，2016）。

廣義的「和算」包含前述的數學活動，而狹義的「和算」指的是日本江戶時代（1603–1867）發展出具有日本本土特色的數學文化。天文曆算自六世紀開始由百濟輸入日本列島，經過八世紀律令國家的科舉考試制度，到中世的算學家族傳承，十六世紀末進入戰國結束後的安土桃山時代，終於開始露出曙光。1590 年豐臣秀吉終結戰國時代，統一天下之後的秀吉號為「太閤」，執行了數次被稱為「太閤檢地」的土地測量與度量衡政策制訂，這些工作都要用到算學，當時的太閤檢地的計算仍然用到「算木」，也就是「算籌」。一統天下之後的秀吉為了疏導戰國時代所剩餘的軍事力量，把野心放在征服大陸上的明帝國。1592 年，秀吉取道朝鮮，出兵東亞大陸，沒想到日軍受到朝鮮頑強的抵抗，加上明帝國的援軍，戰況陷入膠著。1598 年，秀吉病歿。他不但侵略東亞大陸未成，還失去天下。後來德川家康在 1603 年就任征夷大將軍，成為日本最高權力者。日本侵略朝鮮時，從朝鮮劫持的人員當中，有製造陶器的技術工匠，使日本的陶瓷技術發達（例如九洲的有田燒）。從朝鮮帶到日本的活字，改良了日本的印刷技術（朱立熙，2019）。而這次秀吉侵略朝鮮，也促進了日本算學的發展，從朝鮮帶走的算書，主要是元帝國算家朱世傑（1299/1993）的《算學啟蒙》，成為江戶時代算學發展的基礎之一。算盤在安土桃山時代前後也傳入日本。從安土桃山時代起，到德川家取天下進入江戶時代，日本重新受到東亞大陸數學文化的刺激，加上承平時期需要的測量、工程、稅收與天文曆算等事業，讓算學再度發展。在幕府任職的中階武士中，出現了一些算學能人，例如關孝和（公元 1642?–1708 年）。從關孝和開始，日本算家在相對封閉的環境中，創造出許多很獨特的數學文化，而且有競爭型大眾文化的特色，這是我們所說狹義的「和算」文化內涵（英家銘，2022；城地茂，2014）。綜合以上，關於日本和算的脈絡與不同時代特色，讀者可參考下表 1，也包含後文會介紹的江戶時代和算特色。

表 1
日本和算時代簡易分期與特色

大致時間	3–7 世紀	8 世紀	9–16 世紀	17–19 世紀
時代	古墳至飛鳥時代	奈良時代	平安、鎌倉至室町時代	江戶時代
算學特色	向東亞大陸學習	官方教育與考試取才	特定氏族繼承特定知識	流派競爭型的大眾文化

十七至十九世紀日本江戶時代發展出的「和算」，有其優秀且獨特的數學內涵，例如關孝和在討論代數方程式的過程中，發展出人類最早的行列式運算（Katz, 2008, pp. 668–669）。和算家獨力發展出異於歐洲與中國代數方法的「傍書法」與「點竄術」等表示法，從數學概念發展的角度來說，也有其教育意涵（黃俊瑋，2015）。而從數學文化的角度來說，和算有三大獨特的特徵：遺題承繼、算額奉納與流派競爭（城地茂，2014）。所謂「遺題承繼」，就是和算家在著作的卷末，提出一些跟書中內容有關但不附解答的難題，而讀者經過努力

研究，解決難題之後，自己寫下解答之書，並在卷末提出難度更高的問題，讓有心人士去研究解決，如此不斷繼承，著作中的數學難度就不斷提升。關於「遺題承繼」的討論與其在數學教育上的應用價值，可以參考蘇意雯與宮川健（2024）。另外，由於「遺題承繼」這種精益求精的傳統，使得江戶時代出現將許多整理歐式幾何定理或代數恆等式的書籍，例如 1841 年出版的《算法助術》。這類著作是要幫助數學教師與學生迅速地利用不容易記住的幾何或代數結果，來擬出或解決更困難的數學問題（長谷川弘、山本賀前，1841）。

和算的第二個特徵是「算額奉納」的文化，簡單來說，就是江戶時代的算學家或者對算學有興趣的人，把自己的數學發現或者有趣的數學問題，製作成匾額，奉納至神社或佛寺。這樣的文化活動，一方面有感謝神佛恩賜的功能，另一方面也可以讓神佛見證算家的數學發現或者學習者的數學能力，有智慧財產權的功能。算家的數學發現被做成算額奉納之後，同時也可以宣揚自己的算學塾，就像是現代補習班的宣傳。算額對於現代的學生來說，同時有認識傳統文化與數學學習與解題挑戰的功能，所以很多數學教育學者也會討論它的教育價值，例如蘇意雯（2007）、Fukagawa 與 Rothman（2008）。

