

ISSN: 2312-5810
DOI: 10.6278/tjme

第 4 卷 第 2 期
二〇一七年十月
VOL. 4 NO. 2
October 2017

臺灣數學教育期刊

Taiwan Journal of Mathematics Education



國立臺灣師範大學數學系
Department of Mathematics,
National Taiwan Normal University



台灣數學教育學會
Taiwan Association
for Mathematics Education

發行單位 | 國立臺灣師範大學數學系
台灣數學教育學會

編輯委員會

主編	左台益	國立臺灣師範大學數學系
副主編	吳昭容	國立臺灣師範大學教育心理與輔導學系
	楊凱琳	國立臺灣師範大學數學系
編輯委員	洪麗瑜	國立臺灣師範大學特殊教育學系
(依姓氏筆劃排序)	袁媛	中原大學教育研究所
	黃幸美	臺北市立大學學習與媒材設計學系
	楊志堅	國立臺中教育大學教育測驗統計研究所
	楊德清	國立嘉義大學數理教育研究所
	劉柏宏	國立勤益科技大學通識教育學院
	劉曼麗	國立屏東教育大學數理教育研究所
	劉遠楨	國立臺北教育大學教育傳播與科技研究所
	蔡文煥	國立新竹教育大學數理教育研究所
	謝豐瑞	國立臺灣師範大學數學系
	譚克平	國立臺灣師範大學科學教育研究所

地址	臺北市汀州路四段 88 號國立臺灣師範大學數學系 《臺灣數學教育期刊》
電話	886-2-7734-6576
傳真	886-2-2933-2342
電子郵件	tjmeassistant@gmail.com
網址	http://tame.tw/forum.php?mod=forumdisplay&fid=56

版權所有，轉載刊登本刊文章需先獲得本刊同意，翻印必究

2016-2017 年編審委員

2016-2017 Editorial Review Board

王婷瑩 Ting-Ying Wang

國立臺灣師範大學數學系
Department of Mathematics,
National Taiwan Normal University

左台益 Tai-Yih Tso

國立臺灣師範大學數學系
Department of Mathematics,
National Taiwan Normal University

白雲霞 Yun-Hsia Pai

國立新竹教育大學教育與學習科技學系
Department of Education and Learning Technology,
National Hsinchu University of Education

吳昭容 Chao-Jung Wu

國立臺灣師範大學教育心理與輔導學系
Department of Educational Psychology and Counseling,
National Taiwan Normal University

林勇吉 Lin, Yung-Chi

國立新竹教育大學數學教育研究所
Graduate Institute of Mathematics and Science
Education, National Hsinchu University of Education

林原宏 Yuan-Horng Lin

國立臺中教育大學數學教育學系
Department of Mathematics Education,
National Taichung University of Education

林素微 Su-Wei Lin

國立臺南大學教育學系
Department of Education,
National University of Tainan

邱美秀 Mei-Shiu Chiu

國立政治大學教育學系
Department of Education,
National Chengchi University

唐書志 Shu-Juh Tang

臺北市立百齡高級中學
Taipei Municipal Bailing High School

張景媛 Chang Ching-Yuan

慈濟大學教育研究所
Institute of Education,
Tzu Chi University

許慧玉 Hui-Yu Hsu

國立清華大學數理教育研究所
Graduate Institute of Mathematics and Science Education,
National Tsing Hua University

陳明璋 Ming-Jang Chen

國立交通大學通識教育中心
Center for General Education,
National Chiao Tung University

陳建誠 Jian-Cheng Chen

明志科技大學電機工程系
Department of Electrical Engineering,
Ming Chi University of Technology

陳彥廷 Yen-Ting Chen

國立臺中教育大學數學教育學系
Department of Mathematics Education,
National Taichung University of Education

陳嘉皇 Chia-Huang Chen

國立臺中教育大學數學教育學系
Department of Mathematics Education,
National Taichung University of Education

楊育儀 Peter Yang

嘉義大學輔導與諮商學系
Department of Counseling,
National Chiayi University

楊凱琳 Kai-Lin Yang

國立臺灣師範大學數學系
Department of Mathematics,
National Taiwan Normal University

蔡良庭 Liang-Ting Tsai

國立臺灣海洋大學臺灣海洋教育中心
Taiwan Marine Education Center,
National Taiwan Ocean University

2016-2017 年編審委員（續）
2016-2017 Editorial Review Board (continued)

鄭英豪 Ying-Hao Cheng

臺北市立大學數學系

Department of Mathematics,
University of Taipei

賴孟龍 Meng-lung Lai

國立嘉義大學幼兒教育學系

Early Childhood Education,
National Chiayi University

譚克平 Hak-Ping Tam

國立臺灣師範大學科學教育研究所

Graduate Institute of Science Education,
National Taiwan Normal University

主編的話

《臺灣數學教育期刊》以刊登高品質數學教育學術研究專業論文為宗旨。本期刊支持從多元面向論述數學教育，只要是原創性研究均為本期刊鼓勵發表之文章。由於台灣數學教育社群的支持與重視，本期刊已列入數學教育學門第二級期刊名單，並努力朝向 TSSCI 名單邁進。本期刊將持續努力維持高品質論文的發行。

數學課程改革有賴學校教學的實踐，而有效的教學需依據確實的教學研究。本期刊登三篇文章分別從教學實驗、教師專業成長與 E 化和一般教學法組合研究教學對學生或教師學習成長影響，值得教學研究參考。第一篇文章是由謝佳叡與唐書志共同發表《探究九年級生推論形式之邏輯結構的建構與轉化》。第二篇文章是由劉致演、秦爾聰與尤昭奇共同發表之《探討一位國中數學教師發展探究教學之專業成長》。第三篇文章是由邱美秀發表之《辨識可預測學生數學認知和情意的有效 E 化和一般數學教學法組合》。

本期論文以教學研究為主軸展現不同樣貌，盼能給讀者啟思與參考。本期得以順利發行，得感謝副主編、責編與編審委員們的無償付出，同時也期盼各界能繼續支持，不吝賜稿。

《臺灣數學教育期刊》主編

左台益 謹誌

臺灣數學教育期刊

第 4 卷 第 2 期

2014 年 4 月創刊

2017 年 10 月出刊

目錄

- | | |
|---|----|
| 探究九年級生推論形式之邏輯結構的建構與轉化
／謝佳叡、唐書志 | 1 |
| 探討一位國中數學教師發展探究教學之專業成長
／劉致演、秦爾聰、尤昭奇 | 33 |
| 辨識可預測學生數學認知和情意的有效 E 化和一般數學教學
法組合
／邱美秀 | 69 |

Taiwan Journal of Mathematics Education

Vol. 4 No. 2

First Issue: April 2014

Current Issue: October 2017

CONTENTS

- | | |
|---|----|
| Construction and Transformation of Logical Structures in Ninth-graders' Inferring Types
／Chia-Jui Hsieh 、Shu-Jyh Tang | 1 |
| An Investigation of a Junior High School Teacher's Professional Growth towards Developing Mathematics Conjecturing-Inquiry Teaching
／Chih-Yen Liu 、Erh-Tsung Chin 、Chao-Chi Yu | 33 |
| Identifying Effective E-Teaching and General Mathematical Teaching Profiles to Predict Student Mathematical Cognition and Affect
／Ching-Shu Chen | 69 |

謝佳叡、唐書志（2017）。

探究九年級生推論形式之邏輯結構的建構與轉化。

臺灣數學教育期刊，4（2），1-32。

doi: 10.6278/tjme.20170914.001

探究九年級生推論形式之邏輯結構的建構與轉化

謝佳叡¹ 唐書志²

¹ 國立臺北教育大學數學暨資訊教育系

² 臺北市立百齡高中

本研究基於 EP-spectrum，將學生的數學證明之演繹推理發展視為是從探索、論證，再到證明的過程。本研究的基本立場是，學生對於幾何的探索與論證活動能提供學生證明所需邏輯結構之預先經驗，因而透過探索與論證活動學生對於證明的學習可用回想與轉化以取代重新建構。因此，本研究主要目的是探討學生在參與幾何探索和論證活動時展現的推論形式，從而分析、比較學生在探索、論證和證明區段所展現之推論形式推測學生的邏輯結構之建構與轉化。為了能考察學生如何理解與學習數學幾何證明過程，本研究設計一系列幾何性質的探索教學活動，並實際進入課堂對 35 位九年級學生進行教學形式演繹，透過這樣的教學試驗，本研究發現學生在一系列的學習活動中，從探索到證明所呈現出的推論形式其背後反映之邏輯結構彼此的連續性與不連續性，研究結果也顯示，學生透過這樣的探索與論證活動有助於學生演繹推理發展和數學證明的學習。

關鍵詞：推論形式、數學探索、數學論證、數學證明、邏輯結構

通訊作者：謝佳叡，e-mail：lyz@abel.math.ntnu.edu.tw

收稿：2016 年 3 月 29 日；

接受刊登：2017 年 9 月 14 日。

Hsieh, C. J., & Tang, S. J. (2017).

Construction and transformation of logical structures in ninth-graders' inferring types.

Taiwan Journal of Mathematics Education, 4(2), 1-32.

doi: 10.6278/tjme.20170914.001

Construction and Transformation of Logical Structures in Ninth-graders' Inferring Types

Chia-Jui Hsieh¹ Shu-Jyh Tang²

¹ Department of Mathematics and Information Education, National Taipei University of Education

² Taipei Municipal Bailing High School

This study followed the Exploration-Proof Spectrum, [EP-Spectrum], by observing the development of deductive reasoning to provide evidence of the spectrum from exploration to argumentation and then to proof production. The aim of this study was to evaluate students' performance at making inferences during explorative and argumentative activities. The teaching experiment, employing the exploration approach, was conducted with a class of 35 ninth-graders in Taiwan. We compared the different types of inferences made during exploration, argumentation, and proof. Through a teaching experiment concerning one specific geometric property, the study discovered that the continuity and discontinuity of a logical structure exists in each stage prior to the proof stage, and some results demonstrated that exploration and argumentation are useful to students' deductive reasoning.

Keywords: inferring type, exploration, argumentation, proof, logical structure

壹、緒論

一、背景

儘管有研究指出，將證明從數學課堂剔除是很多國家數學課程的趨勢（Hanna & Jahnke, 1996），然而從數學教育對數學證明相關研究的重視程度看，證明在學校數學中仍然是重要的議題（Ball, Hoyles, Jahnke, & Movshovitz-Hadar, 2002; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000）。在臺灣，數學證明在中學數學教學內容中也仍佔有相當的比例。NCTM 在《Principles and Standards for School Mathematics》中明確指出，無論在數學領域或其他領域，多數人皆能認同證明和推理對於學生洞察力的發展與表達都提供了強而有力的方法（NCTM, 2000），但我們仍必須實際進入課堂考察學生數學證明的學習過程，才能對於證明如何發展學生的洞察力有更深入地體認。

Hanna 等人（2009）從數學教與學的觀點認為數學證明主要由兩個要素組成：（一）遵循演繹法則之精確的推論鏈（chains of inference），以及（二）形式化的符號、語法、操作準則。其中，「遵循演繹法則的推論鏈」意指在數學證明中，一系列的語句和語句之間的有效性連結，也泛指證明步驟與步驟間的合法性與流暢性；形式化的符號、語法、操作準則是意指數學證明的特殊書寫形式。不可否認的，使用形式符號記錄是數學特有形式，但即便是以文字表示的數學語句，其語法也經常異於其他學門的表示語法。舉例來說，幾何作圖常用的語句「以 P 為圓心， \overline{AB} 為半徑畫弧，交直線 L 於 Q 」，這樣的敘述方式就很少在其他學科使用，對於沒學過這樣敘述方式的學生而言是一種全新體驗。因此，即便學生在某個數學證明題的論證或解釋已經取信於他們的老師，他們仍然要學習以特定的證明格式加以紀錄，才算是完成證明的學習。

學生在學習證明會遭遇困難幾乎是每位數學老師的體驗，也有大量的研究致力於學生證明的學習困難探討，但如何教學生克服這些困難目前透過研究所得到的知識仍很有限（Stylianides & Stylianides, 2009）。Epp（2003）總結了一些有關學生證明學習困難的相關研究所揭露的成果，他在親自進行課程教學後發現學生所遇到的困難遠超過老師的預期。許多研究則進一步找尋導致學生證明學習困難的原因，並提出建議的改善方式；而當中的一些研究其結論中就指出，學生在證明學習上無法達到老師的預期主要是因為他們受到證明的離散樣步驟（discrete-like steps）以及多面貌的證明形式的困擾（Hsieh, Lee, & Wang, 2009; Pedemonte, 2007）。Leron（1983）指出數學證明過程經常是單向的從假設到結論，並且以一步接一步的線性樣貌呈現，這樣的教學形式會僵化學生的證明學習，因此，他從學生證明行為的實際考察提出了一種替代方法，稱為「結構證明方法」，這是一種有層次的呈現方式而非只是線性的紀錄方式。Miyazaki、Fujita 與 Jones（2015）也認為幾何證明結構常常是超乎線性而更類似於一種流程圖的結構，並提出使用

開放性問題的流程圖證明結構可以協助學生更理解證明結構。然而，Lamport（1993）卻認為關鍵問題不在此，他認為諸如 Leron 所稱的結構證明方法雖有利於證明教學，卻沒有讓學生的證明更為嚴謹，或更能避免學生在證明在上可能發生的錯誤。如同 Lamport 所指出的問題，無論採用線性或其他證明結構方式，學生都必須面對證明的步驟與步驟之間連結的有效性議題。針對此議題，Pedemonte（2007）則立基在 Toulmin 的模型下，主張一個證明的每一步驟都可以視作一個演繹步驟，而每一個步驟都包含了三個元素：主張（claim）、資料（data），以及依據（warrant），並認為導致學生學習證明的困難的原因之一，就是因為這樣的演繹結構與學生進行論證或臆測的結構並不一致。

Stylianides 與 Stylianides（2008）認為在學校數學推動數學證明是項挑戰，因為要達到這個目標需要學生掌握許多能力。Martin、McCrone、Bower 與 Dindyal（2005）認為證明與推理是數學的重要面向，但如何培養學生具備這種高階思維的技能仍難以捉摸。Hsieh 等人（2009）明白指出，學生要完成一個證明，需要在多個步驟之間的邏輯推理上達到一定的品質，並認為學生的證明品質可以由三個面向決定，分別是（一）主要組件面向：每個步驟所主要強調的提取結果；（二）局部推理面向：步驟與步驟間的推理與參考依據，以及（三）邏輯序列面向：將主要組件在證明中按邏輯排列；而學生最感到困難的就在於他們需要在短短數個步驟之間分別指明不同的推論依據，並且需要將這些步驟以適當的方式陳列。從 Hsieh 等人的觀點看，一個成功的證明需要在這三個面向都有相當的品質要求，而這三個面向中，第一個涉及演繹推論的操作對象，後兩個則都直接連結到演繹推理，這也意味著演繹推論是證明的根本要素之一，因此探討學生保有的證明結構對於學生的證明建構極為重要。

Harel 與 Sowder（1998, pp. 236-237）則從另一個角度來看學生的證明困難原因，他們認為學生對證明的理解、欣賞和產生感到困難最主要的原因是：「在教師眼中這些推論都是理所當然的，並且教師們總是直接講授明確的命題證明，而不是透過探索和臆測活動」。因此 MacPherson（1985）和 Mariotti（2000）就認為整合探索活動在證明教學中是無可取代的。Usiskin（1980, p. 419）也表達了類似的觀點，他說：「我們似乎在證明教學上失敗了，因為我們太常忽視數學家何時且為何做證明、證明可能形式的多樣性，以及數學家如何寫下證明」。根據 Usiskin 的說法，數學家們都是試圖從已知的假設陳述開始，進而推斷一個還不確定是否為真的猜想，並且試圖推斷出任何可能的結果，因此，證明僅在經過大量的探索之後才進行。事實上，而這樣的產生論證的方式也是一般大眾所熟悉的過程。生活上，我們經常需要對自己所產生或觀察的事件結論進行成因的解釋或說明，這也是學生熟悉的證明經驗，例如，這樣的過程就經常能在偵探小說或重視演繹推論的電視影集中經驗到。Salmon（1973）在他的《邏輯》一書中曾使用福爾摩斯探案中的例子來說明論證的特徵與使用的邏輯結構。Salmon 指出，情節中偵探對於案情發展

經常做出斷言 (assertion)，但若偵探沒有提供一個論證或依據，人們是無法核證 (justify) 或推論 (inference) 結論的真實性，而這個論證或依據經常需要偵探從實踐中獲得。相較之下，數學課堂上學生卻很少事先進行探索，幾乎只是被告知他們應該證明什麼 (Usiskin, 1980)。

不難看出，「需要有依據」及「有效串聯依據」的概念是證明或論證的兩大精神，而透過探索獲得相關依據的手法，此與 Usiskin 所述數學家在進行證明活動之過程十分類似。可惜的是，在中學數學證明的學習歷程中，教師們卻經常忽略這個事實。課堂上我們要求學生證明或論證的敘述經常不是他們自己產生的斷言，因此學生對於證明沒有需求感和擁護感。Hanna 等人 (2009) 更直接點出這一個觀點，他們認為透過理解「論證」與「數學證明」之間的關係也許是證明活動設計的關鍵，因為論證只需要學生求使用擬真性論述 (arguments of plausibility)，文句的連結僅需具合理性不一定需要到演繹層次；而數學證明則必須是使用具必然性論述 (arguments of necessity)，文具連結需具組織良好的演繹推論鏈。這也能理解為什麼當數學教師提出一個證明題並要求學生回答時，學生常常提供的卻是論證的過程，經常忽略他們的答案是否支持題目的斷言，甚至也會出現探索式或儀式形式的答案 (Harel & Sowder, 1998)。因此本研究認為，如果我們可以在證明的學習前先提供一個學生探索或發現的過程與機會，讓學生可以產生自己的斷言並論證這個斷言，將會有助於數學證明的學習。