和算的第三個文化特徵是「流派競爭」。由於前述平安時代開始，各種技藝都變成秘傳家學，使得日本文化中的技藝一向有「藝道化」的傾向，例如茶道、花道、劍道等等，而算學也被稱為「算道」，且算學塾可被稱為「算學道場」（黃俊瑋，2016b）。不同的和算教師，透過「家元」、「免許」制度建立的流派，也就是在流派之內有類似掌門人地位的教師，而學習者在學習到不同階段的時候會得到不同的證書，這些作法，使得算學的教學與學習，在強調流派競爭與強調正統的過程中被加入規範性與精神性的元素，算學從一門純粹的技術變成「藝道」（烏雲其其格，2009；欒竹民，2003）。十八世紀後半起，日本的經濟大幅發展，「寺子屋」這種設置於寺院的私人教育機構出現，庶民階級獲得更多受教育的機會，包含女性在內的識字率大幅提升（Tamaki, 2014）。工程、測量、商業與娛樂的興盛使得武士與平民之中讀、寫、算的需求增加。「算道」受到古代「家學」傳統的影響轉換為「流派」之後，不同的流派之間，為了爭取廣大的數學學習市場，加上對算學這門技藝的不同看法，所以會在欣賞算額或者出版著作時互相批評，甚至發生論戰。這些批評與爭取學生的行為，就是和算中的流派競爭（英家銘、黃俊瑋，2021）。從前面敘述的和算脈絡來看，因為江戶時代的和算包含許多競爭的元素，例如在奉納算額與出版書籍的過程中批評對手或提高難度，所以這些競爭過程中會出現許多關於數學的爭論，而在爭論之中我們就可以找到案例來討論他們的數學價值，並以數學素養的觀點進行反思。

肆、案例分析：從數學素養觀點看關流與最上流的算學論爭

在這一節中，我們將舉出數個算學流派論爭中的例子，來看這個過程中體現的數學素養價值。承前一節之敘述，江戶時代和算會出現流派競爭。曾有學者統計，江戶時代逾兩個半世紀的時間裡，出現了至少 21 個和算流派（小川東，2021）。這些流派互相之間有的

有繼承關係，有的會互相激烈競爭，而其中最具代表性的流派競爭過程，就是下面要介紹的「關流」與「最上流」之間的競爭（黃俊瑋，2016a；城地茂，2014）。

本節要介紹的算學論爭兩造，其一「關流」來自前一節中介紹最早考慮行列式算則，被稱為「算聖」的關孝和所創立的流派，而「最上流」則是會田安明（公元 1747–1817 年）所建立的流派。雙方論戰的起點，是會田安明本要拜關流的藤田貞資（公元 1734–1807 年）為師，在和藤田貞資與其弟子神谷定令談話過後，藤田貞資指出會田安明在位於芝愛宕山所奉納的算額有錯誤，若是他能夠改正，便收他入門下。但會田安明不但認為那不是錯誤，反而因此認為對方的數學理念與自己不同，於是打消了入關流的念頭，自創「最上流」，並開始研讀藤田貞資的《精要算法》，從中找出該書的一些缺失，寫成後來引發兩邊流派論戰的《改精算法》（引自加藤平左衛門，1968，頁 109–111）。在江戶時代，因為沒有標準化的符號系統，和算各流派之間使用的算術與代數符號略有差異，這也很可能是會田安明與關流爭執的來源。無論如何，因為他們的爭論，後人才有機會看到他們堅持的數學素養價值。

從《改精算法》的刊登之後，兩方便開始了一連串的著書駁斥對方的說法。最先反擊的是藤田貞資的徒弟神谷定令，他寫了《改精算法正論》反駁會田安明對於《精要算法》的評論，而會田安明也著成《改精算法改正論》回擊。本來這只是兩人之間的互相評論，但會變成會田安明抨擊整個關流，則是在回應神谷定令《非改精算法》的《解惑算法》裡，會田安明明白地指出關流的問題。從此除了一面與神谷定令互相批評，會田安明也開始評論先前關流的相關著作，例如藤田貞資（1789）的《神壁算法》主要為他對各地算額問題的解答與評論，而會田安明（1793）也同樣在後來的《神壁算法真術》中表達了許多批評。關流與最上流的論戰，最後要到 1807 年藤田貞資過世後，雙方的論戰才逐漸結束（引自黃俊瑋，2014，頁 139、150）。

接下來，我們取上述論爭中的三組互相對應的實例來看其中體現的數學素養價值。[2]

一、「真實案例 vs 簡要討論」與數學素養中的「用」與「知」

會田安明（1785）在《改精算法》的第一題批評了藤田貞資（1781）的《精要算法》上卷題二十。會田安明指出：「此題者有等數故迂遠也，今省等數施簡術也。」這句話裡的「等數」即最大公因數，也就是會田安明將原來題目中有含有大於 1 的公因數的數值，換成互質的數字進行運算。

《精要算法》原題如下（引用古文之標點符號為作者加入，下同）：

> 今有上下米合一十五石三斗六升，每金一兩上米者一石二斗三升，下米者一石三斗五升也，問各代金幾何？
>
> 答曰：上米代金七兩，下米代金五兩。

[2] 本文所引用之和算文獻，均下載自日本東北大學資料庫「東北大学総合知デジタルアーカイブ」：https://touda.tohoku.ac.jp/

《改精算法》移除「等數」後重新設問如下：

> 今有上下米合一十五石三斗一升，金一兩付上米一石二斗三升，下米一石三斗四升也，問各代金幾何？
>
> 答曰：上米代金七兩，下米代金五兩。

《改精算法》的問題，翻譯成現代語言就是：現在有上、下等級的米共 1531 升，上米每 123 升可換金一兩，下米每 134 升可換金一兩。試問上、下米各可以換多少金兩？把條件改成現代數學符號，就是「已知 $123x + 134y = 1531$，求 x 與 y 的正整數解」。這個問題，我們需要用以下數論的引理來解：「若 a、b 兩數互質，則存在整數 m、n 使得 $am + bn = 1$」。會田安明的解法如下：

> 術曰：上米相場名左，下米相場名右，依剩一術得左七十三，乘合石滿右減之得上代金合問。

「相場」在這裡的意義即為「市場行情價格」，而「相場名」就是兌換金多少兩，即所求所假設的未知數。剩一術則是「大衍求一術」，也就是宋代算家秦九韶求解中國剩餘定理的方法（可參考如文耀光，1999）。從上面的引文，我們能知道會田安明的做法與現在數學的作法是類似的。用現代符號說明，就是從 $123x + 134y = 1$ 用「大衍求一術」求得一組整數解 $(73, -67)$ 之後，再乘回 1531 得到所求：

$$123\times(73)+134\times(-67)=1$$
$$123\times(73)\times1531+134\times(-67)\times1531=1531$$
$$x=73\times1531+134t$$
$$y=(-67)\times1531-123t,\ \text{where } t\in z.$$

因為 x、$y\geq 0$，則可取 $t=-834$。t 代回可得一組解 $x=7$、$y=5$。

至於藤田貞資的原來的問題與解法，其實跟上述的過程是類似的，只是問題原本是解「$123x + 135y = 1536$」這個不定方程。從純數學的觀點來看，兩人都使用「大衍求一術」求解，所以解法的正確性毋庸置疑。那會田安明批評的點在哪裡？在於前面說的「等數」，也就是最大公因數。藤田貞資的方程式有公因數 3，而會田安明修改之後的方程式係數與常數是互質的。

表面上看來，會田安明是在藤田貞資的雞蛋裡挑骨頭，再把不互質的係數與常數改成互質而已，問題的本質不變。這對教育有什麼可反思之處嗎？事實上，這類不同等級的貨物定價問題，從兩千年前的《九章算術・卷二粟米》開始就存在於東亞算學（可參考例如 Dauben et al., 2013）。後來也衍生出如上物品數量組合的不定方程式問題。這些問題的確是真實世界可能會出現的問題，至少藤田貞資是用真實問題來包裝他要討論的數學方法。真實世界問題的條件常常附帶很複雜的數值，但數學教材不希望複雜的數值干擾學生關於方法的學習。所以這裡的癥結在於，我們要用真實世界複雜的數值來教學，還是用簡化過的數字來教學？

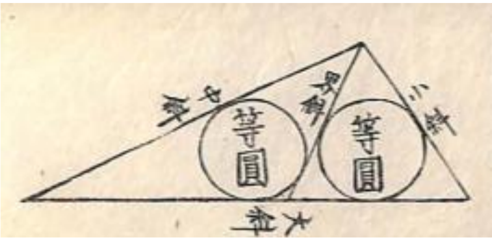
從左台益與李健恆（2018）總結 PISA 與國內外學者關於數學素養的觀點來看，學習數學的第一個目的是將數學應用於真實世界，所以讓學生面對接近真實的數值，可以培養數感，也可以讓學生習慣真實問題的複雜性，這也是數學素養要素中的「用」，藤田貞資設定問題數值的方法應無可厚非。然而，左台益和李健恆也提到數學素養包含在各種數學實踐中所需要的能力，也就是在數學內和數學外的脈絡中皆能理解、判斷、執行和使用數學的能力，傳統上在抽象的數學世界裡面解決問題與價值判斷的能力並沒有被排除在數學素養之外。上面問題的核心在應用「大衍求一術」解不定方程式，複雜的數值會分散學習者的注意力，讓學習者無法專注於學習目標上面。會田安明改變題目的數值，希望學生會專心於方法的學習，或許等方法學好之後再解決真是世界的問題。會田安明的問題與評論，體現的是在數學世界中解決問題與價值判斷的數學素養，強調數學素養要素中的「知」。在這個問題的討論來看，雙方都展現出不同的數學素養價值。在下兩小節中，我們將更深入討論數學世界內部所展現出的數學素養。

二、「大數值 vs 小數值」與處理數字相關議題之素養

前一節所舉出的實例，是會田安明把原本藤田貞資問題中有最大公因數的數值改成互質的係數與常數，雖然去除公因數的干擾，但數值本身沒有變少。下面我們給兩題雙方數值大小有明顯差異的問題來做比較。第一題仍然是在上面提到的《精要算法》與《改精算法》之中。兩者原本的問題如表 2。

表 2

「三斜內隔斜容等圓二個」問題比較

《精要算法》原文與圖式	《改精算法》原文與圖式
	
今有如圖，三斜內隔斜，容等圓二個。大斜三百一十五寸，中斜二百五十七寸，小斜六十八寸，問界斜幾何？	今有如圖，三斜內隔斜，容等圓二個。只云大斜八寸，中斜六寸，小斜四寸，問界斜幾何？
答曰：界斜四十寸。	答曰：界斜三寸
術曰：置中斜加小斜得數自之，內減大斜冪餘平方開之，得商半之，得界斜合問。	術曰：中斜小斜和冪，內減大斜冪餘開平方半之，得界斜合問。

註：兩問題之原文與圖式分別引自

1. 藤田貞資（1781）。**精要算法**（頁 77）。https://touda.tohoku.ac.jp/portal/item/10020000005094
2. 會田安明（1785）。**改精算法**（頁 17）。https://touda.tohoku.ac.jp/portal/item/10010000023665

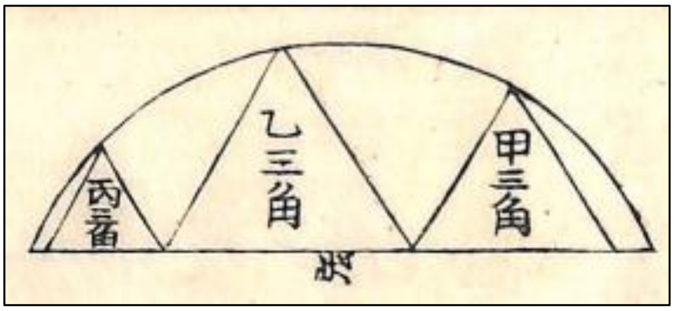
這個問題並不難理解，就是在三角形中有一個從頂點到底邊線段「界斜」，將大三角形分割為兩個小三角形，兩者各有一個內切圓，且兩者直徑相等。給定三角形三邊長（「大斜」、「中斜」與「小斜」），求「界斜」的長度。從表 2 可以看到，左邊藤田貞資使用的數值是二位數與三位數，而右邊會田安明使用的數值為一位數。最後的術文，以現代符號來說，就是 $\frac{\sqrt{(\text{中斜}+\text{小斜})^2-\text{大斜}^2}}{2}=\text{界斜}$。