無論從歷史、認知或社會觀點來看，一個證明的建構過程埋藏了許多重要的元件 (Durand-Guerrier, Boero, Douek, Epp, & Tanguay, 2012)，包含了探索 (exploration)、臆測 (conjecturing)、非形式解釋 (informal explanation)、核證 (justification)、論證 (arguments)、形式證明 (formal proof) 等 (Hanna, 2000; Hsieh, Horng, & Shy, 2012; Kleiner, 1991; Lakatos, 1976; Pedemonte, 2007; Pólya, 1981)，但無論是上述的哪一個元件，元件中所涉及的「命題式邏輯 (propositional logic)」同時也能反映出學生在進行該元件活動時所需推理方面的認知結構。本研究將的這樣的推理認知結構稱為學生的「邏輯結構 (logical structure)」，由於邏輯結構為隱藏在學生腦中之認知結構，我們無法直接觀察，只能透過分析學生展現出來的語句加以推測，本研究將學生所展現語句所隱含的推論形式稱為「邏輯推論形式」或簡稱「推論形式 (inferring type)」，用以作為探索學生邏輯結構的依據。嚴格說來，「邏輯結構」與「推論形式」有著不同意涵 (腦中與外顯)，但區別兩者非本文主要目的，避免徒增困擾，本文中所使用兩者皆指涉相同意思，其內涵都近似於 Pedemonte (2007, p.24) 對於「結構」的描述，意指作為語句之間的邏輯認知連接 (the structure is to be intended as the logical cognitive connection between statements)。舉例來說，學生的論證使用的是演繹推論或是歸納推論為吾人可以觀察之推論形式，其背後則是反映出學生之演繹或歸納的邏輯結構。

在推論形式方面，相較於數學證明僅接受使用具必然性的演繹推論，論證 (argumentation)

可被接受的擬真性論述其形式就更為多樣。舉例來說，Pedemonte（2007）認為學生在進行論證時使用的邏輯結構除了演繹結構，就包含了溯因結構（*abductive structure*）與歸納結構。而本文所探討的議題更從探索到證明過程，因此將更多學生可能使用的推論形式也納入學生反映的邏輯結構範疇，例如類比推理（*reasoning by analogy*）、轉化推理（*transformational reasoning*）、直觀推理等。

總的來說，本研究的發想主要來自兩個基本假定。首先，本研究認為學生在某個證明的學習上無法有好的成果，是因為他們在學習該證明時中沒有先具備足夠的經驗。建構一個新的幾何證明本來就是不容易，若學生在正式進入形式證明的學習前，先經歷相關的探索活動，如此學生對於新證明的學習就會從「建構全新經驗」變成「舊經驗的回想與連結」，學生將能更容易學習證明。其次，本研究同意探索、論證與數學證明之間的一個主要的差異在於對推論形式多樣性的接受程度，彼此可能有連貫與不連貫的地方，而學生對於證明的學習並非是從無到有的邏輯結構上之建構，還包含了在不同證明學習活動中對於推論形式要求與使用上的差異與切換之認識，本研究稱之為學生邏輯結構的轉化。中學老師幾乎都同意幾何證明對於學生來說是困難的，然而國內從邏輯結構角度切入探討探索到證明產出相關的研究仍不多見，因此，本研究有興趣進一步探究當學生在數學探索活動時所反映出的邏輯結構，以及學生從探索到證明跨越時邏輯結構的建構與轉化情況，期能對於探索活動在數學證明所扮演的角色與能提供的協助。

二、研究目的與問題

本研究主要是想探究學生正式學習數學證明前若先經歷探索活動、論證活動，其在參與探索和論證活動時展現的推論形式為何，從而分析、比較學生在探索、論證和證明階段所展現之不同類型的推論形式。本研究架構乃基於 Hsieh 等人（2012）所提出的「探索-證明譜線（*Exploration-Proof spectrum, [EP-spectrum]*）」（本文亦稱為「EP 譜線」），並聚焦於學生在證明過程的各階段中之推理或推論發展。為方便研究討論與篇幅關係，本文將光譜重新區分成三個區段，分別是探索、論證與形式證明，並將研究焦點放在這三個區段學生展現之推論形式的差異，以及學生從探索到證明所反映出的邏輯結構之建構與轉化，詳細內容我們將在下一小節中有更詳細的說明。最後我們會從教學的觀點討論以下二個問題：（一）實際學習歷程中，學生在譜線中各階段最可能展現或認同的推論形式為何？（二）如何幫助不同推論類型學生從其他推論形式橋接到演繹推論？

值得一提的是，本文使用「邏輯結構」或「推論形式」意旨學生在譜線各個階段與過程中所反映或展現的各種推理方式，我們參考 Peirce（1960）和 Pedemonte（2007）的作法，在不引起混淆的情況下將「邏輯推理（*logic reasoning*）」一詞的指涉對象聚焦在演繹推理、歸納推理與溯因推理等三種推論形式，而根據 Pedemonte（2007）的說法，這三種推理是論證階段主要使用的

推論形式。

貳、理論架構與文獻探討

本研究主要是奠基在 Hsieh 等人（2012）所發展的「EP-spectrum」模型，這個模型將學校所學的數學證明視為一系列活動的產物，此系列活動始於探索活動，中間經過臆測（conjecturing）、非形式解釋（informal explanation）、核證式論證（justificative argument），最後到證明產生。根據 Hsieh 等人的觀點，所有學生課堂上所經驗的數學證明活動廣義來看都可視為一種問題解決，最終試圖形成證明；但 Hsieh 等人同時也指出，學生在學習過程上如果僅從「理解一個別人建構好的證明」著手，而沒有經歷外在活動的經驗，要在心智上建構一個證明是困難的。本研究依循這樣的觀點，在假設學生對於探索、論證與數學證明之間所使用的推論形式具有多樣性差異的前提下，來看學生在證明學習上的邏輯結構發展，並試圖回答學生需要什麼樣的邏輯結構來發展一個數學證明，而這些邏輯結構是否可以透過探索活動來協助建構並成功跨越到證明？

為更清楚本研究的理論架構，以下對於 EP-spectrum 模型與各階段的推論形式加以闡述。

一、EP-spectrum 的觀點

根據 Hsieh 等人（2012）所述，EP-spectrum 意指一種觀點，這個觀點是將課堂上的證明過程視為一種臆測或性質的核證過程。EP-spectrum 就像是一個有序性的光譜表，位於譜線的一端是探索，另一端則是證明產出。譜線上的各個階段依序是探索、臆測、非形式解釋、核證式論證，以及證明產生，這些階段反映出證明教學活動或過程的重要元素，各元素彼此之間並不是互斥的，且並非所有的證明活動都需要經歷序列中所有的階段。另一方面，Hsieh 等人還提到，學生們可以同時體驗或運作多個階段的工作，而教師也可以視教學活動的內容、目標或學生的程度決定是否要包括或略掉 EP-spectrum 的任一階段。大抵上，本研究採用相似的觀點，並將研究興趣放在證明過程中各階段的學生可能展現的推理或推論，但為避免研究分析過於繁瑣，本研究適度將 EP-spectrum 活動階段加以簡化成彼此不必然互斥的三個區段，分別是探索活動（含探索與臆測）、論證活動（含非形式解釋與核證式論證），以及證明產出（特別指形式證明），本文稱本研究簡化後的 EP-spectrum 為「EP 簡譜」（如圖 1）。

在確定 EP 簡譜的區段後，本研究從文獻與辯證中進一步建構 EP 簡譜中可用來作為觀察學生各區段會使用或可能展現的推論形式。首先，承續 Hanna 等人（2009）的認定，本研究也同意將論證界定在理性對話的使用，因此在論證區段上不只接受學生使用具有必然性的演繹形式，也接受可以使用具有合理性但不一定具必然性的論述。實際的作法上，我們則採用 Pedemonte（2007）的設定，將論證活動的推論形式預設在演繹推理、歸納推理與溯因推理等三種形式；相對的，證明產出區段我們則特指最後數學教學期望的形式證明，也就是 EP-spectrum 中所採用

之具有必然性的演繹推論鏈，因此允許的推論形式僅包含演繹推理。而在探索區段，本研究則接受學生各種可能使用、合理使用或文獻中提及的所有非形式的推論形式，其中非形式(informal)包含了如類比推理、轉化推理、直觀推理、生活推理(everyday reasoning)等形式(form)。特別說明的是，由於數學上，形式的(formal)一詞包含了使用數學語言與形式符號，因此即便學生在論證過程是採用演繹、歸納或溯因推理，若沒有使用形式化語言也可能僅是非形式化解釋。據此，圖 1 顯示了 EP 簡譜與相對應的多樣推論形式，也構成本研究主要的架構。

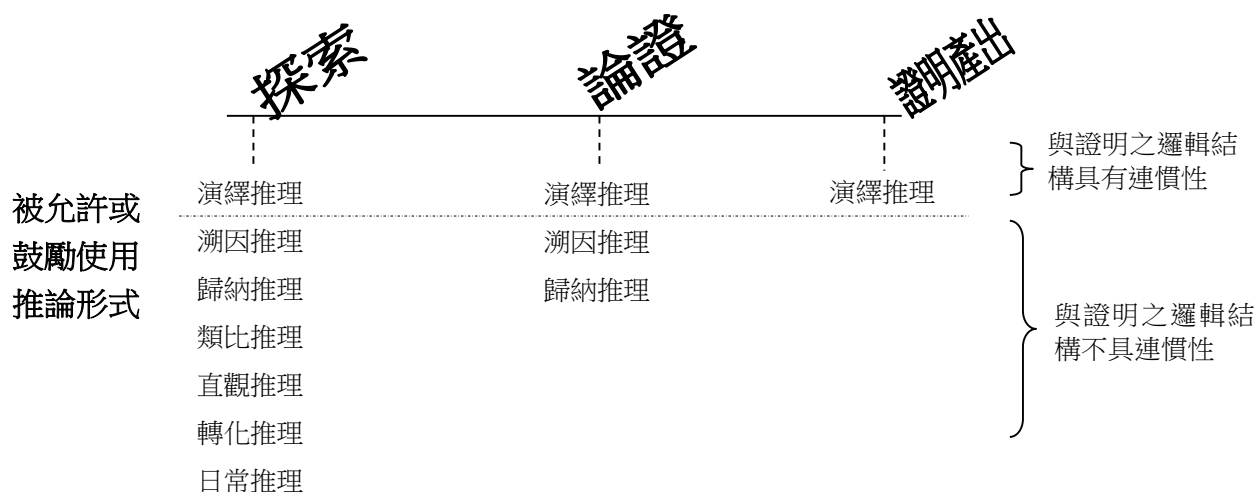


圖 1 EP 簡譜與多樣推論形式

圖 1 展示出，在探索或論證區段的活動中，被允許或鼓勵的推論形式多樣性多於證明產出區段，這也是為何我們無法預期學生從探索到證明應該且能保持邏輯連續性(logical continuity)。Pedemonte (2007) 就認為，如果學生的論證是基於對不同的例子觀察後，依據「模式的一般化」的推論形式來作為結論的擔保，那麼此論證活動反映的邏輯結構（即歸納結構）與之後進入證明區段的邏輯結構（即演繹結構）並不具有邏輯連續性。相同的，如果學生的探索是基於類比推理、轉化推理或直觀來作為結論的擔保，那麼同樣此探索活動的這些推論形式與證明區段（甚至於論證區段）所反映的邏輯結構也不具有邏輯連續性。如此一來，在實際教學上，教師要如何透過探索活動來幫助證明的學習？而在學理上，我們又如何確保透過探索或論證活動能夠提供證明所需要的邏輯結構？這些疑點我們期望能夠從實際對學生的考察獲得線索，而試圖探究這個問題時，我們需對各區段的使用的推論形式有更進一步的考察。

二、探索、論證與證明的推論／推理形式

Piaget 與 Garcia (1991) 認為推論(inferences)可能被認為只是意義與意義之間所蘊含的言外之意。由此，當人們試圖透過對一個探索活動的觀察與連結來形成各種臆測時，他們其實是在試圖找尋一些「適當且有意義」的蘊涵關係，因此大量的推論形式就會浮現。大多數的情況

中，論證和證明活動的重點在於核證而不是發現，但論證也可能涉及發現面向，有時甚至會有創造性面向。這也是為什麼論證所含的推論形式不能排除歸納推理與溯因推理，此也吻合 Pedemonte (2007) 將歸納結構與溯因結構納入於論證結構的觀點。因此本研究同意學生在論證階段使用的推理包含演繹、歸納和溯因推理三種，而只有演繹推理可以被數學證明接受。由於演繹與歸納推論較為大眾所熟知，以下針對溯因推論稍加描述。

「溯因推理 (Abductive reasoning，國內也有學者譯作「發想」)」一詞在不同的領域有不同的意涵。在哲學、科學或計算機科學中，溯因推理經常意指「最佳」或「最合適」的解釋 (Josephson & Josephson, 1994)。Peirce (1960) 則認為溯因推理一詞在使用上有兩個意涵：一種猜測 (guessing) 的邏輯推論，以及一種逆向演繹推理 (reverse deduction)。Pedemonte (2007) 則採用後者的觀點，認為如果給定結論，學生使用一個或一些定理為依據，來回推「給定的已知是否可以」應用這個或這些定理以推得結論，這樣的步驟就稱為溯因步驟。Magnani (2001) 也提到類似的說法，並認為溯因推理在科學原理發現過程有其重要性。本研究大致採用這樣的觀點，將溯因推論視為從結果 (結論、斷言) 來追溯原因 (條件資料、前提) 的推論過程，亦即從觀察或結論與某些依據來生成假設 (以解釋這些觀察或結論)。本研究相信溯因推論的過程經常是學生進行證明或論證時，策略選擇的採用重要來源。舉例來說，想證明某一個三角形內的兩個角相等 (求證)，學生可能首先想到的策略或定理是「等腰三角形兩底角相等的性質」(依據)，因而回溯已知條件中是否有相關資料來取得支持，此時便使用了溯因推論的過程。不難看出，在方法上溯因推論更像是一種解析法，而解析法正是要形成數學證明的主要使用策略之一。

若將焦點放在探索活動，更為多元的推論形式就會出現，其中「轉化推理 (transformational reasoning)」就是當中的一個常見形式。轉化推理一詞來最早是由 Simon (1996, p. 201) 所提出，係指「一種透過對一個或多個物件進行操作所產生的心理或生理機制，這個機制可以讓人們將操作這些物件所發生的現象與結果與操作所蘊含的概念或內容產生聯繫，進而發生轉化現象」。舉例來說，學生透過對於摺紙的操作，將紙張操作的結果與幾何概念內容產生聯繫，如對折一個線段所產生的折線轉化為中垂線或中點，對摺一個角產生的折線轉化為角平分線等相關性質。若以此機制進行推論，本研究即視為一種轉化推理，而這個推理路徑也可能雙向的，且本研究認為在探索活動中轉化推理是學生很重要的推論形式之一。

Garnham 與 Oakhill (1994) 提出了另一個常見於探索活動的推論形式，稱為「日常推理 (everyday reasoning)」。顧名思義，日常推理是人們在實際生活情境上會使用的推論形式，如肚子痛可能是因為吃壞肚子，有人發燒就被認為是感冒了、嬰兒哭了是因為肚子餓了等等。Garnham 與 Oakhill 認為此推論形式使用的物件是取自於人們生活周遭的熟悉物，因此適合用來作為人們心理操作模型的分析。由於日常推理主要也來自生活經驗，實作與所聞所見則是經驗的主要來

源，因此「實作檢驗」、「眼見為憑」、「經驗法則」等就成了人們推論的依據與方式。由於數學探索活動經常結合生活物件或題材，因此學生可能自發性的加入某些生活經驗但題目沒有給定的條件並進行推論，如「1 片披薩」學生會認為就是「八分之一個披薩」，因此 16 片披薩是兩個完整的披薩；又如「四邊形紙板」學生經常會自動設定成長方形或正方形紙板進行推論等。

其他圖 1 所列常見於探索活動的推論形式還有「類比推理」，這也是數學教學常見的推論方式，例如懸掛一個三角形紙板的頂點其鉛垂線會將三角形分成兩個等面積的三角形，因而類比認為懸掛四邊形也會有相同性質就是一個類比的例子。另外，「直觀推理」也是一種在數學教育上用來解釋和預測學生推理的方法，Tirosh 與 Stavy（1999）則針對直觀推理提出兩種學生常用的直觀法則，包含 More A - More B 和 Same A - Same B 兩類，例如學生認為「兩個等面積（性質 A）的多邊形也會等周長（性質 B）」就屬於後者。不過，本研究所稱的直觀推論並不限定在 Tirosh 與 Stavy 所規範的直觀法則中，而是學生根據感官、知覺直接反映出的斷言，亦即支撐斷言的理由並沒有透過資料推論而來，如「看起來是一個矩形」、「中點連線可以看出切成四個全等的三角形」等。

簡而言之，當學生試圖建構意義之間的蘊含關係時，豐富的推論類型與多面向的探究方式會自然的浮現，因此界定各種不同推理形式對我們分析學生表現是有幫助的。學生為了確保探索過程順利的進行，他們經常需要確認自己所得到的東西是正確的（self-justification），有時他們也必須要運用社群核證（social-justification）更進一步提供令人信服的證據來解釋他們的臆測或斷言，此時已經進到了論證的區段。不同於探索區段證據是以建構「個人意義」為主，在論證區段學生還必須考慮如何形塑並分享適當的「共同意義」。從個人意義到共同意義的轉變是數學論證重要的推理特性，也是走向演繹推論與形式符號的重要關鍵，而這是一個漫長的過程，非一蹴可及，因此 Hsieh 等人（2012）在他們的 EP-spectrum 中依照學生不同的成熟度展現又將之分成非形式解釋與核證式論證，而這樣的現象在我們的教學試驗當中也確實展現。例如，當學生被要求對其他人解釋他們的原因時，他們確實有脫離非形式解釋而利用符號表徵進行記錄與溝通的傾向，但因本研究聚焦在推論形式上因此不再加以區別這兩類。

參、研究過程與方法

一、研究設計

將探索活動融入證明教學是重要的（MacPherson, 1985; Mariotti, 2000）。在臺灣的中學數學教科書中，探索活動也經常在幾何概念與性質的教學上扮演重要的角色。實際上，一份有 1034 位隨機抽樣的臺灣中學生所共同參與的研究調查發現，超過八成的中學生認為一個理想數學教師應該提供讓學生探索或動手做的活動讓學生欣賞數學（謝豐瑞、唐書志、宋玉如、王婷瑩，

2008)。這些事實都表明探索性的教學方法應該是可行的。

二、教學實驗與研究參與對象

為了調查學生如何理解以及如何做數學證明，本研究設計了一系列的探索活動，並在實際的課堂教學中使用。因為在臺灣的數學課堂中，一般證明的教學活動不會包含「EP 簡譜」上的每一個活動，因此本研究將整個系列教學視為一個教學實驗。實驗教學是使用探索方法進行證明和推理，教學主題是「證明連接任意四邊形各邊中點所得到的四邊形為平行四邊形」。實施對象採方便取樣，選取臺北市某國中的一個普通班 35 名九年級學生。該國中的整體學習表現在臺北市位於平均值左右，而實驗對象的班級在該校學習成就平均表現則是中間偏弱，學習落後的學生稍多於同學其他班，但由於是常態編班所以班上仍有三、四位程度很好的學生。

這個教學實驗的目的是檢驗學生在帶有探索和論證活動的證明學習活動中，所展現的推論形式的真實現象。進行教學實驗的時間在九年級上學期第一章相似形單元教完後，參與的學生還沒有正式於課堂中介紹「證明」這個概念，有關證明概念則在實驗時間點後三個月才正式介紹，因此也能排除補習的因素。然而，學生已經在數學課中看過他們的老師在口語上使用證明一詞，也看過教師以嚴謹的步驟來解決幾何的證明，舉例來說，實驗班級的學生在八年級就先學過三角形、全等、平行線、四邊形、平行四邊形等相關知識，諸如此類的幾何活動學生從八年級下學期開始約已經有四個月的學習經驗因此學生對於「證明」是有經驗的，然而，在這之前所使用的用語並不是「證明」，取而代之的是「說明」、「試著說說看」、「你的理由是什麼」這樣的語言，因此也不是正式介紹嚴謹的數學證明形式。

本教學實驗所取材的數學內容來自學生使用的課本，這個新的幾何命題對於大多數的學生是一個新的內容，所有的學生都被要求在學這個證明之前先經歷一個特別的探索與論證性質的活動。主要證明活動學習內容如圖 2：

已知：如右圖，四邊形 $ABCD$ 中， E 、 F 、 G 、 H 分別為 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{DA} 上的中點。
求證：四邊形 $EFGH$ 為平行四邊形。

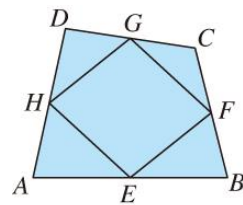


圖 2 主要證明活動學習內容

在我們的教學實驗中，這個教學活動分成三天（共四堂課）進行，總計約 150 分鐘。這樣的時間遠大於一般課堂一個證明題教學的時間。實驗教學會經歷 EP 簡譜中的每一個活動，尤其

在每一個活動中強調學生動手探索。下一節我們會詳述活動流程。

三、探索活動、研究工具

本研究的教學實驗設計架構如下。首先我們將上述的主要證明活動學習內容分成三個部分。

第一部分：連接線段 \overline{AC} ，說明 $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$ 且 $\overline{EF} = \frac{1}{2} \overline{AC}$ ；

第二部分：同理，說明 $\overline{GH} \parallel \overline{AC}$ 且 $\overline{GH} = \frac{1}{2} \overline{AC}$ ；

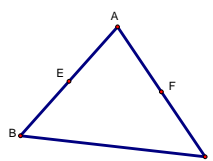
第三部分：運用上述兩部分的結果，以及平行四邊形判別性質，得到四邊形 $EFGH$ 為平行四邊形的結論。

本研究設計四個教學活動來完成上述的三個部分，教學活動是透過三份學習單呈現（每天使用一份學習單）。所有的活動描述、使用的教學任務與該活動的屬性描述如表 1。

表 1

教學實驗的活動任務與活動屬性

活動序	活動任務	活動屬性
活動1：	本活動設計主要透過摺紙進行實際的探索操作與論證思考，具體任務如下：	
1(a)	請學生任意畫一個三角形並剪下來，並使用摺紙找出其中兩邊的中點。	探索；
1(b)	摺出兩個中點的連線段，觀察這一條連線段，並寫出想到的任何性質。	論證。
1(c)	請學生利用摺紙設計一套方法，來說明上面寫的性質是對的。（最後學生必須交回摺紙。）	
活動2：	本活動設計主要是提供論證的經驗，具體任務如下：	
2(a)	老師提供一個畫有三角形 $\triangle ABD$ （如右圖）的紙張，其中兩邊的中點點 E 和點 F 。請學生在老師發的紙上， $\triangle ABD$ 外任取一 C 點，然後自己用筆連出一個四邊形 $ABCD$ 。	探索； 論證。
2(b)	請學生找出 \overline{BC} 和 \overline{CD} 的中點 G 、 H ，並連結 \overline{GH} 。並請學生在此圖形上連出 \overline{EF} 。接著讓學生觀察這些圖形後，自己寫出想到或發現了什麼？並請學生寫下要怎麼跟別人解釋他們的發現是正確的。	
2(c)	比較自己和周圍同學手上圖形的 \overline{EF} 和 \overline{GH} ，並寫下他們的發現。	



（續下頁）

表 1 (續)

活動序	活動任務	活動屬性
活動3：	本活動則正式切入主要學習內容。具體任務如下：	
	3(a) 任意畫出一個四邊形並將它剪下來，用筆標出四邊中點。接著將上面這個四邊形與其他同學交換。	探索； 論證。
	3(b) 請同學觀察至少兩個同學手上的圖形，寫出想到或發現了什麼？接著跟同學說一說他們的發現。	
	3(c) 老師提供一個情境：「有同學嘗試將幾個中點連結起來」。如果你也這麼做，你會發現什麼？請學生寫下他們的發現。並請學生寫下要怎麼跟別人解釋他們的發現是正確的。	
活動4：	本活動主要是進入賞析這個證明。具體任務如下：	探索；
	4(a) 請學生閱讀[圖2]的學習內容（先不回答）。請學生回憶並寫下當四邊形 $EFGH$ 具有哪些條件時，可以立刻被判定為平行四邊形。	論證； 證明。
	4(b) 請同學試寫一個心目中說明為什麼[圖2]中四邊形 $EFGH$ 是平行四邊形的「證明」。	

四、資料收集

本研究資料的收集除了三份根據教學活動所設計的學習單外，也包含所有課堂的那些操作摺紙與圖形；此外本研究也對所有三天的課堂活動（共計四節課）進行完整錄影，錄影主要是紀錄教師教學與學生反應所使用的語言與行為，以輔助紙本資料。教學所使用的學習單主要是以活動任務說明與開放性問題的形式呈現，所有學習單的內容完全根據表 1 所述來設計，包含活動引導語、學生思考問題與作答區、一些相關進階問題等，而學習單設計也會依據實際上課的學生情況於下一堂課前進行調整。而為了確保學習單的效度，本研究透過焦點團體（包含一位在職教師與兩位數學教育專家）進行表面效度檢核。有關學習單的使用，我們請合作教師在教學實驗的課程中要求學生記錄他們的觀察與想法，學生可以使用或選擇任何他們想要使用的表達方式，甚至包含把摺紙結果直接貼在學習單上。

在實際執行上，前三個活動的探索活動中，本研究合作老師並未主動介入或限制學生活動問題的結論，完全由學生自己觀察，再透過學生相互討論讓彼此觀察的結果，直到活動 4(b) 時，本研究特別設計在學生無法完成證明時，教師會依序給予一～三個提示後再分別調查他們是否可以完成問題。

五、資料分析

在資料處理上，本研究採取的分析方式是依據 Patton (2002) 建議之「內容分析」、「歸納分析」等發現導向的質性分析方法。由於學生都是一個單一個體，本研究盡可能尊重並嚴肅看待每一個學生的想法；另一方面，使用微觀視角分析個別學生的想法也能降低了分析的複雜性，因此更容易顯示每個學生的邏輯結構或推論形式。然而，本研究並非是一個個案研究，而是試圖將整體學生視為一個分析單位 (analysis unit)。因此本研究依學生在課堂上學習單上反應的描述資料，進行主要組型之確認和分類。

在形成組型的實際作法上，由兩位研究者分別整理學生在活動操作與記錄，將參與學生的反應進行分類，最後相互檢視類型的合適性以作為分析者的三角校正，若遇到歸類無法一致者則經小組討論後歸入其中一類；若學生展現多種的推論類型則經小組確認後歸入當中較為主要的類別，若無法決定其主要類別，則會分別統計。

由於本研究聚焦在推論形式類型，在組型分析之初我們先以理論架構中所提之各類推論形式作為歸類的參考，初始包含演繹、溯因、歸納、類比、直觀、轉化與日常推理等，但學生實際表現出的形式十分多元，因此隨著實際檢視學生的回答後也產生了新的組型，例如在活動 2 中，我們發現學生透過不同點 C 的選取操作後，得出一個平行的不變性的斷言，此則運用了歸納推理。但研究同時也發現有些學生僅透過一個特殊圖形（如等腰三角形）便進行通例性質的推論，此種推論儘管可視為特殊的歸納推論，但研究仍將之區分，將這種以特例進行歸納之推論形式命名為「特例推論」。

此外，研究也會因應學生實際的展現，細分原有之推論形式以更貼合學生表現。舉例來說，進行組型分析時，發現同樣使用演繹推論來進行論證的學生，有學生已經直接使用形式符號進行演繹推論，所依條件也都是題目提供或已經證實的，研究將之歸類於「符號演繹」。然而，有學生儘管仍進行的是演繹推論，但卻藉由口語、文字、簡易圖形或符號進行演繹推論，當中也使用了未經證實的條件，如學生 S28 在任務 1(c)時紀錄：「(1) 將底角往內折，把底邊對齊底邊。

(2) 而線段 $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC}$ 。(3) $\therefore \overline{EF} = \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CD} \dots$ 」(參見圖 7)，這類學生未使用符號表徵且未達到形式證明要求的嚴謹程度，我們將之區分出來並命名為「口語演繹」。

在組型分析時，我們發現學生在探索階段會將實作摺紙所得到的摺痕、形體當成依據直接進行論證，如摺中點連線摺痕或是將三角形摺成長方形就宣稱對邊相等，諸如此類直接採用實作所得但沒有進一步驗證，我們會歸為「實作檢驗」，這也是一種眼見為憑的推論模式。另一種也是眼見為憑卻更直接根據感官、知覺直接反映出的斷言，如學生反映「看起來是一個矩形」、「中點連線可以看出切成四個全等的三角形」，卻沒有任何輔助的證據等，我們都歸為直觀推論。

值得一提的是，由於本研究設計非以量化研究為主，因此分析學生在各活動邏輯結構的類

型統計僅是參考，報導上仍是以是否有學生展現類型並佐證為論述依據。錄影資料則是在對於我們分析的詮釋有疑義時，轉而觀察影片資料，以確認教師與學生當時所使用的語言與無法實際記錄於紙本的行為表現，以輔助紙本資料。

肆、結果與討論

一、學生在探索與論證區段上展現多樣的推論形式，但論證區段不使用歸納法

本研究之教學實驗是從探索和操作活動開始，學生一開始並不知道這是一個數學證明的學習。在教學實驗的活動 1 和活動 2 中，除了一些正確使用演繹推理的學生外，本研究在學生學習單上也觀察到許多不同類型的推論形式。而在演繹推理上，展現的表徵方式與嚴謹程度也不相同。

表 2、表 3 為活動 1(c)和活動 2(b)學生展現的推論類型統計，表中學生形成之推論形式類別和編碼可參閱資料分析一節。從表 2 可以看出學生無法回答或回答不具實際意義的比例很高，可能是因為學生平時的數學課不常有動手探索與提出解釋的機會，因此突然請學生自己利用摺紙設計一套方法來說明自己提出的性質時，出現空白或使用不具實際意義的抽象說明的人很多，但從表 3 也可以發現，一旦有這個經驗後空白或不具實際意義的說明比例降低了許多。

表 2

任務1(c)展現的推論類型

推論形式 ^a	口語演繹	符號演繹	直觀	特例	實作	空泛 ^b	空白	合計
人數	4	4	3	2	4	7	8	35
%	11.4	11.4	8.6	5.7	11.4	20.0	22.9	100.0

註：^a歸類依據請參考「資料分析」一節。^b不具實際意義的說明。

表 3

任務2(b)向他人解釋自己發現時展現的推論類型

推論形式 ^a	口語演繹	符號演繹	直觀	特例	實作	空泛 ^b	空白	合計
人數	11	5	5	0	7	3	4	35
%	31.4	14.3	14.3	0	20.0	8.6	11.4	100.0

註：^a歸類依據請參考「資料分析」一節。^b不具實際意義的說明。

雖然空白或空泛回答的比例不少，仍可以看出在活動 1、活動 2 中探索與論證階段學生確實會展現多樣的推論形式。例如在活動 1 之任務 1(b) (c)的探索活動與論證，我們發現有學生使用尋找特例來解釋他們的發現，例如，學生 S26 選擇等腰三角形作為例子來探索，並將結果擴展到一般三角形。也有學生提供摺紙的實作當成證據，摺紙的作品上有許多摺痕，可以知道學

生試著透過摺紙解決問題，但並未輔以文字加以說明。

值得一提的是，研究進一步發現在 2(b)「在跟別人解釋他們的發現時…」轉而使用演繹推理（尤其是口語演繹）的人數明顯增加。本研究檢視兩個活動之間的教學影帶發現，在活動一之後，教師曾針對三角形兩邊中點連線性質的證明進行教學，我們認為該教學對於學生向他人解釋自己發現時所用的方法產生了影響，使得更多學生會傾向使用演繹方法來說明，這或許也能解釋表 3 中這兩類推論的比例增加了。

此外，在我們的教學實驗中也發現了許多其他類型的非正式推理。在任務 3(c)的「連接四邊中點所形成圖形」探索活動中，一些學生通過直觀得出結論，例如學生 S29 就說：「看起來是一個矩形」，原因就是 he 從自己所畫的鳶形（特例四邊形）直接經由視覺得出。我們也發現確實有一些學生在這個探索區段使用實作來支持自己的結論，例如學生 S29 在任務 2(b)時直接表示「用尺量一量後加起來」，這用的是實際生活經驗的實踐驗證方式。

本研究也發現，就算是進入說服他人的「社會核證階段」，學生在論證上也會使用非演繹形式的推論。例如學生 S24 在 3(c)任務中向他人解釋所得是平行四邊形時，他使用的方式是：「直接把這個圖給他（她）看」，亦即該生認為透過把「操作結果」展示給他人看也是一種證明，這是一種「眼見為憑」的日常推理模式。同樣的，學生 S29 在任務 2(b)時向別人解釋為何三角形兩邊中點連線長會第三邊的一半時，他就表示「①量同位角的角度；②拿尺量！（實際證明）」；在 3(c)任務時這位學生則寫道：「（連接四邊中點）出現了四邊形了！看起來像長方形。」向他人解釋所得為何是長方形時他就表示：「拿尺量和量角器，數數看幾個邊」，皆表明了這種用實際測量數據來支撐所得結論的證明方式，也被學生作為一種說服他人的核證方法。

實際考察學生學習單，本研究另也發現許多學生會透過摺紙活動直接將紙張操作的過程與結果直接轉化為幾何概念內容，將摺紙所形成最後圖形或形成的摺痕作為數學斷言、事實或補助線來源的依據，也就是 Simon（1996）所述的「轉化推理」。這樣的推論形式在探索區段與論證區段都有出現。例如，學生 S21 在任務 3(c)連接四邊中點時，透過觀察得到許多全等三角形的組合，如圖 3 所示。該生在解釋所得結果時，直接透過圖形的拼貼轉化成三角形全等的概念，也以此作為論證的依據。又如，學生 S34 在解釋兩邊中點連線長度是第三邊長的一半時，該生直接將三角形摺成長方形（學生作法可參見圖 4）並將該摺法之簡要步驟與圖形記錄於學習單上，從其論述中可以看出該生將這樣的表達直接作為解釋內容主體，而不只是輔助的角色。這些實例都揭示轉化思維仍存在於學生論證區段，以及學生在社會核證階段自然展現的說理形式仍十分多樣性。