關於這段術文的證明，需要用到稍微複雜的歐式幾何與代數運算才能得到，包含海龍公式、畢氏定理與多元高次方程組等等，讀者可參考米山忠興（2006）。這個問題看起來是純粹的幾何討論，無涉於真實世界的數值，在這類問題中，會田安明將數值減少的確可以減少計算時受到的干擾，讓學習者可以專心於幾何關係的討論。

上述小數值的好處，一般現場教師與數學教育研究者應該沒有太多反對意見。然而，會田安明在其他地方，讓我們看到小數值不只有好處，也有要注意的地方。這組問題出現在上面提到討論算額的《神壁算法真術》與《神壁算法》之中。算額的問題通常是平面幾何問題，這題也不例外，下圖 1 為我們要討論的《神壁算法》第六題附圖，下表 3 為《神壁算法真術》與《神壁算法》之中對應問題的原文。

圖 1

《神壁算法》第六題附圖



註：引自藤田貞資（1789）。**神壁算法**（頁 14）。https://touda.tohoku.ac.jp/portal/item/10010000033102

表 3

《神壁算法》與《神壁算法真術》第六題問題原文對照

《神壁算法》第六題原文	《神壁算法真術》第六題原文
今有如圖，弧內容甲乙丙三角形，甲三角面二百零六寸一分，乙三角面二百二十九寸，丙三角面一百八十三寸二分，問弦幾何？	今有如圖，弧內容甲乙丙三角形，只云甲面四寸，乙面五寸，丙面三寸，問弦幾何？
答曰：弦一千零二十九寸八分有奇	答曰：弦一十三寸七分四釐四毫有奇

在這裡我們同樣可以看到，藤田貞資在《神壁算法》問題中使用的數值主要為三位數，而會田安明在《神壁算法真術》問題中使用的數值主要為一位數，差別和表二討論的問題

相同。然而，在後面的術文與實際數值計算的部分，就可以看出更多大小數值的差異。下表 4 為《神壁算法》與《神壁算法真術》第六題解題術文對照與現代符號解讀。

表 4

《神壁算法》與《神壁算法真術》第六題解題術文對照

	解題術文	現代符號說明
《神壁算法》	術曰： 甲三角面乙三角面相乘而（以下三角面三字略之）加甲乙差冪名天； 置甲乘丙以減乙冪餘名地； 置甲加丙內減乙餘乘乙丙和，以地除之得數名人。 （人）加二箇自乘之乘天得內減甲因乙因人冪餘，平方開之，得弦合問。	$甲乙+(甲-乙)^2=天$ $乙^2-甲丙=地$ $\frac{(甲+丙-乙)\times(乙+丙)}{地}=人$ $\sqrt{(人+2)^2\times天-甲乙人^2}=弦$
《神壁算法真術》	術曰： 甲丙（乃面之字畧之）相乘以減乙冪名天，甲乙相乘加丙冪以天除之名地，（地）加一箇乘甲乙差自之，加甲因乙因地四段，開平方，得弦合問。	$乙^2-甲丙=天$ $\frac{甲乙+丙^2}{天}=地$ $\sqrt{(地+1)(甲-乙)^2+甲乙\times4地}=弦$

這裡的解題過程如果要證明，需要用到頗為複雜的歐式幾何論證與代數論證，但術文的證明同樣不是我們要討論的重點。兩個文本的作者都附上最後的數值解答，但當我們實際使用他們提供的術文去計算時，有趣的事情發生了。表 5 是我們使用問題給定數值去計算答案的過程。

表 5

《神壁算法》與《神壁算法真術》第六題數值計算過程

《神壁算法》解題過程	《神壁算法真術》解題過程
$甲=206.1$，$乙=229$，$丙=183.2$	$甲=4$，$乙=5$，$丙=3$
$甲乙+(甲-乙)^2=天$	$乙^2-甲丙=天$
$\Rightarrow 47196.9+524.41=47721.31$	$\Rightarrow 25-12=13$
$乙^2-甲丙=地$	$\frac{甲乙+丙^2}{天}=地$
$\Rightarrow 52441-37757.52=14683.48$	$\Rightarrow \frac{20+9}{13}\approx 2.231$
$\frac{(甲+丙-乙)\times(乙+丙)}{地}=人$	$\sqrt{(地+1)(甲-乙)^2+甲乙\times4地}=弦$
$\Rightarrow \frac{160.3\times412.2}{14683.48}=4.5$	$\Rightarrow \sqrt{3.231+178.48}\approx 13.48002225$
$\sqrt{(人+2)^2\times天-甲乙人^2}=弦$	（原文提供的解答為 13.744 有奇）
$\Rightarrow \sqrt{2016225.3475-955737.225}\approx 1029.80004$	

會田安明除了改寫術文，使用較少的變數進行計算以外，也將本來題目的甲乙丙三角形的面積數字改小，要讓題目變得更加容易。然而，從表 5 可以看到，《神壁算法》的過程中，雖然數字很大，導致計算比較複雜，但其數字的設計直到最後開根號時都不會有需要取概數的地方；而《神壁算法真術》雖然數字很小方便計算，但在第二步求地的時候就會出現除不盡而要使用概數計算，這樣會有因為取的位數不同而造成誤差的可能性。這裡我們看到的問題就是，問題設計時的數值，如果可以容許大數值，那麼就可以連帶考慮計算過程中避免近似值，只考慮小數值的問題，雖然計算上較為簡便，但過程中若需要取超過一次的概數，那麼誤差可能會放大。問題的數值如果來自真實世界，那麼誤差的問題的確需要不斷考慮，但如果是純粹討論數學問題，那麼這裡體現的數學素養價值，就是數值的設計要考慮計算的過程，「有關存取、使用、解釋及溝通數學資訊及想法的能力」（左台益、李健恆，2018）。對應到處理與數字相關議題之素養。

討論完算術與數字相關議題的素養，下一小節我們舉出論爭中體現關於代數方法的數學素養。

三、「多變數計算過程 vs 少變數計算過程」與數學素養中的「觀」與「學」

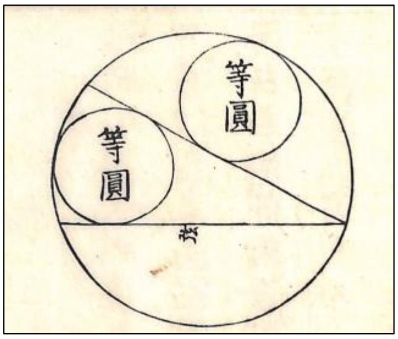
關於代數數學素養討論的例子，仍然是在《神壁算法》與《神壁算法真術》之中。在《神壁算法》第二十題，原本的問題是這樣的：

> 今有如圖，弧內隔斜而容等圓二箇，全圓徑六百九十七寸，等圓徑二百七十二寸，問弦幾何？
>
> 答曰：弦六百七十二寸。

也就是說，如圖 2 所示，一個大圓內有一弦，圓弧與弦包含的區域內有兩個等圓跟另一條斜的弦，兩等圓在各自的區域內和邊界相切，給定大圓與兩等圓的直徑長，要求圖中水平弦的長度。

圖 2

《神壁算法》第二十題附圖



註：引自藤田貞資（1789）。**神壁算法**（頁 23）。https://touda.tohoku.ac.jp/portal/item/10010000033102

在這個題目中，藤田貞資與會田安明的區別，也是不在於計算結果或者背後的幾何證明，而是代數符號的使用方式。數學上來說，兩者的計算過程是相同的，只是在未知數使用上的不同。下表 6 為《神壁算法》與《神壁算法真術》第二十題解題術文對照與現代符號解讀。

表 6

《神壁算法》與《神壁算法真術》第二十題解題術文對照

	解題術文	現代符號說明
《神壁算法》	置等圓倍之，以減全圓徑餘名天； （天）加等圓徑名地； （地）乘天開平方十之，加天四段與地六段名人； （人）加全圓徑三之，加地得數以等圓徑除之，開平方用除人，得弦合問。	$全-2等=天$ $天+等=地$ $\sqrt{地\times天}\times10+4天+6地=人$ $\dfrac{人}{\sqrt{\dfrac{(人+全)\times3+地}{等}}}=弦$
《神壁算法真術》	全等徑差名天， （天）內減等徑乘天開平方加天十之內減等徑四段名地， （地）加全徑三之加天以等徑除之，開平方以除地，得弦合問。	$全-等=天$ $\left(\sqrt{(天-等)\times天}+天\right)\times10-4等=地$ $\dfrac{地}{\sqrt{\dfrac{(地+全)\times3+天}{等}}}=弦$

在這裡我們可以看到，藤田貞資在計算過程中設定了三個變數天、地、人，而會田安明只設定了兩個變數天與地。經過表 7 的代數運算，我們不難看出，藤田的「地」就相當於會田的「天」，而藤田的「人」就等於會田的「地」。

表 7

《神壁算法》與《神壁算法真術》第二十題變數驗證

	《神壁算法》第二十題變數	《神壁算法真術》第二十題變數
步驟一	$全-2等=天$ $天+等=地$ $\Rightarrow 全-等=地$	$全-等=天$
步驟二	$\sqrt{地\times天}\times10+4天+6地=人$ $\Rightarrow 人=\sqrt{(全-等)\times(全-2等)}\times10$ $+4(全-2等)+6(全-等)$ $\Rightarrow 人=\sqrt{(全-等)\times(全-2等)}\times10$ $+10全-14等$	$\left(\sqrt{(天-等)\times天}+天\right)\times10-4等=地$ $\Rightarrow 地=\left(\sqrt{(全-2等)\times(全-等)}\right)\times10$ $+10天-4等$ $\Rightarrow 地=\left(\sqrt{(全-等)\times(全-2等)}\right)\times10$ $+10(全-等)-4等$ $\Rightarrow 地=\left(\sqrt{(全-等)\times(全-2等)}\right)\times10$ $+10全-14等$

相互對照過後，兩邊的術文便是相同，在相同術法的情況之下，如果能少設一個變數，確實是比較簡潔，如果要讓學習者依樣畫葫蘆，會田安明的計算過程剛開始比較容易，但也因為變數較少，所以步驟二的計算（藤田的「人」對照會田的「地」）其實有變複雜，從表 7 也可以看出，所以藤田貞資與會田安明的術文並沒有哪一邊真的特別好理解。