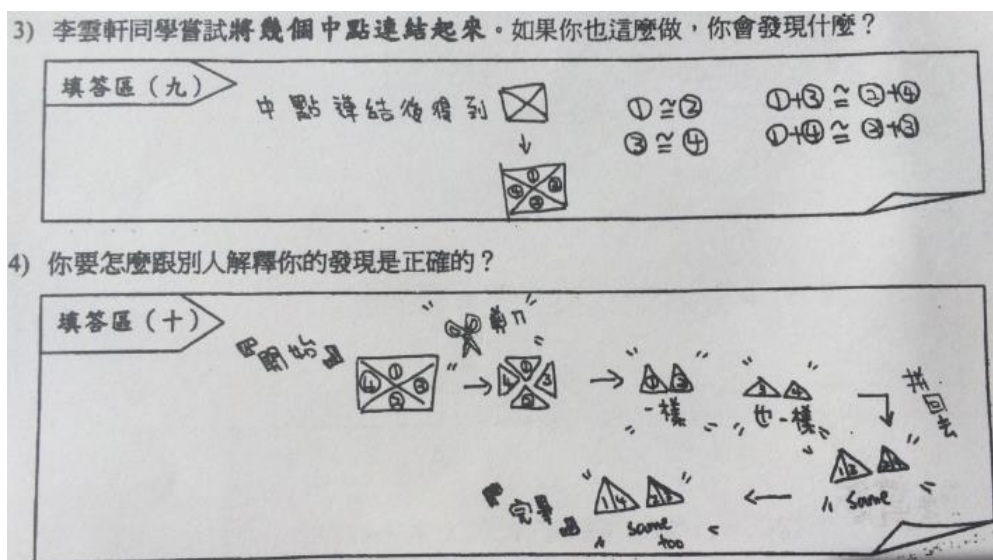


圖 3 學生 S21 在任務 3(c)的作答紀錄

研究也發現，即便在論證區段時學生看似進行演繹推論，背後意涵也未必如此。例如，在 3(c)跟他人解釋四邊形中點連線中所形成圖形的任務中，學生 S15 從所操作的圖形中認為：「它是平行四邊形，因為連起來有四個邊」；或如 S34 認為四邊形是矩形，因為對邊平行而且鄰邊不相等（學生實際作法參見圖 4）。這些推論並不具備演繹推論的有效性，也無法被視為數學證明，儘管如此，就「論證形式」而言確實屬於演繹方法。這樣的現象也顯示，即便學生的紀錄形式像是以演繹推論方式呈現，可能學生在論證、探索中使用的仍是非演繹推論的方法。

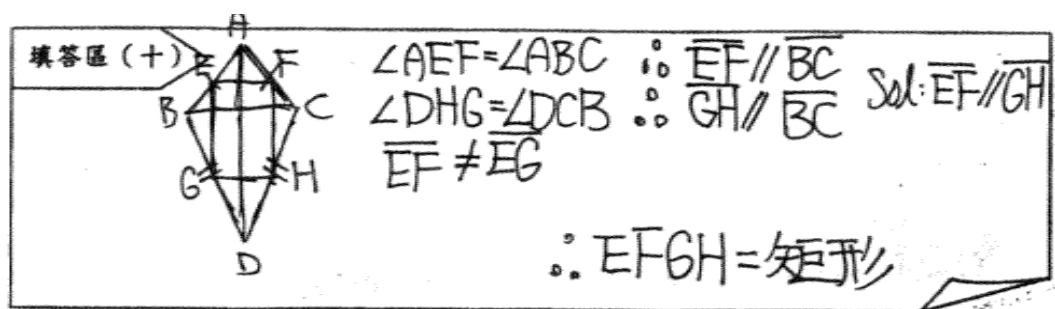


圖 4 學生 S34 在任務 3(c)的作答紀錄

然而，進一步思考學生 S34 完整的論證過程，他是先透過自己所畫的圖形先得到中點連線四邊形 EFGH 為長方形的結論，再回溯尋支持是長方形的證據與條件，而不是從既有的條件中透過推論的方式得到是長方形，就論證形式來說，學生更像是進行溯因推理，此被 Pedemonte (2007) 歸為論證推理之一，意指學生所提之支持理由並不能直接從已知的資料中得到，這樣的推論方式與學生使用未經證實的定理性質進行推論應有所區別。例如在任務 2(b)中，S5 想要

像他人解釋為什麼「 $\overline{EF} = \overline{BD} = \overline{GH}$ 」時，他的理由是：「畫一條直線垂直三條線」；同一個問題 S6 提出的解釋是：「因為同為角相同」。這些學生用以支持結論的理由都無法直接從資料取得。

事實上，在活動中任務 1(c)涉及的三角形中線性質（連結 \overline{AC} ，求證 $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$ 且 $\overline{EF} = \frac{1}{2} \overline{AC}$ ）是這個班級學生事先學過的內容。研究發現，任務 1(c)老師是請學生設計一套摺紙操作來形成他們自己的結論並加以說明，儘管幾乎每個學生都能透過摺紙操作來進行觀察，但超過三分之一的學生並沒有依照任務要求在解釋性質時將操作方式紀錄下來，而是直接提供形式的證明方式。這說明了學生可能不知如何將非形式的作法加以記錄，或是他們無法將已經形式化的證明轉為操作活動；前者可能的原因之一是因為學生在課堂上有很少實際操作的經驗並展現他們的發現，以致他們並不知道如何表達非形式的推論操作，而後者則表明了演繹推論涉及與探索或論證不同的能力，不一定能相互取代。這樣的現象也顯示，學生在探索或論證活動中所使用的驗證方式，並不一定能和證明所使用的演繹法相互轉換，換言之，EP 簡譜的證明發展不一定能逆向進行，教學上也不能寄望學生能跳過探索階段直接學習數學證明，待學會數學證明後能將論證或探索的推論自行補上。

另一有趣的現象是，在活動 2(c)、活動 3(c)中探索任務，很多學生透過和同學交換圖形並透過觀察多個例子後，以歸納的方式形成臆測或得到結論，但這一群學生卻沒有人使用歸納推論的方式作為說服其他人的依據，亦即沒有展現類似於「因為觀察的圖形都是（有）…，所以認為…」這樣的論述。這也意味著，就學生而言，歸納推論是一種探索的方式，但說並不是一個向人說理的方式。這也告訴我們，Pedemonte（2007）所述的論證推理的三種推論形式受試學生並沒有出現歸納推理，但會使用轉化推理。

二、探索與論證活動會增進學生表徵的辨識與連結

在我們的教學實驗中，探索除了可以視為是學生的一種心理活動，也是一種促進學生心理運作與外界環境互動的活動。例如，在任務 1(b)中，學生被要求寫下「觀察給定三角形中的兩邊中點連線的發現」，35 位同學只有 2 人（5.7%）沒有任何想法以致無法寫下任何的觀察結果，該班的數學老師就表示以該班的數學表現，這樣的現象是很令人印象深刻的事，這也意味著大多數的學生都能透過特定表徵上的探索活動（如摺紙），回憶或擷取某些已經學過的事，該師也相信如果以形式符號表達原問題，是不會得到這樣好的回應。

此外，研究也發現探索活動能提供檢測學生知識或意義網絡的環境，亦即學生在探索活動的環境下許多概念或關係的連結鍵反而容易浮現。例如實驗班學生在之前學到「三角形兩邊中點連線」的性質時，當時並沒有與相似三角形有所關連，然而在本教學實驗的任務 1(b)中讓學生觀察這個性質時，僅有 42.9%（15 人）提到連線段與第三邊平行或長度為一半的關係，卻有

超過一半的學生 (51.4%) 提到三角形的相似性質，特別是「AA 相似性質」。儘管可能是因為三角形相似性質是學生剛剛學過不久的數學內容，但三角形兩邊中點連線的性質與 AA 相似性質並沒有直接關連，即便是有也應與 SAS 相似性質關連才是，本研究認為是因為在這個探索活動中學生確實在操作過程中受到視覺效果影響，把兩個不同學習單元的內容連結起來，此也直接影響部分學生在長度為一半關係之論證上，直接使用三角形相似性質，這應是操作活動帶給學生的刺激所造成。

本研究進一步比較兩組學生之間的差異，發現那些提到三角形相似性質的學生看到的是整個圖形，而另一組看到三角形中點連線性質的學生看到的是圖形組成元素。本研究認為而在數學證明的學習過程中，理解元素之間的關係有助於論證能力的發展，此也意味著，看到三角形相似性質的學生由於是關注於整個圖形而非圖形組成元素，因此在證明學習上將比看到三角形中點連線性質的學生更困難，而這樣的結果也符合 van Hiele 提出的幾何思考層次模型。

研究也發現，那些在任務 1(b) 提到中點連線與底邊平行或長度為一半的 15 名學生中，有 4 名學生在任務 1(c) 中提供了使用摺紙的完整論據。如 S36 為例，該生證明三角形中點連線 \overline{DE} 長是第三邊 \overline{AC} 長的一半時 (見圖 5)，他沿著 \overline{EF} 將上方小三角形頂點 B 往下摺到 \overline{AC} 上，此圖形自然形成四個三角形，而這個作法確實提供了輔助線的建構洞察，以及一個可發展成為證明的方式。這個方式除了認為能讓他們掌握到組成元件之間的關係，也可以讓證明的組件真實化以提供學生適當的內在連結，我們相信若學生沒有透過操作而進繪製 \overline{DE} ，是很難進行連結的。另一方面，在 18 個觀察到相似性的學生中，雖然也有 4 名學生使用摺紙支持他們相似形的觀察，但沒有一個成功地透過摺紙證明他們的論點。以 S21 為例，見圖 6，可以看出他的操作並不能支持他兩三角形相似的發現，也很難發展成一個證明。這個現象也提供我們一個重要的線索關於學生證明能力發展的檢測，當學生在操作活動中能達到對於元素之間關係的理解，會更能掌握數學證明的學習，而這樣的結果同樣也可以從 van Hiele 提出的幾何思考層次模型加以解釋。

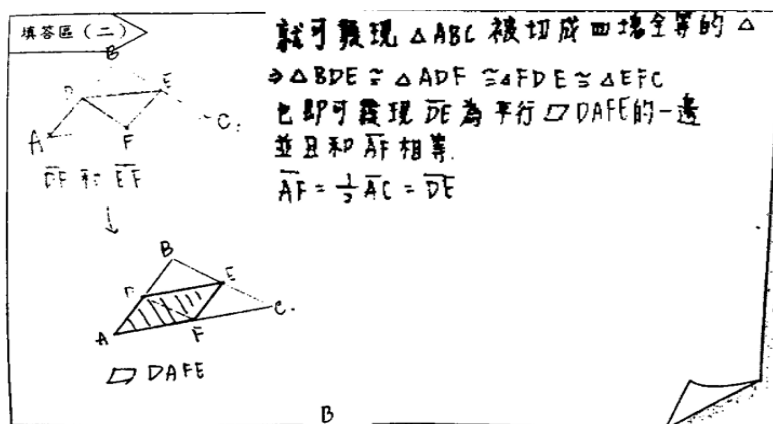


圖 5 學生 S36 在任務 1(c) 的作答紀錄

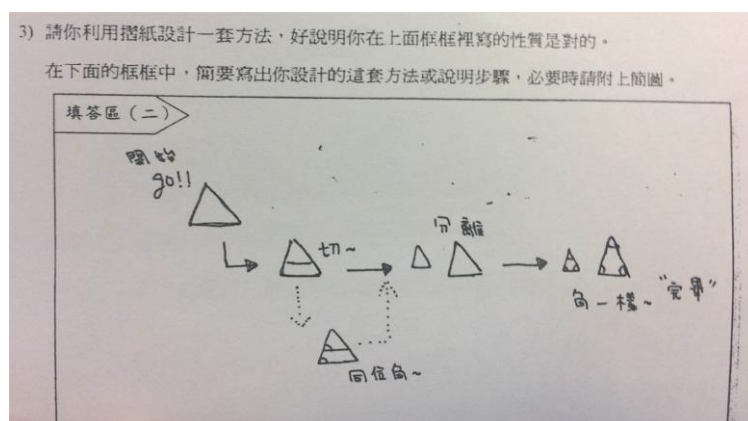


圖 6 學生 S21 在任務 1(c)中使用摺紙論述 AA 相似性質

三、學生動手做後的推理反應有可能正向協助演繹形式，但並非都是

如第一小節所述，在「EP 簡譜」的探索區段，我們可以看到以核證為目的所提供連結鏈的推論類型十分多樣，有些類型並不具有演繹或因果關係。事實上，對數學物件之間的演繹或因果關係的缺乏意識，是學生在任何操作活動初始階段常見的現象。將原本沒有關連的兩個元件連接在一起是學生在幾何論證的困難點，而透過實體物件的操作或許可以提供這樣的連接經驗。

在我們的教學實驗中，當學生在任務 1(c)中被要求設計一套操作方法核證這個已經學過的性質時，有 48.6% (17 人) 提供了較為完整的論述，但如「結果一」所述，這些學生當中大多數人並非提供摺紙操作的驗證方法，仍是直接使用形式紀錄，可見操作與解釋的方式不一致，但那些提供摺紙設計以進行驗證的同學，當他們試圖透過摺紙將線段搬移或進行比較時，可以將原本沒有關連的物件加以連接。例如學生 S28 證明三角形中點連線 EF 長是第三邊 AD 長的一半時（其作法與說明請參見圖 7），可以看出他通過手動操作這樣的外在動作，完成了連接兩個「遙遠」對象的心理內在動作，並建立一個有意義的核證或因果結構。這個有意義的核證或因果結構有機會可以被發展成為一個數學證明，而這個證明是學生自己所建構出來的，自然更為穩固。

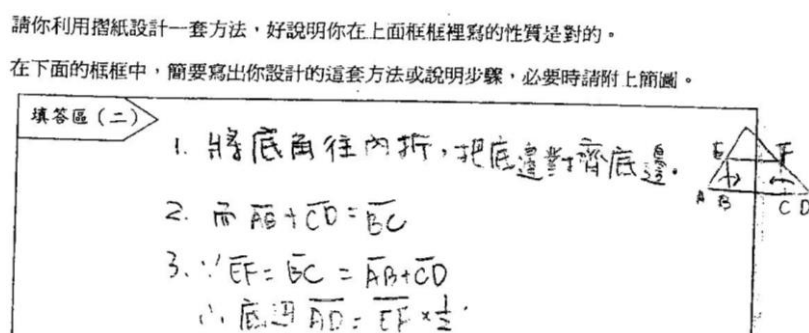


圖 7 學生 S28 在任務 1(c)的作答紀錄

在進一步的觀察中，我們發現儘管許多學生的說明是非形式的表達方式，但粗略的核證或證明架構可能已經開始萌芽，數學概念與關係的連接鍵確實可以通過探索和論證加以重組。例如，學生 S36 在任務 3(b)中發現「四邊形 $EFGH$ 是平行四邊形」，她在任務 3(c)的非形式解釋（參見圖 8）中已具備演繹推理結構。若相比這位學生（S36）在任務 1(c)所使用的推論形式（參見圖 5），可以看出其演繹推理結構更顯得清晰，甚至可以看出離正式演繹證明只有一步之遙。

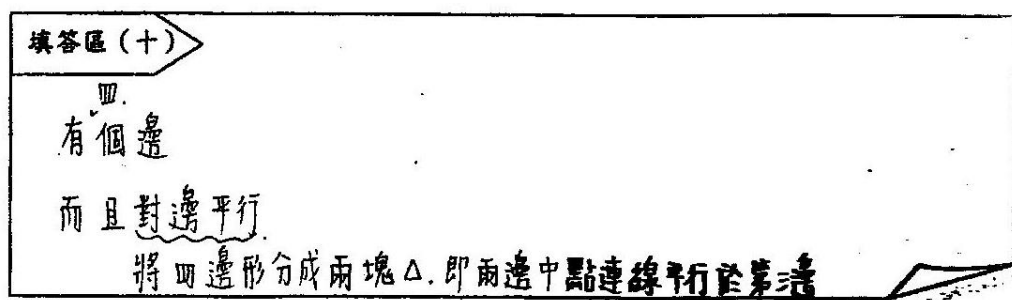


圖 8 學生 S36 在任務 3(c)的紀錄

然而，研究也顯示動手操作後的推理反應並非都能正向協助演繹形式。研究發現學生在任務 3(b)的探索活動後向別人解釋觀察時（任務 3(c)），只有約一成的學生會使用演繹推論（詳見表 4）。有 22.9%（8 人）的學生則是訴諸定義或簡單屬性，如直接說「有一對平行的邊且等長」所以平行四邊形，但對於為什麼平行、等長就不再加以陳述，其他 17.1%（6 人）的觀察則停在更簡單的組成，例如，四邊中點連線是一個四邊形，因為「它有四個邊」。在這些推論方式中，使用演繹、溯因、轉化、定義或一般元件等方式都是經過「解析」的方式來進行核證，而不是直接透過直觀。但也有學生反而受到操作活動的影響，使用了無效的推論，如其中 4 人使用訴諸視覺感官的日常推理（如給他看圖、看起來像是…）、有 6 人使用不具實際意義的抽象語言當成說明（如「實際操作」、「言語說不盡」等）。

表 4

任務3(c)展現的推論類型

推論形式	演繹 ^a	轉化 ^b	定義	元件 ^c	日常 ^d	空泛 ^e	空白	合計
人數	4	1	8	6	4	6	6	35
%	11.4	2.9	22.9	17.1	11.4	17.1	17.1	100.0

註：^a包含形式演繹，以及使用未經證實的條件進行演繹。^b是指直接透過圖形的拼貼轉化成論證依據。

^c更簡單的組成元件，如有四的邊。^d是指訴諸視覺觀察，如給他看圖、用尺量等眼見為憑的日常推理。^e使用不具實際意義的抽象說明，如實際操作、言語說不盡。

研究同樣也發現有一些學生使用了特例歸納方式作為連結橋樑，他們從一些特例的觀察獲得了一般性結論，其中不自覺地使用了這些特例所賦予的額外性質達到他們心中的「正確結論」。例如，S34 在任務 3(c) 中畫出一個類似鳶形的四邊形 $ABCD$ ，並以此圖作為探究起點，因此觀察得到四邊形 $EFGH$ 為長方形的結論，從他的解釋中可以發現將四個角為直角是他額外增加的條件（參見圖 4），這種特例進行歸納推論的確實是學生在探索中會使用的方法。由於在課堂探索活動經常只能操作少數的例子，因此學生並不總是能夠掌握教師預期傳遞的一般化信息（例如繪製一個「任意的四邊形」）。此所可能產生的另一種情況是，學生將看到的現象視為已知或假設條件，而沒有進行確認，本研究也認為此結果對於學生學習證明會產生阻礙，可能會發生學生無法判斷哪一個性質是可用的、哪一個又需要驗證，因此產生這種直接使用「未經過證實的條件」進行演繹推論的形式。例如，S21 在任務 3(c) 中（參閱圖 3），學生從操作中得到四個三角形兩兩為全等三角形，並且使用圖形的拼貼直接轉化成證據；相同的情況也發生在 S36 的 1(c)（參閱圖 5）中，學生從摺紙中直接觀察出四個三角形全等就開始進行推論。

我們的研究也發現，學生在操作活動後得到一個從數學上看是正確的結論，但在解釋時卻採用錯誤的論證來支持這個結論。例如，學生 S29 在任務 1(c) 中想要使用摺紙來解釋三角形兩邊中點連線和底邊平行，他提到：「將連線往下摺與底邊重疊便可知道是否平行」（如圖 9 所示），這並不是一個在演繹推論上有效的驗證方法。又如 S34 在任務 3(c) 中（如圖 4 所示）受到自己所畫圖形影響，將四邊形 $ABCD$ 視為鳶形並得到 $EFGH$ 是一個矩形的結論，他進行的論證中除了他沒有提供論證中有關四個角為垂直的依據，從其記錄上看他是以 $\overline{EF} \neq \overline{EG}$ 作為是一個 $EFGH$ 是一個矩形的依據，這些都是在證明上無效的演繹推論。

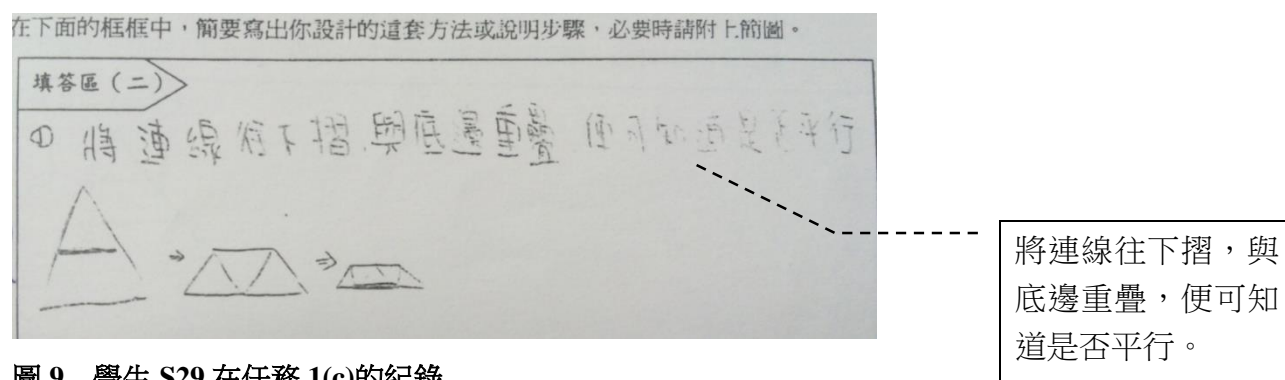


圖 9 學生 S29 在任務 1(c) 的紀錄

綜合上述，我們可以看出在學生操作過後進行論證區段，學生確實會採用非形式的表達方式，這些方式有的已經具有核證或證明架構的雛形，但仍有許多學生展現演繹推論的謬誤。這種在探索後的論證活動所產生的演繹謬誤大致可分成三種類型：（1）來自直覺或特例歸納的錯誤結論；（2）使用未經證實或錯誤條件的推論；（3）無效的推論支持正確結論。

四、邏輯結構的連續性有助於學生學習證明

從證明的邏輯結構觀點來看，演繹推理似乎被認為是最終目標。其他類型的推理，如直覺或歸納推理，在數學證明中沒有生存的空間。然而，本研究認為學生開始學習證明時，探索活動不應該被忽略，而且在探索活動中所使用的那些不同的推論形式不應只被視為學習數學證明的鷹架。不僅僅是因為學生探索中已經開始使用演繹推理，可更深化未來學習證明的能力，而其他的形式的推理也是重要的數學能力，有些甚至可以與演繹推理相互轉化。從我們的研究觀察中得知，學生即使在探索觀察階段也經常需要藉助演繹推理來解釋他們的發現和驗證他們的斷言，若不考慮數學語言和符號的使用，它們之間的邏輯結構幾乎是相同的。舉例來說，當 S36 在經過任務 3(c) 探索活動後接著解釋其「四邊形 $EFGH$ 是平行四邊形時」的發現時，他說：「有四個邊，而且對邊平行。將四邊形被分成兩塊個 Δ ，即兩邊中點連線平行於第三邊」(參見圖 8)，可以看出雖然該生的論證經過高度的濃縮與簡化，但幾乎所需的必要元件（或想法）都已經展現在論證中，也已經反映了主要的邏輯結構。

若對照 S36 在任務 1(c)、2(b) 的活動歷程紀錄，在 1(c) 時該生透過摺紙發現會形成四個全等三角形（參考圖 5），並根據觀察與全等三角形性質宣稱四邊形 $DAEF$ 為平行四邊形。儘管此時從形式證明的觀點看，直接使用操作觀察得到的論點進行推論不能確保證明的正確，且當中仍然交雜著多種論證形式，但不可否認學生在此的確也運用的平行四邊形的性質進行了演繹形式的論證（因為四邊形 $DAEF$ 為平行四邊形所以 $\overline{DE} = \overline{AF}$ ）。進一步分析該生在任務 2(b) 上（如圖 10），他已經直接使用任務 1(c) 的結論套用在新形成的 \overline{GH} 上，可以看出學生在此的論述是承接活動一的結論，雖然該生使用的並未形式化，且使用演繹形式又更為隱晦，但中點連線與底邊平行且長度為一半的結論已經十分明顯，並不是僅透過觀察而來。

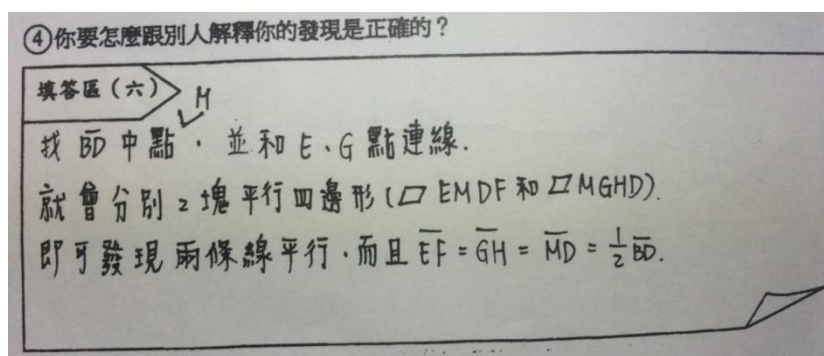


圖 10 學生 S36 在任務 2(b) 的作答紀錄

同樣的學生 S10 在任務 1(c) 觀察並驗證中點連線時，他透過摺紙得出「 $\overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{BC}$ 」的結論，而在描述他的理由時，通過操作觀察得到的四塊全等三角形、平行四邊形等論述（如圖 11）從

形式證明的觀點看並非可以直接使用的證明條件，但之後立基於此的推論卻是演繹推論。換言之，上述兩位該生經過探索活動後在論證上，已經展現了演繹推論的潛在特質，本研究將之稱為「演繹潛質 (deductive potential)」。事實上，研究也發現「在先前探索和論證任務 3(c) 中表現出演繹潛質的所有學生，全都能完成任務 4(b)「為什麼的四邊形 $EFGH$ 是平行四邊形」的證明」。這些例子都顯示了探索活動和證明之間推論形式上的連續性。本研究認為想要更平順、更有效率地進行證明教學，教師應該在每一階段都留意學生所反映出的邏輯結構連續性。

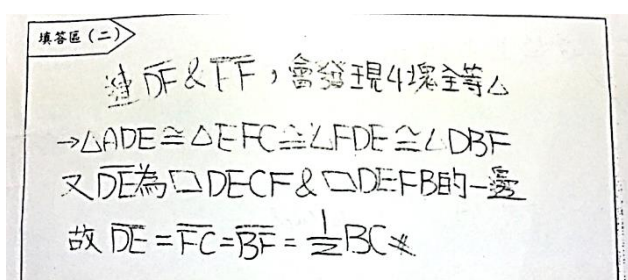


圖 11 學生 S10 在任務 1(c) 的作答紀錄

若從演繹推論所運作的對象來看，為了給出完整的數學證明，不僅需要使用演繹推論，也必須有演繹推論所運作的數學內容，也就是 Hsieh 等人 (2009) 所指涉的「主要組件」。這些內容或依據經常可以從探索中獲得。例如用直觀的洞察連結相關物件、用摺紙繪製輔助線以形成全等三角形、通過溯因論證尋求必要的資料。研究進一步分析後發現，在學生在活動 4 嘗試證明卻失敗後，當老師給予一～三個提示時，那些因而得以成功進行推論的學生似乎都與他們先前的探索或論證經驗有關。

表 5 顯示在任務 3(b) (c) 使用不同推論類型的學生，在給予不同提示下完成任務 4(b) 證明的學生分布。研究將學生分成兩個群組，群組一是在任務 3 中使用「解析」方法的學生（展現出使用定義，一般屬性進行演繹推理和溯因推理的學生，可參考前一小節），群組二是其他非群組一的學生。在給予三個提示中前兩個提示目的是請學生回憶他們在活動 3 和活動 1 的實踐經驗。從內容上看，提示二是構建輔助線的關鍵也是學生難點，而從表二中也能發現提示二確實也是影響最大的提示，特別是對那些傾向於使用解析方法來探索和論證的人，特別能夠透過探索的經驗幫助他們邁向形式證明；而沒有使用解析方法來進行任務 3(b) (c) 的人仍然有機會通過先前的探索和論證成功地建構證明，但成效沒有這麼的顯明。這些都表明當學生在探索活動所獲得經驗，同時也將其他非形式推論朝著演繹推論轉化。這也應證了本研究先前假設，幾何探索與論證活動能提供學生證明所需邏輯結構的預先經驗，學生對於證明的學習可用回想與轉化以取代重新建構。

表 5

不同推論類型的學生在給予不同提示下完成任務4(b)的學生分布

	完成人數		合計
	群組一	群組二	
未給予提示	5	4	9
提示一：轉一下圖形（參見圖 2），很像你在活動 3 看到的什麼？	1	3	4
提示二：回憶一下你在活動 1 所發現的	8	2	10
提示三：回憶一下你在活動 2 做的事情	2	0	2
合計	16	9	25

註 1：「群組一」表示在任務 3(b) (c)使用解析方法的學生；「群組二」表示其他非群組一的學生。

註 2：當天有 4 位學生缺席，6 位學生在三個提示後仍然失敗。

伍、結論與建議

一、從探索到證明的邏輯結構轉化的啟發與教學建議

如果將建構證明當作學生學習的目標，那麼培養學生使用演繹推論是必不可缺的。Hsieh 等人（2012）從認知觀點認為探索活動有助於證明的學習至少有下列四個理由：（1）可以揭示證明開始與過程所需的訊息；（2）有助理解證明過程；（3）激發臆測的一般化；和（4）核證證明的過程。由上述四點可以看出，教師若對探索活動的使用越了解，就越能做出合適的教學設計以提高證明的學習。針對學生從幾何探索活動到證明的邏輯結構建構與轉化，本研究透過教學實驗提出以下四個觀點。

觀點一、從表 1~3 中，我們發現許多學生在論證活動中，經常只會提供核證所有要求的各項主要組成部分，但沒有展現證明中所需要的推論細節，對於資料來源的交代或中間的推論的串接沒有表達清楚。因此我們建議在教學中，教師可以在操作活動時不斷地讓學生「解釋為什麼」這個理由會支持結論，讓學生有機會回填他們的推論過程，而這件事對於學生未來證明的建構或回憶是有幫助的，因為到了形式的證明區段才讓學生「解釋為什麼」有時為時已晚。教學上，老師也可以讓學生在探索後試圖取信他人的論證活動，來建構社會核證的論證概念，而不是僅僅表徵一個推論步驟。

觀點二、不同於觀點一的學生在論證中會提供所有主要組成部分而不提供推論細節，本研究也發現很多學生在論證中會憑空冒出「關鍵性質」來解釋為什麼他們的發現是對的，尤其是學生常以定義、性質作為理由，但缺乏進一步思考他們所提出的性質能不能從資料學生的已知中直接得到。例如，在活動 3 中，當學生被要求向其他人解釋為什麼四邊形的中點形成平行四邊形時，超過五分之一的學生只寫下了諸如「AA 相似」、「對邊平行且相等」；或是在證明線段相互平行時，直接提供「因為同位角相等」、「同時垂直一條線」等。學生提供的證據通常來自他

們直觀的觀察或他們所知道的事實、記憶或口訣。因此在驗證階段，他們仍然處於自我核證而非社會核證。對於這一類的學生，我們建議在教學中，教師可以經常詢問學生「溯因推論」的問題，例如：「如果結論是正確的，我們需要什麼條件？」，讓學生養成提供證據的習慣，來構建局部推理和證明的邏輯序列。

觀點三、Hsieh 等人（2009）指出臺灣數學課堂上的教學是十分緊湊的，教師通常必須快速進行證明教學，導致學生很難在學習證明的當下掌握當中的主要組件。在這個教學實驗中，老師設計了摺紙探索讓學生可以尋找證明的關鍵想法中的主要組件，而在教學實驗中，如果學生在經過探索活動後，到了證明區段卻不知道如何著手或開始，老師只需要提醒學生「想想我們在課堂上做了什麼」，那麼學生可能很容易回憶起證明的主要組件。因為對學生而言，學生親手做過更容易記憶，也更容易回憶，因此我們建議尤其對於尚未熟悉形式證明的學生，應在課堂中適時加入探索活動。

觀點四、對於數學證明而言，關注前提或依據是否為真，是一個時時得留意且重要的認知行為。問題在於學生通常對於「哪個結果他們可以直接在證明中使用？」、「哪個條件又是未經證實的命題」等感到困惑，也因此，一些學生會在證明中直接使用從探索活動所發現的結果或結論。例如，在活動 1 中，學生試圖論證三角形兩邊中點連線是底邊的一半時，通過摺紙他發現原來的三角形被分為四個小的全等三角形，並依據這個觀察結果直接執行「適當的」演繹推理。學生將他「看到的事實」或「一個特殊例」作為前提（儘管這個結果可能在數學上也是真的），在數學課堂上這些事實當下仍會被視為一個未經證實的主張，然而學生並不是總能清楚區分兩者的差別。眼見為憑、轉化推論、歸納推論等在探索中鼓勵使用的方式，在證明中卻不一定能被使用，這樣的不連續性將無可避免的造成學生學習證明的困擾。

可以看出，上述的四個觀點中，前三個觀點是再展現從探索到證明的邏輯結構的連續性，而第四觀點則表明了當中的不連續性。教學要如何從中拿捏是教師或數學教育工作者需要注意的事情。

二、結論

本研究從教學方法的觀點，將學校的證明教學視為從探索活動到形式證明的完整過程。儘管我們在探索和論證中看到很多學生展現的推論形式類型，而數學證明中只能接受演繹推理，本研究認為如果教師可以在證明的學習前，先提供學生一個探索或發現的機會與過程，讓學生可以在同一個議題先產生自己的斷言，並透過論證向他人解釋這個斷言，對於形式證明的學習是有幫助的，而這些假定也在我們的教學實驗中獲得了驗證與修正。

從我們的教學實驗中發現，即便在論證區段，學生自然展現的推論類型仍存在形式與非形式兩種不同類型，其中非形式的類型包含了如類比推理、轉化推理、直觀推理、生活推理(everyday

reasoning) 等形式，由於數學上的形式的 (formal) 包含了使用數學語言與形式符號，因此即便是採用演繹、歸納或溯因推理卻沒有使用形式化語言，也可能歸於非形式化解釋。因此就我們將這些類型重新分類為解析方式與非解析方式，其中解析方式包括使用定義、一般性質、溯因推論與演繹推論等。研究結果表明，採用解析方式的學生在學習證明時具有主導地位，這類學生即便在證明的學習遇到阻礙，也很容易從回想中獲得證明的訊息，這也意味著為了讓證明教學流暢、具有更高效率，教師應該更加將重點放在探索活動學生邏輯結構的連續性。這個研究也指出 Pedemonte (2007) 將論證結構的範疇僅包含演繹結構、溯因結構與歸納結構三類應予以調整，因為研究實際觀察學生的論證過程發現他們也會使用轉化推論與類比推理，這些邏輯結構也不應被排除在論證推理的範疇。