上面敘述的多變數與少變數計算過程，在現代數學的教與學的過程中，似乎不是常被討論的議題，但從數學素養的角度來看，要在代數計算或證明過程中使用多少變數輔助，就對應到左台益與李健恆（2018）所提到「觀」與「學」中數學方法的評估、判斷，以及學習者與自身和他人的相互溝通與理解。這樣的能力可對應到初等數學與高等數學的例子。在初等數學中，眾所周知的是很多一元一次方程式的應用問題也能用兩個未知數來列式，使用一個未知數，需要在過程中用較為複雜的表示法把數個條件連結起來，而使用兩個未知數，則可以比較簡便地將給定條件轉成代數式，但解方程式也需要更多技巧。這兩種進路，沒有哪一種比較好，而是要看學習的脈絡與接受程度。同樣的狀況，在初等數學之外的例子也很多，例如三次方程式與四次方程式的公式解。在中學數學中有一元二次方程式公式解的教學，使用方程式的係數將兩個根用同一個根式表示出來。用類似的證明策略，如果要討論一元三次方程式的公式解，但不設定新的變數來幫助思考的話，那麼討論這個公式就會變得十分困難。通常我們都需要在過程中設定至少三個以上的變數來幫助代數運算。至於四次方程式，討論過程就更為複雜，我們會需要設定至少四個變數，過程中形成新的三次方程式與二次方程式，再解出最後四次方程式的解（可參考如 Redfield, 2001）。藤田貞資與會田安明在上面這一題的討論所展現出的數學素養價值，就是提醒我們去思考如何在代數運算過程中設定新的變數來幫助思考與計算，而不只是使用單一變數或題目給定的數值從頭做到尾。這是數學世界內部的價值，雖然不是直接應用在真實世界的問題，但也屬於數學世界內部的數學素養。

伍、結論

現代與古代的數學從業人員，在進行數學相關活動的過程中，發展出了很多數學中的文化，而日本江戶時代不同流派之間的算學論證，可以看成一種「社群辯證」的過程。Bishop（2001）認為「價值是行動中的信念」。有趣的是，本文所介紹關流與最上流（或藤田貞資與會田安明）之間的論爭，焦點不是在於數學計算或證明的正確與否，而是在雙方進行社群辯證的過程中，以解題思維與辯論的行動體現出與數學素養相關的信念，也就是跟數學素養相關的價值。經過我們的討論，我們發現江戶時代的數學論爭體現出三類數學素養相關的價值，可供現代數學教學與學習實務上的反思。

首先，會田安明與藤田貞資兩人因數學理念不同，所以對於題目的要求也有所差異。會田安明追求精簡扼要，直指題目使用的數學概念與解法，而藤田貞資則有時會使用生活中的實際例子，所以才會在數字上或是解法上都較為繁瑣。從數學素養的角度來看，我們

會希望使用真實世界的例子作為教學用的問題，但真實世界的例子可能會有較為複雜的數值，在計算上或許會造成學生較多的負擔。另一方面，將真實世界的問題簡化之後，數值比較不會干擾學生對數學方法的學習。從左台益與李健恆（2018）的觀點來看，數學素養重點之一是在生活中的建模過程，所以問題具有某種程度的真實性是重要的，但如何使問題的數值不致影響學習的過程，則是現代教育工作者需要權衡之處。

第二，真實世界的例子雖然會有較為複雜的數值，但問題的來源與答案可能都符合真實的資料或者測量的結果，而即使我們不希望數值干擾計算，也不見得可以任意把數值改小，因為在計算過程中，更動太多的數字可能需要取概數，導致最後答案的誤差。從左台益與李健恆（2018）的觀點來看，數學素養強調處理與數字相關的議題。小數值固然可能好計算，但問題的數值如果來自真實世界，那麼誤差的問題的確需要不斷考慮。而若是是純粹討論數學問題，那麼本文舉例所體現的數學素養價值，就是數值的設計要考慮計算的過程，這就是處理與數字相關議題之素養。

第三，純粹數學的思考並沒有被排除在數學素養的討論之外，左台益與李健恆（2018）素養架構的第三點，就強調在各種數學實踐中所需要的能力，也延伸至接近對數學方法的評估、判斷，以及學習者與自身和他人的相互溝通與理解。本文舉出的最後一組例子是關於代數思考方面。關於「術文」，也就是算則（algorithm）的說明，到底需要在過程中使用多少個代數符號，或者設定幾個未知數，需要看學習者的脈絡而定。在數學論爭的問題對照中，我們看到，使用變數較多的過程，得到的算式可能較為簡潔，而使用較少的變數，過程的算式可能會較為複雜。這樣的發現，如同在同樣的問題用一元一次方程式或二元一次方程式來解答的時候，通常用一個未知數的方程式會比兩個未知數的方程式要複雜。在教學上，我們需要理解學習者的脈絡來選擇問題內容，以及論證過程中變數或未知數使用的個數，這是本文從數學論爭中所看到的第三個數學素養價值。

以上三個數學素養相關價值，均對數學教學實務給出一些可供思考的建議。關於江戶時代算學家的論爭，應該還有很多值得反思的問題存在，未來也希望我們有機會繼續來挖掘並分享。

誌謝

本研究得以完成，主要來自國科會專題研究計畫（計畫編號：MOST 109-2511-H-152 -001 -MY2）的經費支持。另外，本文投稿期間，兩位審查委員均給予十分有建設性的評論與修改建議，使得本文更能夠凸顯研究貢獻。特此感謝國科會與兩位審查委員。

參考文獻

文耀光（1999）。大衍求一術與二元一次不定方程。**數學傳播，23**（3），86–92。[Man, Y.-K. (1999). The procedure of great extension to find one and linear diophantine equations of two unknowns. *Math Media, 23*(3), 86–92. (in Chinese)] https://www.math.sinica.edu.tw/media/pdf/d233/23310.pdf

左台益、李健恆（2018）。素養導向之數學教材設計與發展。**教育科學研究期刊，63**（4），29–58。[Tso, T.-Y., & Lei, K.-H. (2018). Design and development of mathematical literacy-oriented subject materials. *Journal of Research in Education Sciences, 63*(4), 29–58. (in Chinese)] https://doi.org/10.6209/JORIES.201812_63(4).0002

朱世傑（1993）。**算學啟蒙**。河南教育出版社。（原著出版於 1299 年）[Zhu, S.-J. (1993). *Introduction to mathematical studies*. Henan Education Press. (Original work published 1299) (in Chinese)]

朱立熙（2019）。**韓國史：悲劇的循環與宿命**（增訂六版）。三民書局。[Chu, L.-H. (2019). *The fated cycle of tragedy: A history of Korea* (6th expanded ed.). San Min Books. (in Chinese)]

洪萬生（1998）。HPM 隨筆（一）。**HPM 通訊，1**（2），1–3。[Horng, W.-S. (1998). A note on HPM (1). *HPM Newsletters, 1*(2), 1–3. (in Chinese)] https://hpmsociety.tw/wp-content/uploads/hpmletters/hpm1(2).pdf

英家銘（2022）。**東亞傳統科學：日韓數學文化史**。滄海書局。[Ying, J.-M. (2022). *East-Asian traditional science: A history of mathematical cultures in Japan and Korea*. Tsang Hai Publishing. (in Chinese)]

英家銘、黃俊瑋（2021）。內外有別的知識價值：文化如何影響數學知識的教育與傳播？以十七至十九世紀的朝鮮與日本為例。**臺灣教育哲學**，5（1），1–31。[Ying, J.-M., & Huang, J.-W. (2021). Internal values vs. external values: How cultures influence the education and transmission of mathematical knowledge? Taking Korea and Japan in the 17th to 19th centuries as examples. *Journal of Taiwan Philosophy of Education, 5*(1), 1–31. (in Chinese)] https://doi.org/10.7001/JTPE.202103_5(1).0001

烏雲其其格（2009）。**和算的發生：東方學術的藝道化發展模式**。上海辭書。[Uyunqiqig. (2009). *The genesis of* Wasan*: The development of an oriental academic field into a way of art*. Shanghai Lexicographical Publishing House. (in Chinese)]

教育部（2018）。**十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校－數學領域**。作者。[Ministry of Education. (2018). *Curriculum guidelines of 12-year basic education for elementary, junior high schools and general senior high schools–Mathematics*. Author. (in Chinese)] https://cirn.moe.edu.tw/Upload/file/27338/72246.pdf

黃俊瑋（2014）。**關流算學研究及其歷史脈絡：1722-1852**（未出版博士論文）。國立臺灣師範大學。[Huang, J.-W. (2014). *The mathematical studies of the Seki School and its historical contexts: 1722-1852* (Unpublished doctoral dissertation). National Taiwan Normal University. (in Chinese)]

黃俊瑋（2015）。和算關流分式符號表徵的發展、過渡與概念意義。**臺灣數學教育期刊，2**（1），41–68。[Huang, J.-W. (2015). The development, transition and conceptual meanings of the symbolic representations about fractions in the Seki School of Wasan. *Taiwan Journal of Mathematics Education, 2*(1), 41–68. (in Chinese)] https://doi.org/10.6278/tjme.20150313.001

黃俊瑋（2016a）。江戶日本的一場數學論戰－最上流會田安明 vs. 關流集團。**數理人文，7**，46−53。[Huang, J.-W. (2016). A mathematical debate in Edo Japan: Aida Yasuaki of Saijo school vs. Seki school. *Mathematics, Science, History, and Culture, 7*, 46−53.] https://doi.org/10.6851/MSHCM.201601_(7).0008

黃俊瑋（2016b）。江戶時代的數學教育一隅—算學道場、和算教科書與數學專業化。**中華科技史學會學刊，21**，1−9。[Huang, J.-W. (2016). Mathematics education in the Edo period – the *Wasan* school, the textbook of *Wasan* and the professionalisation of mathematics. *Bulletin of Chinese Association for the History of Science, 21*, 1−9. (in Chinese)] https://reurl.cc/WAYnQD

劉柏宏（2016）。從數學與文化的關係探討數學文化素養之內涵－理論與案例分析。**臺灣數學教育期刊，3**（1），55−83。[Liu, P.-H. (2016). Discourse on the constituent of literacy for mathematical culture in terms of the relationship between mathematics and culture – Theoretical and case analysis. *Taiwan Journal of Mathematics Education, 3*(1), 55−83. (in Chinese)] https://doi.org/10.6278/tjme.20160413.001

劉柏宏（2021）。數學人文教案培養數學文化素養之理論探討與反思。**臺灣數學教育期刊，8**（1），1−25。[Liu, P.-H. (2021). A theoretical and reflexive study on cultivating literacy of mathematical culture by using lesson plans from humanistic mathematics. *Taiwan Journal of Mathematics Education, 8*(1), 1−25. (in Chinese)] https://doi.org/10.6278/tjme.202104_8(1).001

蘇惠玉（2018）。**追本數源：你不知道的數學祕密**。三民書局。[Su, H.-Y. (2018). *Tracing the origin of mathematics: The secrets of mathematics you never know*. San Min Books. (in Chinese)]

蘇意雯（2007）。日本算額題的趣味數學。**科學教育月刊，299**，35−40。[Su, Y.-W. (2007). Interesting teaching about problems on Japanese sangaku. *Science Education Monthly, 299*, 35−40. (in Chinese)] https://doi.org/10.6216/SEM.200706_(299).0003