本研究認為數學探索活動可以被視為檢視個體知識或意義的情境網絡，數學證明不在只是冷冰冰的抽象思考遊戲，是可以摸得到、感受到的，因此也是學生與數學概念、關係的樞紐帶。同時，探索活動可以鼓勵學生同時關注證明的「主要組件」與「邏輯序列」，因此是一種很有效率的學習方式。但研究也顯示，儘管探索活動具有啟發式學習的特徵，但由於學生在操作活動時聚焦的對象和關係具推論形式的多樣性，也可能導致後續證明學習的阻礙，例如將眼睛觀察到的現象未加證實的直接使用，老師們也必須有所警覺。

其次，適當的探索活動和論證活動能激發學生數學概念和性質之間關係的重新組織，透過外在操作動作來促進學生的內在轉化，就像學生 S28 在任務 1(c) 上所展現的那樣 (圖 7)，由學生自己建立一個有意義的核證或因果結構。雖然這個表徵仍是非形式的，但透過這樣的轉化，粗略的核證/證明架構已開始萌芽。此外，進行探索活動也能協助學生建構證明的主要組件，如透過探索活動提取同底的不同三角形中點連線這個組件，透過摺紙摺痕建構輔助線等，這些通常是學生學習證明的困難點。探索和論證除了提供了輔助線的建構洞察，也可以讓證明的組件真實化以提供學生適當的內在連結。

最後我們提出呼籲，證明的功能主要在於核證，而不是發現。我們不能期望學生在心理上樂於為一個不是他們發現的事實進行辯護，這是本研究再教學實驗中最深的感受。當我們在過程中發現學生想要告知別人他的發現是對的，那時臉上所展現出的活力與企圖，才是我們期望學生學習證明、甚至是學習數學的表情。如果我們想為學生提供更多瞭解證明的機會、學習如何建構一個證明、甚至鼓勵他們親近證明，在證明教學之前先進行探索和論證活動應該是不可或缺的。

參考文獻

謝豐瑞、唐書志、宋玉如、王婷瑩 (2008 年 12 月)。國中理想數學教師類型探討。中華民國第二十四屆科學教育學術研討會發表之論文，國立彰化師範大學。【Hsieh, Feng-Jui, Tang, Shu-

- Jyh, Song, Yu-Ru, & Wang, Ting-Ying (2008, December). *The types of ideal lower secondary mathematics teachers*. Paper presented at the meeting of the 24th Science Education Conference, National Changhua University of Education. (in Chinese)】
- Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N., & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The teaching of proof. In T. Li (Ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Vol. III, pp. 907-920), Beijing, China: Higher Education Press. doi: 10.1142/4962
- Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. S., & Tanguay, D. (2012). Argumentation and proof in the mathematics classroom. In G. Hanna and M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI study* (pp. 349-367). Dordrecht, The Netherlands: Springer. doi: 10.1007/978-94-007-2129-6_15
- Epp, S. (2003). The role of logic in teaching proof. *The American Mathematical Monthly*, 110(10), 886-899. doi: 10.2307/3647960
- Garnham, A., & Oakhill, J. (1994). *Thinking and reasoning*. Cambridge, MA: Basil Blackwell.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation, and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1-3), 5-23. doi: 10.1023/A:1012737223465
- Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996). Proof and Proving. In A. Bishop, M. A. K. Clements, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 877-908), Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/978-94-009-1465-0_24
- Hanna, G., de Villiers, M., Arzarello, F., Dreyfus, T., Durand-Guerrier, V., Jahnke, H. N., ... Yevdokimov, O. (2009). ICMI study 19: Proof and proving in mathematics education: Discussion document. In F. L. Lin, F. J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICME Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education*. (Vol. 1, pp. xix-xxx). Taipei, Taiwan: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education* (Vol. III, pp. 234-283). Providence, RI: America Mathematical Society. doi: 10.1090/cbmath/007/07
- Hsieh, F. J., Horng, W. S. & Shy, H. Y. (2012). From exploration to proof production. In G. Hanna and M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI study*. (pp. 279-303). Dordrecht, The Netherlands: Springer. doi: 10.1007/978-94-007-2129-6_12
- Hsieh, F. J., Lee, F. T., & Wang, T. Y. (2009). How much proofs are students able to learn in mathematics class from their teachers. In F. L. Lin, F. J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICME Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 208-213). Taipei, Taiwan: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- Josephson, J. R., & Josephson, S. G. (1994). *Abductive inference: Computation, philosophy, technology*. New York, NY: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9780511530128
- Kleiner, L. (1991). Rigor and proof in mathematics: A historical perspective. *Mathematics Magazine*, 64(5), 291-314. doi: 10.2307/2690647
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge, UK: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9781139171472

- Lamport, L. (1993, February 14). *How to write a proof*. Retrieved from <http://research.microsoft.com/en-us/um/people/lamport/pubs/lamport-how-to-write.pdf>
- Leron, U. (1983). Structuring mathematical proofs. *The American Mathematical Monthly*, 90(3), 174-185. doi: 10.2307/2975544
- MacPherson, E. D. (1985). The themes of geometry: Design of the nonformal geometry curriculum. In C. R. Hirsch & M. J. Zweng. (Eds.), *The secondary school mathematics curriculum: 1985 yearbook* (pp.65-80). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Magnani, L. (2001). *Abduction, reason and science: Processes of discovery and explanation*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1-3), 25-53. doi: 10.1023/A:1012733122556
- Martin, T. S., McCrone, S. M. S., Bower, M. L. W., & Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof. *Educational Studies in Mathematics*, 60(1), 95-124. doi: 10.1007/s10649-005-6698-0
- Miyazaki, M., Fujita, T., & Jones, K. (2015). Flow-chart proofs with open problems as scaffolds for learning about geometrical proofs. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 47(7), 1211-1224. doi:10.1007/s11858-015-0712-5
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research & evaluation method* (3rd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 23-41. doi: 10.1007/s10649-006-9057-x
- Peirce, C. S. (1960). *Collected papers of Charles Sanders Peirce* (Vol. 1). Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Piaget, J., & Garcia, R. (1991). *Toward a logic of meanings*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Pólya, G. (1981). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving* (Vol. I and II). New York, NY: John Wiley & Sons.
- Salmon, W. C. (1973). *Logic* (2nd ed.). Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Simon, M. A. (1996). Beyond inductive and deductive reasoning: The search for a sense of knowing. *Educational Studies in Mathematics*, 30(2), 197-209. doi: 10.1007/BF00302630
- Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2008). Proof in school mathematics: Insights from psychological research into students' ability for deductive reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(2), 103-133. doi: 10.1080/10986060701854425
- Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(3), 314-352.
- Tirosh, D. & Stavy, R. (1999). Intuitive rules: A way to explain and predict students' reasoning. *Educational studies in mathematics*, 38(1-3), 51-66. doi: 10.1007/978-94-017-1584-3_3

Usiskin, Z. (1980). What should not be in the algebra and geometry curricula of average college-bound students? *The Mathematics Teacher*, 73(6), 413-424.

附錄：部分本研究使用之學習單示例

從探索到證明活動開始嘍

- 中點到線段兩端點的距離必須相等。
- 兩條平行線指的是兩條同時和某一條直線垂直的直線。

活動一

- 1) 首先，讓我們來看看自己

還記不記得怎麼用摺紙找出一條線段的中點，以及畫出兩條平行線。

- 2) 接下來讓我們複習一下三角形中點連線性質以及相關的數學性質。

①請在老師發的紙張上畫一個和別人不一樣的三角形，小心地把它取（或剪或割）下來。

②找出各邊中點，並且摺出其中兩個中點的連線段。

③關於②中的這一條連線段，請在底下的框框裡寫出你想到的任何性質。

填答區（一）

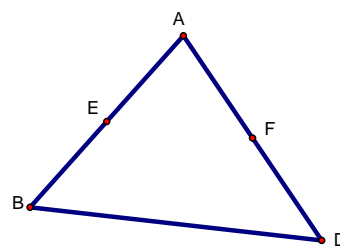
- 3) 請你利用摺紙設計一套方法，好說明你在上面框框裡寫的性質是對的。

在下面的框框中，簡要寫出你設計的這套方法或說明步驟，必要時請附上簡圖。

填答區（二）

活動二

老師會發給你一個三角形，和右圖這個相似，記為 $\triangle ABD$ ，其中兩邊的中點已經被標示出來，分別是 \overline{AB} 的中點 E 和 \overline{AD} 的中點 F 。



填答區（四）

我看得懂上面數學符號與句子裡的意思嗎？請勾選最符合自己現況的一個方格：

☐看得懂 ☐看不懂（請寫出哪裡不懂）

1) ①請你在老師發的紙上， $\triangle ABD$ 外任取一 C 點，然後自己用筆連出一個四邊形 $ABCD$ 。

②利用摺紙的方法找出 \overline{BC} 和 \overline{CD} 的中點，並摺出一條直線連結這兩個中點。

你想到或發現了什麼嗎？請將想到或發現的事情寫在下面的框框裡。

填答區（五）

2) 請你繼續用原子筆在老師發的圖形上連出 \overline{EF} 。你想到或發現了什麼？寫在下面的框框裡。

填答區（六）

活動三

- 1) 請你在老師發的空白紙上任意畫出一個四邊形，並且將它剪下來，用筆標出四邊中點。
- 2) 將上面這個四邊形傳給下一位同學。
- 3) 看一看你和周圍同學手上的圖形，你有沒有發現什麼？

填答區（八）

看過幾個圖形後，.....

☐ 沒什麼特別的 ☐ 我發現到_____（請簡單說明）

- 4) 李雲軒同學嘗試將幾個中點連結起來以尋求各種可能的發現。
如果你也這麼做，你將發現什麼？請在框框中寫下你的發現與理由。

填答區（九）

劉致演、秦爾聰、尤昭奇（2017）。

探討一位國中數學教師發展探究教學之專業成長。

臺灣數學教育期刊，4（2），33-68。

doi: 10.6278/tjme.20170914.002

探討一位國中數學教師發展探究教學之專業成長

劉致演¹ 秦爾聰² 尤昭奇³

¹ 國立彰化師範大學科學教育研究所中等數學教學研究中心

² 國立彰化師範大學科學教育研究所

³ 臺中市立清水國民中學

本研究旨於為期超過一學年的縱貫研究中，透過敘說探究取向觀點描述一位國中數學教師在不同時期發展探究教學之專業成長。研究者蒐集個案教師課室實務、反思與晤談等資料，藉由敘說分析形成個案教師專業成長故事之敘說結構，來描繪其專業成長歷程。研究發現，個案教師在發展探究教學專業成長歷程中，漸次覺察其教師角色認同與教學實務深受初始信念影響，藉由與研究社群成員反覆磋商、討論以及教學實務的反思實踐，個案教師於發展探究教學過程中重新聚焦於學生學習的理解，以系統性佈題策略作為數學臆測任務核心，協助學生發展數學臆測思維，並為提升教學效能進而發展多工教學程序。最終，個案教師在重新發現自身核心教學價值與信念後，理解學生是學習的責任中心，並自我覺察教師角色應是佈題者與學習環境的建構者，進一步了解數學探究教學的旨趣應是培養學生積極參與數學問題探究，並且能在解題過程藉由特殊化、系統化、一般化及反駁等策略進行數學思考。

關鍵詞：專業成長、敘說、數學探究、臆測

通訊作者：秦爾聰，e-mail：abechin@cc.ncue.edu.tw

收稿：2016 年 4 月 4 日；

接受刊登：2017 年 9 月 14 日。

Liu, C. Y., Chin, E. T., & Yu, C. C. (2017).

An investigation of a junior high school teacher's professional growth towards developing mathematics conjecturing-inquiry teaching.

Taiwan Journal of Mathematics Education, 4(2), 33-68.

doi: 10.6278/tjme.20170914.002

An Investigation of a Junior High School Teacher's Professional Growth towards Developing Mathematics Conjecturing-Inquiry Teaching

Chih-Yen Liu¹ Erh-Tsung Chin² Chao-Chi Yu³

¹ Mathematics Teaching and Research Center Graduate Institute of Science Education,
National Chunghua University of Education

² Graduate Institute of Science Education, National Chunghua University of Education

³ Chin-Shuei Junior High School

This longitudinal study for over one academic year is aimed to investigate a junior high school mathematics teacher's professional growth towards developing conjecturing-inquiry teaching by means of the narrative inquiry approach. The progress of the case teacher's professional growth is narrated by narrative structure which is framed from the narrative analysis according to videotaping of teaching practice, in-depth interviews, and teacher's reflections. Research results reveal that the case teacher is gradually aware that his role recognition and teaching practice are influenced by his initial beliefs within the progress of professional growth through developing conjecturing-inquiry teaching. By means of constant negotiation and discussion with peers in the research group, as well as his own reflective practice in the classroom teaching, the case teacher adjusts his focus on students' understanding, adopting systematic problem-posing strategy as the core task of mathematical conjecturing to help students develop mathematical conjecturing thinking, and building up a multi-functional teaching procedures for promoting teaching efficiency. Finally, as re-discovering his core teaching values and beliefs, the case teacher comprehends that the student is the centre of learning, and perceives that the teacher's role is the problem poser and the constructor of the learning environment. The objectives of conjecturing-inquiry teaching should be to foster students actively getting involved in inquiring mathematical problems, and conducting mathematical thinking through specialising, systematising, generalising, and refuting while solving problems.

Keywords: professional growth, narrative, mathematical inquiry, conjecturing

Corresponding author : Erh-Tsung Chin , e-mail : abechin@cc.ncue.edu.tw

Received : 4 April 2016;

Accepted : 14 September 2017.

壹、前言

當前數學教學在考試引導教學的氛圍下，教學活動乃於確保學生能考試上獲得高分而非促進學生真實數學理解甚或數學能力養成，因而對於大部分教師而言傳統講述教學仍是較為「安全」及「有效」的教學策略，而此種教學模式是教師僅在講台上介紹單元相關數學概念、公式後，講解示範例題和提供精緻化的演算技巧（Lin & Tsao, 1999）。事實上，促進學生學習的理解是數學教學與學習活動中最重要旨趣（National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; National Research Council [NRC], 2001），而教師在面臨傳統教學（強調培育演算程序的效能及準確）與教育改革行動（旨於培養概念理解及複雜的解題）不可調和的張力（Franco, Sztajn, & Ortigão, 2007; Gravemeijer, 1997）時，教學改變實則仰賴於專業成長（Little, 2006）。此外，相關研究發現探究教學足以提升學生數學學習的理解（Harlen, 2014），而臆測在探究學習過程中扮演舉足輕重的角色（Cañadas, Deulofeu, Figuerias, Reid, & Yevdokimov, 2007），因為學生在解題過程中必須在一般化及特殊化來來回回的解題過程中提出猜想、驗證猜想，並為他們的解法進行辯證。由於數學探究教學是改革取向教學（NCTM, 2000），為實踐改革教學目標，教師難免得在傳統與改革的兩難中有所取捨，因此除協助教師改善教學實務外（Franke, Carpenter, Levi, & Fennema, 2001），更應協助教師發現其教學核心價值及原則（Little, 1993）。當前，國中數學教師常見的专业成長模式是參加研習或工作坊，但根據長久以來的觀察，教師多半被動參與研習，因此無法產生教學改變進而促進學生學習；事實上短期工作坊，難以有效促進教師進行教學改變與專業成長（Lavonen, Jauhiainen, Koponen, & Kurki-Suonio, 2004），並且教師在參與以講授為主的專業成長研習後，鮮少將研習內容落實在課室實務中（Briscoe, 1991）。推究其原因為教師經常身兼數職，如班級經營、行政庶務或是執行學校所交付的任務，導致無暇參與教師增能活動，因此，教師教學增能應由教師自主發展，並藉由教師專業社群形塑學習型組織，才能有效推動教師教學實踐與成長（李天堯，2011）。此外，國外研究也發現教師專業社群是幫助教師學習的建設性場所（Sarason, 1990）；並且對教師而言，最有力的學習經驗發生在其所屬的課室裡，藉由自己或觀察者對於教學實務檢驗的反饋進行教學實務改變（Putnam & Borko, 2000），而教師教學信念的改變更仰賴於教學情境中之社會脈絡及教師本身的反思實踐。由於教學是在實務中學習（teaching as learning, in practice）（Lave, 1996），因此相信藉由融入教師日常教學並透過教師專業成長社群協助，使教師在磋商、討論、反思與實踐建等過程中降低理論與實務磨合（李源順、林福來、陳美芳，2012），進行教學改變並促進學生學習的理解；如此，勢必能建立一個有效的教師專業成長模式，除提供台灣現職教師進行教學改變之參考外，更能藉由個案教師發展探究教學分析結果，作為關於發展臆測探究教學依據。因此本研究擬策畫一學校本位（school-

based)之教師專業成長計畫,邀請一位持有改革教學信念但仍採傳統講述教學策略之國中教師,以日常教學活動為中心,藉由實踐社群(community of practice)(Lave & Wenger, 1991; Wenger, 2015)概念協助個案教師進行專業成長。在進行為期超過一個學年的教學研究與教學實務偕同之縱貫研究歷程裡,探討個案教師如何在發展數學探究教學過程中藉由對本身教學信念的覺察、教學實務的重塑、發展數學探究教學核心知識等過程進行專業成長。