蘇意雯、宮川健（2024）。日本「遺題繼承」傳統下的「蟲蛀算」：經由古文本以及大學生實作之分析。**臺灣數學教育期刊，11**（1），37−66。[Su, Y.-W., & Miyakawa, T. (2024). “Mushikuizan” under the Japanese tradition of “bequeathed problems”: Through the analysis of ancient texts and university students’ work. *Taiwan Journal of Mathematics Education, 11*(1), 37–66. (in Chinese)] https://doi.org/10.6278/tjme.202404_11(1).002

會田安明（1785）。**改精算法**。東北大学総合知デジタルアーカイブ（レコード ID：10010000023665）。https://touda.tohoku.ac.jp/portal/item/10010000023665

會田安明（1793）。**神壁算法真術**。東北大学総合知デジタルアーカイブ（レコード ID：10020000006089）。https://touda.tohoku.ac.jp/portal/item/10020000006089

網野善彥（1997）。**日本社會の歴史**。岩波書店。

藤田貞資（1781）。**精要算法**。東北大学総合知デジタルアーカイブ（レコード ID：10020000005094）。https://touda.tohoku.ac.jp/portal/item/10020000005094

藤田貞資（1789）。**神壁算法**。東北大学総合知デジタルアーカイブ（レコード ID：10010000033102）。https://touda.tohoku.ac.jp/portal/item/10010000033102

古瀨奈津子（2011）。**摂関政治**。岩波書店。

五味文彥（2016）。**中世社会のはじまり**。岩波書店。

長谷川弘、山本賀前（1841）。**算法助術**。東北大学総合知デジタルアーカイブ（レコード ID：10020000003712）。https://touda.tohoku.ac.jp/portal/item/10020000003712

城地茂（2014）。**和算の再発見：東洋で生まれたもう一つの数学**。化学同人。

加藤平左衛門（1968）。**日本数学史・下**。槇書店。

小川束（2021）。**和算－江戸の数学文化**。中央公論新社。

欒竹民（2003）。日本における「道」の受容と展開：「芸道」の生成を一階梯として。**国文学攷，180**，13–27。https://ir.lib.hiroshima-u.ac.jp/00021411

米山忠興（2006）。等円術 II－三斜等円術（一般公式）。**東洋大学紀要・自然科学篇，50**，107–121。https://toyo.repo.nii.ac.jp/record/2534/files/shizenkagakuhen50_107-121_OCR.pdf

Barbin, É., Guillemette, D., Tzanakis, C. (2020). History of mathematics and education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 333−342). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_69

Barnes, G. (2007). *State formation in Japan: Emergence of a 4th-century ruling elite*. Routledge.

Bishop, A. J. (2001). Educating student teachers about values in mathematics education. In F.-L. Lin & T. J. Cooney, (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp.233−246). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-010-0828-0_11

Clark, K. M. (2019). *History and pedagogy of mathematics in mathematics education: History of the field, the potential of current examples, and directions for the future*. In U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis, (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European society for Research in Mathematics Education* (HAL Id: hal-02436281). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME. https://hal.science/hal-02436281/document

Dauben, J. W., Guo, S., & Xu, Y. (2013). *九章筭術 Nine Chapters on the art of mathematics. A critical edition and English translation based upon a new collation of the ancient text and modern Chinese translation*. Liaoning Education Press.

Fasanelli, F., Arcavi, A., Bekken, O., Silva, J. C. E., Daniel, C., Furinghetti, F., Grugnetti, L., Hodgson, B., Jones, L., Kahane, J. P., Kronfellner, M., Lakoma, E., van Maanen, J., Michel-Pajus, A., Millman, R., Nagaoka, R., Niss, M., de Carvalho, J. P., da Silva, C. M. S., … Zhang, D. Z. (2000). The political context. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 1−38). Kluwer Academic Publishers. https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/0-306-47220-1_1

Fauvel, J., & van Maanen, J. (Eds.). (2000). *History in mathematics education: The ICMI study*. Kluwer Academic Publishers.

Fukagawa, H., & Rothman, T. (2008). *Sacred mathematics: Japanese temple geometry*. Princeton University Press. https://doi.org/10.1515/9781400829712

Katz, V. J. (2008). *A history of mathematics: An introduction* (3rd ed.). Pearson.

Katz, V. J. (Ed.). (2000). *Using history to teach mathematics: An international perspective*. Mathematical Association of America.

Katz, V. J., & Tzanakis, C. (Eds.). (2011). *Recent developments on introducing a historical dimension in mathematics education*. Mathematical Association of America. https://maa.org/wp-content/uploads/2024/10/NTE78.pdf

Keller, A., & Volkov, A. (2014). Mathematics education in oriental antiquity and middle ages. In A. Karp, & G. Schubring (Eds.), *Handbook on the history of mathematics education* (pp. 55−83). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-9155-2_4

Organization for Economic Cooperation and Development. (2018). *PISA 2021 mathematics framework (Draft)*. OECD Publishing. https://reurl.cc/r3bqjk

Pollet, C., & Ying, J. M. (2017). One quadratic equation, different understandings: The 13th century interpretations by Li Ye and later commentaries in 18th and 19th centuries. *Journal for History of Mathematics*, *30*(3), 137−162. http://doi.org/10.14477/jhm.2017.30.3.137

Redfield, R. H. (2001). *Abstract algebra: A concrete introduction*. Addison-Wesley Longman, Inc.

Tamaki, T. (2014). Japanese economic growth during the Edo Period. *Kyoto Sangyo University Economic Review, 1*, 255−266. https://ksu.repo.nii.ac.jp/records/2350

Wilson, P. S., & Chauvot, J. B. (2000). Sound off!: Who? How? What? A strategy for using history to teach mathematics. *The Mathematics Teacher*, *93*(8), 642−645. https://doi.org/10.5951/MT.93.8.0642