貳、文獻探討

一、數學探究教學

探究是一種動態過程,此過程開端源自於對自然現象的好奇,並努力透過探索拼湊出真知的全貌(Branch & Oberg, 2004)。因而,數學探究本質是數學家為解決數學上的困惑與異例,藉由一般化(generalization)將錯綜複雜的片段關係,加以整合成和諧而可理解的整體(Kent, 1997)。此外,數學探究活動核心是針對欲探討現象設置及建立假說或猜想(Meyer, 2010),但這些假說與猜想必須經過驗證,而驗證方法是透過假設—演繹(hypothetic-deductive)的系統化過程(Lakatos, 1976)。簡言之,數學探究所要強調的就是學習者自發性的「做數學」(doing mathematics),並在過程中尋找問題本質的樣式、提出猜想並藉由反駁加以修正並與他人進行溝通與論述(Mason, Burton, & Stacey, 2010; NCTM, 1991, 2000)。然而,「學生不會意外地成為主動的學習者,除非經由計畫性設計,始能讓學生進行結構性探究」(Richards, 1991, p. 38),因此探究教學的重要旨趣之一即於幫助學生將經驗與問題研究進行連結,在與他人彼此協商中主動建構數學知識。此外,探究教學是一個具有多元定義且難以把握的概念(Aulls & Shore, 2008),如Jaworski(1994)認為數學探究教學旨於在課室中佈建社會性脈絡,使學生在溝通論述中探索數學問題建構數學知識,而Franke、Kazemi與Battey(2007)更以整體觀點來看待數學教學,他們認為數學教學旨於建構一個學習環境,教師應於其中激勵學生做數學、致力協助學生主動發現學科知識獨有表徵,並且能夠詮釋學生的想法。綜上所述,教師應於探究教學活動中協助學生於其所佈建的問題脈絡中,如同數學家般研究數學問題(American Association for the Advancement of Science, 1993),進而探索其背後所蘊含的數學樣式及知識。實際上,「數學家很少直接解決問題,通常他們會先將問題特殊化、提出猜想,然後不斷的修正直到問題能解決為止」(Mason et al., 2010, p. 141),此種在問題探究中尋找高解釋力猜想或假定,再以最嚴格的方式找尋足以反駁猜想的可能例證或想法,即是數學臆測思維的本質(Lakatos, 1976)。此外,面對非例行性問題時通常我們會將問題加以簡化,並透過簡單的試驗來加以檢驗,經過多次試驗後將結果加以擴充並形成一般性通則;簡化問題以及試驗的過程即是特殊化,形成通則的過程則稱為一般化。由於一般化、特殊化及類比通常協同解決問題,並且學生的數學臆測思維模式

與數學家相仿皆具有猜測、檢驗、反駁、相信的遞迴歷程（陳英娥、林福來，1998），因此，本研究主張數學探究教學即是教師建置一個學習環境，引導學生在解題過程中藉由特殊化、一般化、類比等策略，形成猜想、尋找反例以檢驗或反駁猜想，並幫助學生在溝通論述過程中建構數學知識。

二、教師專業成長

教師專業成長是增進教學品質的重要途徑之一，「國家可以採用嚴格標準、設定願景、針對學生如何學習組織最好的研究、修改教科書與評量、為廣大學生提升教師教學策略以及在系統改革中改變其他所有組成——但少了專業成長，學校改革及學生學習成效的改進將不會發生」（American Federation of Teachers, 2002, p. 2）。教師專業發展即是教師在參與學習社群專業活動過程中進行學習與成長（Clarke & Hollingsworth, 2002）；此外，教師專業成長是意圖片面或全面地，促進教師現在或未來的教學改變所進行的活動（Little, 2006），教師可能在大量的互動與活動中增進知識及技能、改進教學實務並致力於其個人、社會及情感等面向的成長（Cohen, McLaughlin, & Talbert, 1993）。此外，為使教學趨向改革教學標準，教師應能發展數學知識、關於數學的知識、關於數學學習的個人性論述、能幫助學生發展特定數學概念知識之課程規劃能力、與學生進行有效溝通能力（如傾聽、提問、監控及促進課室論述）（NCTM, 1991）。事實上，論述（discourse）及實踐社群（community of practice）是教師專業成長的重要基礎（Cochran-Smith & Lytle, 1999），因為只有當教師視自己為社群成員時，藉由促進學生學習及改進課程以促進教學實務改變，如此，教師教學專業才能得以發展（Stigler & Hiebert, 1997）。Arbaugh（2003）藉由實徵性研究實證了這樣的觀點，該研究發現教師教學專業成長來自四個領域的支持：建立社群及關係、建立跨越理論及實務的連結、課程改革以及發展專業感（sense of professionalism）。

Guskey（2002）認為教師唯有在改善教學實務過程中，體悟到學生學習上顯著性的改變才可能因此改變教學信念或態度。因此，教師專業成長應聚焦於教師在發展數學探究教學過程中其信念及態度的改變。此外，教師的行動決策由信念所主宰（Biesta, Priestley, & Robinson, 2015），因此教學是原則性的決策制定，而決策源自於複合行動包含教師知識、信念與目標（Franke et al., 2007）。由於教育研究是一種經驗形式，而敘說對於表述及理解這樣的經驗是非常合宜的方法，透過敘說探究更可瞭解教師信念（Kaasila, 2007），並且教師敘說提供研究者理解教師如何學習及教學知識之組成，以及教師專業知識的全貌（Clandinin & Connelly, 1996）。因此，本研究採用敘說探究作為組織及再現教師教學經驗的主要研究方法，以符應探究本身即是教師專業成長的發展架構（Crockett, 2002），以及教學是在實務中學習（teaching as learning in practice）（Lave & Wenger, 1991）的想法。此外 NRC（2001）建議以數學教學素養（proficient teaching of mathematics）作為教師專業成長評估判準，此素養是由五個面向所交織而成：（1）流暢性（fluency）：為協助

學生發展數學思考所進行的必要教學程序 (instructional routine)；(2) 策略運用 (strategic competence)：針對學生學習所需彈性運用有效策略協助教學進行；(3) 對教學實務所需之核心知識 (core knowledge) 的概念理解 (conceptual understanding)，即教師對於數學教學技能 (know-how) 的理解、延伸與應用；(4) 適性推論 (adaptive reasoning)：針對數學教學實務與學生學習所進行的反思與實踐；(5) 建設性意向 (productive disposition)：對學生思維發展能產生正面影響的效能信念 (sense of efficacy)。由於教師教學素養由五個面向交織而成，因此研究者擬以敘說探究探討教師信念、適性推論及核心知識發展，藉此作為以紮根理論分析個案教師數學探究教學實務上之教學程序及教學策略兩面向發展之理論觸覺。

參、研究方法

一、研究方法

本研究採敘說探究 (Clandinin & Connelly, 2000; Connelly & Clandinin, 1990; Polkinghorne, 1995) 作為主要研究方法。敘說目的之一在於幫助我們理解所經驗的世界，藉由敘說我們可以不斷地重現經驗、深化認知 (Connelly & Clandinin, 1990)。敘說取向的質化研究聚焦在課室裡教師生活經驗的故事，作為理解教師專業成長的基礎 (Witherell & Noddings, 1991)。本研究透過個案教師在專業成長活動中的經驗陳述、反思及論述，理解教師在專業成長活動中如何改變態度、信念，發展對於學生學習的理解及教學知識技能的增進，藉由資料的精鍊並透過有序地連結相關事件，以結構性或主題性的方式，重現個案教師在專業成長活動中所經驗事件的關聯或因果關係 (Labov, 1972; Polkinghorne, 1995)。在描述個案教師專業成長經驗時，向內探討個案教師的情意、態度或信念等面向，向外探討教師與環境的互動，向後與向前探討教師經驗上的時間性觀點 (Clandinin & Connelly, 2000)，其次深入了解這些經驗敘說是「如何被說」及「為何被說」(Rushton, 2004)。

二、研究參與者

(一) 個案教師 T1

個案教師畢業於某師範院校數學系有十一年教學經驗，碩士進修期間先後在專業成長團體中參與數學探究教學、數學臆測、數學素養等理論探究，亦曾發表改革教學取向論述性文章。

(二) 教師專業成長社群成員

為協助個案教師 T1 進行數學探究教學專業成長，本研究另邀請教師 T2、T3 及兩位師資培育專家，共組本研究之專業學習社群。T2 有十三年教學資歷，專精合作學習、數學臆測教學策略，T3 為退休教師是目前教育部推動合作學習計畫之專家諮詢委員，個人曾投入十年時間致力

於探究教學的發展與實踐；兩位教師主要提供 T1 教學實務建議及示範。研究者及兩位師資培育專家則另組研究團隊，藉由課室觀察、晤談及課後討論協助 T1 進行教學改變。

三、專業成長計畫

（一）協助個案教師進行專業成長之策略

為達成學生在學習社群中自發性學習的目標，Jaworski (1992) 提出以整合數學課室組成（提供支持性的學習環境、數學挑戰及培育養成學習的過程及策略）觀點提出教學三元組概念，教學三元組主要由：（1）管理學習（management of learning），關注於學習環境的建置，包含課室組織及課程決策，重要的是它包含課室的運作方式、價值及期望；（2）對於學生的敏銳度（sensitivity to students），關於學生學習的知識；（3）數學挑戰（mathematical challenge），包含激起數學思維及探究，激勵學生主動參與數學思考。為協助個案教師進行數學探究教學專業成長，教學實務上我們參考教學三元組（Jaworski, 1992, p.8），即學習管理、對於學生學習的覺察、鋪陳具有挑戰性的數學任務所組成的教學系統，協助教師在課室中形成學生探究學習社群（請參考圖 1）。

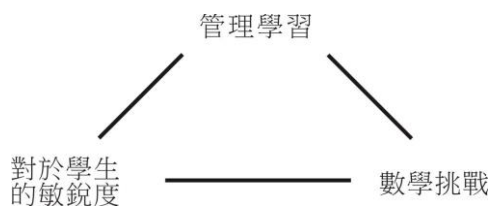


圖 1 教學三元組。翻譯自“Mathematics teaching: What is it?” by B. Jaworski, 1992, *For the Learning of Mathematics*, 12(1), p. 8.

由於教學是學習的過程（teaching as a learning process）（Jaworski, 2006; Lave, 1996）與社會性實踐（social practice）（Lave & Wenger, 1991），因此教育者及研究者與教師能透過社群探究（community of inquiry）發展協助學生理解的教學（Jaworski, 2015）。社群裡的成員藉著參與（engagement）、創造力（imagination）與結盟（alignment）產生歸屬感或認同感（Wenger, 2015），教學與學習的過程中參與者與其同儕，在教學或學習實務中藉由創造力詮釋自己在社群中的角色，並且將自己與社群所建立的規範與價值結盟。特別是在教師、研究者與教育者所組成的專業成長社群中，「探究」扮演關鍵聯盟（critical alignment）的角色，因為探究是社群成員探索知識與存在的本質與方法，並且探究在實務上具有三個階層（Jaworski, 2006）：（1）數學中的探究（inquiry in mathematics）：教師於數學課室中透過探究設計問題與任務促進學生數學學習；（2）數學教學中的探究（inquiry in teaching mathematics）：教師藉由探究探索課室中教學任務、問題及活動的設計及執行，教育者（或研究者）以探究作為工具協助教師發展教學；（3）數學

教學發展研究中的探究：教師及教育者研究數學及數學教學過程中使用探究的歷程。社群裡的成員在周邊合法參與者的協助下，在教學與學習的實踐過程中探究與學習或者成為研究者，成員透過偕同探究（collaborative inquiry）驅動探究關鍵聯盟成為發展性研究的基礎。

為協助個案教師進行數學探究教學專業成長，教學實務上我們參考教學三元組（Jaworski, 1992）即學習管理、對於學生學習的覺察、鋪陳具有挑戰性的數學任務所組成的教學系統，協助教師在課室中形成學生探究學習社群；架構上我們參考探究關鍵聯盟（critical alignment）的概念，在教師反思實作的基礎上，由研究者與教師共同探究發展數學教學的社群模式進行設計研究架構。在專業成長的理論基礎上，我們引用了反思實踐理論（Schön, 1983）以及覺知理論（Mason, 1998）。反思實踐理論幫助我們理解教師如何在教學行動的歷程藉由反思以建構數學探究教學知識，覺知理論幫助我們了解教師如何在教學過程中覺察自己的教學行為，並在探究教學實務與理論的磨合過程中進行自我調整。最終，研究者觀察個案教師在專業成長架構中的互動情形，並檢視教師在教學行動、原理以及諮商中的覺知以及反思實踐的成長。

研究者根據教學三元組及探究關鍵聯盟概念設計本研究專業成長社群的三一互動架構（如圖 2），專業成長社群是由師資培育研究社群（研究者、兩位師資培育專家、T3）、數學探究教學社群（T1、T2）、數學探究學習社群（T1 國二個案班級）共同組成。本架構主要運行模式為專業成長社群提供個案教師教學實務上的理論諮詢，協助 T1 建立生學習社群、佈建數學任務及發展對於學生數學學習的理解，藉由課室觀察提供 T1 教學實務改進建言，T2、T3 除提供 T1 探究教學實務上的示範協助外，更就教學知識、策略及課室問題解決提供實務上的建議。其次，為便於社群成員能夠相互交流教學實務及理論，研究者在網路上建置一「數學探究教學知識互聯網」，社群成員在互聯網裡分享教學片段、心得、問題解決策略及對於學生臆測及探究學習的洞見，幫助研究者能夠以全局觀點探索個案教師專業成長之發展脈絡。

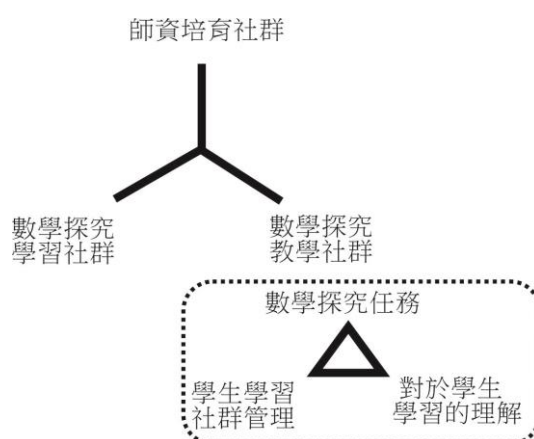


圖 2 專業成長社群三一架構

本研究專業成長社群三一架構的運作，主要以 T1 在課室中所發生的教學經驗及故事為主體，社群成員藉由課室觀察、教學觀摩、課後討論與反思，協助 T1 發展數學探究教學。其次，研究者與兩位師資培育專家針對 T1 的教學分析給予進行教學改變的反饋，T1 則針對社群所給予反饋進行教學任務的設計與執行，再藉由對於學生探究學習的觀察進行反思並將之回饋於社群中，如此循環往復。

（二）個案教師專業成長活動計畫

本研究設計為期一學年之專業成長活動計畫，活動場域為個案教師 T1 數學課室，並以 T1 國二個案班級作為數學探究教學活動的實作班級，計畫內容包含教學觀摩及探究教學實作兩部分，分述如下。

1.教學觀摩

個案教師 T1 雖有改革教學取向相關知識及實務經驗，但實際教學仍採傳統講述，因此為促進 T1 進行教學取向及態度之轉變，研究者邀請 T2 到訪 T1 個案班級，進行合作學習教學策略演示。另本研究計畫執行期間，適逢教育部推廣活化教學，本研究另邀請 T3 以「專家」身分到訪 T1 任教學校，除分享教學經驗與進行探究教學演示外，更針對 T1 課室教學進行觀察與建言。

2.探究教學實作

T1 設計探究教學教案於個案班級中實施，研究者在每次活動實作後與 T1 討論當天的實施情形，並立即給予個案教師客觀建議，作為 T1 教學改進參考。詳細的教學活動名稱與實施日程整理如表 1。

表 1

T1教師數學探究教學活動實作日程表

編號	日 期	數學活動	編號	日 期	數學活動
1	2013.06.06	拈子 1	9	2014.02.19	樓梯
2	2013.09.11	青蛙跳 1	10	2014.03.05	河內塔 1
3	2013.09.25	失眠的管家	11	2014.04.02	尺規作圖
4	2013.10.23	神算	12	2014.04.16	河內塔 2
5	2013.11.06	拈子 2	13	2014.04.30	魔你的數 1
6	2013.12.04	拈子 3	14	2014.06.11	魔你的數 2
7	2013.12.18	青蛙跳 2	15	2014.06.17	魔你的數 3
8	2014.01.08	青蛙跳 3			

四、資料來源

（一）課室觀察

課室觀察資料蒐集 T1 數學探究教學活動，課室觀察進行全程錄影，錄影聚焦於教師引導學生社群探究、師生論述、學生小組互動情形等。

（二）課後討論

研究者於課室觀察後皆會與個案教師討論當次課程的教學策略、學生表現、所遭遇困難及可能解決方法，時間約莫一個小時。

（三）正式晤談

正式晤談共計五次、每次約兩小時，晤談策略依據 Clandinin 與 Connelly（2000）之隱喻上的「三度敘說探究空間」，以時間、情境、社會性互動作為敘說探究的三個向度，基於教師互動及連續性經驗，擬訂四個焦點晤談方向：向內與向外，向後和向前；（1）向內探討情意、教師角色、教學信念、教學知識、教學方法；（2）向外探討學生數學探究社群的建構及引導、社會環境對於教師的期待；（3）向後與向前：針對教師的過去、現在與未來的時間性，與教師探討經驗連續性的觀點，對於數學探究教學的經驗整合及對於未來的預期。

（四）教師反思

教師反思資料來源有二，一為教師於教學進行前後對其教學信念、實務的反思，此部分為手寫稿；其二為研究者為個案教師針對課室實務所設計四個開放性問題：（1）您覺得這個數學探究活動的數學內容（或知識）是什麼？與學生未來學習的數學內容有何相關性？學生應具備何種先備知識？；（2）您如何引導學生進入這次的數學探究活動？有發現什麼問題嗎？試舉例說明；（3）試評估這次的教學活動的成效，您覺得未來有何待改進之處？（請分別從教學策略採用及學生進行活動兩方面進行探討）；（4）心情塗鴉。

（五）研究者反思

研究者觀課期間進行田野筆記撰寫，主要針對個案件教師教學策略、學生數學探究學習社群建置策略、摘錄上課流程與重要事件，或註記重要上課片段。其次，研究者會針對該次課程進行反思，主要聚焦於個案教師專業成長脈絡發展與學生數學臆測思維展現與成長，做為日後分析參考依據。

五、資料分析

（一）敘說分析

資料分析以敘說分析 (narrative analysis) (Polkinghorne, 1995) 進行，撰寫個案教師專業成長故事前先行建構情節大綱，辨識對於故事結局有貢獻的資料，並將資料依敘說結構 (Labov, 1972) 的六個組成加以統整，分別是：摘要 (abstract) (總結敘說的內容)、狀態 (orientation) (時間、地點、情境、參與者)、複雜的行動 (complicating action) (事件的次序)、評價 (evaluation) (行動的重要性和意義、敘說者的態度)、解決方式 (resolution) (最後發生了什麼事)、結局 (coda) (回到對現在的展望)。根據敘說結構，研究者再從教師的專業成長經驗裡建構故事，並在語句和評價裡解釋事件的重要性 (Riessman, 1993)。最後，研究者根據敘說分析的結果形成敘說結構並輔以紮根研究分析結果，以敘說方式重現個案教師專業成長歷程。

(二) 課室觀察分析

為輔助敘說探究之分析進行，本研究針對個案教師在活動中的教學程序 (instructional routine) 與策略運用 (strategic competence) (NRC, 2001)，依 Glaser (1992) 和 Strauss 與 Corbin (1998) 持續比較分析方法，以及 Strauss 與 Corbin (1990) 對於質性資料進行開放性譯碼及主軸譯碼，再根據現象觀察結果加以有系統性的歸納，分析出支持個案教師探究教學程序及教學策略運用之範疇。經分析後，針對教學程序 (R) 及教學策略 (S) 所形成的範疇及其所含之內容如下表 2。根據主軸譯碼分析結果，教學程序共歸納出四個範疇：「R1 行動」是教師對於學生布達的行為指令，「R2 流程」是活動流程的控管，「R3 社會常規」是教師對學生社會性常規的要求與期許，「R4 數學常規」則是教師培養社會性數學常規 (socio-mathematical norms) 的教學表徵。另教學策略共歸納出五個範疇：「S1 引導」是教師引導學生進入數學化脈絡的策略運用，主要協助連結 S2 與 S3，「S2 佈題」是教師建構數學任務的佈題策略，「S3 統整」是教師在論述進行時幫助學生修正或歸納其數學想法，「S4 表徵」是教師運用數學表徵進行數學想法的陳述與論證，「S5 評量」則是教師為了解學生理解情形的行為表徵。

研究者將個案教師課室觀察所進行的譯碼範疇分成四個次第，全部譯碼標籤屬總範疇，總範疇內之「教學策略」與「教學程序」為主範疇，而「教學策略」中所含成分為「次範疇」，如「S1 引導」，次範疇內所含的內容則為「標籤」。在呈現統計分析結果時，分為主範疇之於總範疇頻率分布、次範疇之於主範疇成分比例分配、「標籤」之於次範疇的比例；如「教學策略」所含次範疇全部譯碼標籤總數除以總範疇譯碼標籤總數，所得之百分比即為主範疇之於總範疇的頻率分布。研究者將譯碼頻率分布及成分比例變化情形，作為個案教師在不同階段專業成長演進之分析依據。此外，研究者在分析資料時，倘若遇到同一事件或資料可能貼上不同標籤而歸屬於不同範疇的情況時會考量與一前後文脈絡中所指涉的主要對象，如「風紀管好你的秩序！」，此項資料可能屬於「秩序」或「角色」範疇，但由於考慮教師主要對象是全班，所以研究者考慮將之歸納於「秩序」範疇。另外，若資料在前後文脈絡中所指涉之目的不同，則同一個標籤會將

之歸納於不同的範疇，如 R4 數學常規中的「紀錄」是指在活動中的紀錄程序，而 S4 表徵中的紀錄是指教學策略。

表 2

T1 課室實務譯碼範疇說明

主範疇	次範疇	標籤	證據釋例
教學程序	R1 行動	示範	我們先請每一組一個人上來示範
		起立	來全部起立，熱烈討論很好，不要失去焦點
		操作	回憶上次移動是怎麼移動，接著在工作單上移動。
		座位	你是什麼位置就去坐那裡，可以嗎？
	R2 流程	時間	給你五分鐘移動一下你的棋子。
		發表	下一組，看看會不會有不一樣的東西出來。
		個人	現在是自己想，沒有討論自己寫。
		討論	講完了？各組討論一下。
	R3 社會常規	秩序	風紀管好你的秩序！
		態度	如果大家在講第一次的時候專心，第二次的時候就不用浪費這些時間。
		角色	組長，盡你的社會責任！
		鼓勵	感謝你，掌聲鼓勵。
	R4 數學常規	加減分	有人算出 9025，加一分。
		攻擊	有要攻擊的嗎？
		論述管理	台下不要講無關緊要的事。
		紀錄	一對一的時後，WBW[白黑白]怎麼紀錄，那你現在如果兩白兩黑，邊移動的過程對邊那個一邊幫你紀錄，或是你自己紀錄都可以。
教學策略	S1 引導	說明	第一步你把這個跳過來，紀錄第一步叫做 W。
		參與	你們做了什麼努力？要有東西啊！
		動機	贏了就跟對方索取簽名，集滿十個簽名就送黃色小鴨一隻。
		建設性提問	S10 告訴我要怎麼取才必勝？
		先備知識	你不是有學過多項式乘法分配律？
		合作	當然人的大腦就只有一個嘛，你又要移、又要記，所以就是要分工合作。

(續下頁)

表 2 (續)

主範疇	次範疇	標籤	證據釋例
S2 佈題	情境	情境	富翁有 24 顆寶石，他要把他藏在他們家裡面，富翁睡前檢查房間的四個角落和四個牆邊，數一數總共是 9 顆的話，每邊一數都是 9 顆，24 顆寶石排成亂七八糟，我們要怎麼數 24 顆寶石？
		特殊化	剛剛我要你做的是三黑三白的時後，是幾次？
		系統化	在做這個之前請你先做第一步，從一隻白蛙一隻黑蛙、一隻白蛙二隻黑蛙……，一直到一隻白蛙 x 隻黑蛙。
	S3 統整	一般化	第三題他問你說， m 隻白蛙 n 隻黑蛙要幾次？
		詮釋	他說差了 $3(x-4)$ 到這裡，但問題是這裡還沒有解決。
		歸納	因為他說每個都差 3，可是這個 x 個跟 4 個差了 $x-4$ 個 3，所以把這個加這個，所以就變成 $14+3(x-4)$ ，所以得到這個公式 $3x+2$ 。
		檢驗	剛 S01 的這個方式找出這個，天馬行空就找到這個結果 $((1+x)-2-1)$ ，沒有任何理解就跑出這個，怎麼知道他對不對？
		反駁	上面明明就寫，每隔四個數字在有新的四個數字，可是你有講的是加 5，那不就跟你寫的東西衝突了嗎？
		舉例	S24 你可舉例第三個 83 哪來的？
		論證	T1：所以他覺得這裡應該填右、這裡應該填的是右，這裡填的是左，這裡填的是右，為什麼？ S：一個左兩個右。
S4 表徵	紀錄	紀錄	因為今天你們遇到一個狀況就是因為你不太會記錄，所以我要你練習看看你怎麼紀錄。
		符號	你要寫 $(10x+5)^2$ ，這是 KEY。
		畫圖	S12：一定要畫圖說明嗎？T1：盡量，因為畫圖是最基本的表示法。
S5 評量	點名提問	點名提問	S05 這次要做什麼？
		起立坐下	到這裡聽得懂得起請立。
		舉手	聽得懂的舉手。

(三) 資料來源代號說明

研究者根據資料來源，將質性資料賦予編碼，編碼說明如下：課室觀察轉錄，CO；教師晤

談，TI；教師反思，TR；課後討論，CD；研究者反思，RF。

六、研究信度

本研究信度建構主要藉由「資料來源」與「分析者」進行三角校正 (triangulation)。本研究共蒐集五種質性資料，藉由資料間的交叉比對及分析形成研究結果。另資料分析的三角校正，是由研究團隊（研究者、兩位師資培育專家）針對資料譯碼、範疇形成、敘說結構及情節配置等進行討論，在個案教師專業成長故事大綱形成前，研究者邀集專業成長實踐社群成員反覆磋商直到形成共識。

肆、研究發現

在與個案教師長時間的觀察及相處中，我們（敘說取向文本撰寫，研究者通常以「我」或「我們」自稱）發現 T1 雖持有改革教學信念，然而在實務上仍採傳統講述教學，強調學生學習成就足以代表教師教學績效。在研究初期，T1 特別關注於低成就學生對於數學課室的參與，導致教學程序經常因為管理學生學習行為而斷斷續續，在長達半年追蹤後我們發現 T1 教學實務受其初始信念影響甚鉅，甚至影響 T1 在個案班級「導師」及「數學教師」兩角色認同間產生兩難，因此我們在鋪陳 T1 的專業成長故事時，首先探討 T1 初始信念由來及對於教學實務之影響。其次，教師信念改變是漫長的歷程，需要許多刺激、衝突經驗與反思 (Furinghetti & Pehkonen, 2002)，因此研究者花了一些篇幅探討我們如何偕同 T2 介入 T1 教學實務改變。T1 專業成長歷程發展階段，恰可依據其「數學任務佈題發展」及「教師角色認同轉化」作為分野，專業成長計畫起始到「拈子 2」為探索期，「拈子 3」至「河內塔 1」為發展期，「河內塔 2」到探究專業成長計畫結束則為成熟期；探索期聚焦於 T1 的初始信念及對於數學探究教學策略性佈題的探索，發展期探討 T1 如何發展出系統化佈題策略，成熟期則聚焦於 T1 教師角色認同與教學實務改變及如何發展多工教學程序（同一時間學生上台書寫小組發現、學生書寫工作單、教師先行為下個階段佈題並在小組間協助學生探究、授權小組幹部引導小組討論）。

一、在挫折中摸索探究教學（探索期）

（一）阻礙教學實務流暢的信念：孩子，一個都不能少

在研究計畫執行初期，我們觀察到 T1 在課間花很多時間與精力關注於低成就學生，影響其教學程序進行與教學策略運用，此一現象始於 T1「不讓任一個孩子落後」的教學信念。

一般我會花一半的心思和注意力在後幾名身上，如果用眼神來說他們會分到 10 次以上，但對認真和中等學生而言，大概是 3 次就很多了。【TR-20131009】

T1 的教學信念，特別是對於低學習成就學生的教學建設性意向，深受其小學、中學時期偏差行為影響，由於這些經驗使得 T1 相信學習行為偏差是可以被修正的，特別是來自於師長的教誨。T1 的國二導師幫助他重新思考自己行為本質，數學家教老師幫助他在數學學習上取得前所未有的自信，此一影響甚至延續到大學聯考志願選填，T1 選擇了數學系。

或許就是因為這些老師在關鍵的時刻拉了我一把，我也醒悟到自己其實希望的是別人的肯定！我認為一個有教育熱誠的老師，若能多關注這些低成就孩子，就能對他的人生產生關鍵性的影響！【TR-20140305】

美國為回應全球化的挑戰，2001 年 12 月布希政府通過了「不讓任一個孩子落後」法案（No Child Left Behind Act, NCLB），為落實兼顧品質與教育平等的雙重目標。此外，NCTM（2000）為學校數學制定了六項原則（principle）：均等、課程、教學、學習、評量與科技。其中，均等原則揭櫫卓越的數學教育的必需以均等為前提，即對於所有學生的學習提供支持及秉持高度預期；然而均等並非意味所有的學生須接受齊一式的教學，反之，針對所有學生為促進受教權及學習成就之需要得進行合理且合適的教學調整。

當 T1 看見自己「不讓任一個孩子落後」的信念致使教學實務產生見樹不見林的窘境，自此，T1 在往後專業成長的中，無論教學策略及教學程序或是信念，皆可以看到此反思所造成的改變；並且在其專業成長成熟期時，T1 終能明白實踐數學教學真實均等應是藉由「因材施教」來達到「不讓任一個孩子落後」的目標。

（二）教學實作成效不彰的挫敗：未建立數學學習常規

在開始正式施行數學探究活動前，我們與 T1 經過多次討論與磋商，包含教學策略、教案設計與佈題、小組分組形式細節甚至學習進度，但在第一次活動結束後，我們與 T1 陷入了低潮。主要原因除 T1 事前準備不足造成課室運作不順暢外，還有一部分是 T1 未能安排足夠的個人探究時間，以至於學生在未充分理解規則及題目所傳達的概念前，即進入社會性脈絡，使得合作學習流於形式。因著初始信念的影響，T1 認為學生學習的基礎奠定在良好學習常規之上，由於 T1 身兼國二個案班級導師，教師變成既是「任務性」又是「庶務性」的工作。

老實說身為個案班的導師是焦頭爛額，班級的瑣事每天都要耗掉我很多時間和精力。無形中，班級經營影響著我的數學教學，相對於教育的信念影響著我的班級經營，我變得很難享受教學的樂趣。【TR-20131107】

T1 相信數學探究與思維的發展應建構在良好的學習常規之上，學生如果沒有良好的社會性常規，就無法在社會性的互動中學習尊重、欣賞別人的想法，遑論在社會性常規下建構推論、猜想、反駁、論證等社會性數學常規（Yackel & Cobb, 1996）。

T1：就是要建立遊戲規則，建立模式，就是我以前會去告訴他們，現在你應該做什麼、你不要做什麼，然後一直去提醒。

R：所以希望你孩子從常規開始學習自主、獨立？

T1：從常規開始自主，沒有常規就沒有辦法進入探究的脈絡。【TI-20140610】

（三）教學信念的衝突與改變：他山之石可以攻錯

個案教師 T1 雖然持有改革教學信念，但在實際教學仍採傳統講述策略，主要是 T1 對「不讓任一個孩子落後」教學信念的堅持，希望所有學生都能參與學習。

我想，講述式教學並不是真的那麼一無可取，探究式教學也不是萬用，每個單元、每個主題應該都可以嘗試各種的教學方法，而哪一種方法適合？就要因人而異因時因地制宜了。【TR-20140402】

由於 T2 一直以來都在課室裡以合作學習策略進行探究教學，於是我們邀請 T2 至 T1 課室進行觀摩，希望透過在職老師間的實務性對話，幫助 T1 看到自己教學上的盲點，因為對於在職教師而言，最直接的協助來自於社群成員的分享與討論（Cochran-Smith & Lytle, 1999）。

在整堂課的探究脈絡進行中，我看到 T2 清楚的說明學生可以採用的討論規則，老師的角色是建立討論的規矩，並且從學生的發表中，引導學生去攻擊和反駁（妥善利用加減分，目的是增強正向行為和削弱負向行為）最後再加以統整和歸納。【TR-20131009】

我們與 T2 的介入，是促成 T1 改變教學信念、重塑教學實務的誘因。在 T2 到 T1 課室觀摩後，不到一週的光景，T1 即開始著手進行教學改革，先前遲遲未能改變的原因，某種程度而言因為面對考試的檢驗，傳統講述教學是相對安全的作法，至少確定學生都「學過了」。

在一堂課結束後，我會想要比較探究式和傳統式學生的「成效」？但是這樣又落入「考試」目標導向中，難怪我會一直退回傳統講述式課堂，因為安全、可掌握，且學生秩序看起來比較好。經過這節課的火花撞擊，我想會加快我改變的速度和更堅定改變的方向。試想，為何在我課本

外主題式的探究活動中，我期待學生養成分工、參與、產出、溝通、表達、辯證反駁的種種行為模式，為何在傳統課室卻只盯著「分數」呢？【TR-20131009】

（四）教師策略性佈題與學生發現樣式：玩遊戲也要有戰略

T1 的初始信念，某種程度會反映在其教學任務安排與設計上，因 T1 會經常顧慮學生是否會在相同的探究主題下感到乏味，因此在顧及「新鮮感」的前提下，T1 得不停更換探究主題，即便是相同主題也會以不連續的方式安排。如神算活動任務中，T1 希望學生在數結果中找出其中所隱藏的公式，如 $25 \cdot 25 = [(2+1) \cdot 2] \cdot 100 + 25$ ，一般式為應由 $(\boxed{x}5)^2$ 的格式轉換成為 $(10x+5)^2$ ，但 T1 在假設性學習軌線（hypothetical learning trajectories, HLT）（Simon, 1995）的安排上少了位值（place value）概念的鋪陳，致使大部分的學生僅能推論出 $(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$ 或 $(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$ ，由於抽象化的符號運思佔據了活動的大部分時間，造成學生對過度抽象性的數學活動感到興趣缺缺。因此在後續活動「拈子 2」改採遊戲的方式進行，活動的設計意象是希望學生在遊戲中，透過「系統化」的方式尋找數學任務中所隱藏的規律，這樣的想法無形中成為往後設計數學任務時進行策略性佈題的基礎。

就像打 lol、玩牌，如果你只是亂玩，就玩不出一個規則，一定要有系統地玩、找到它的規律，如果沒有過程就找不到規律，就不知道公式怎麼來的了【CO-20140108】。

二、數學探究教學發展關鍵—「系統化」（發展期）

（一）教學即是在實務中的學習：教學旨於促進學生學習的理解

T1 在探索期時，仍抱持以出非例行性的問題考驗學生的想法，同時在 T1 的過往施行探究活動經驗中，大部分學生都能在探索自主過程中找到令人滿意的答案，然而個案班級卻未能達成先前的預期，也正因如此，幫助 T1 能夠重新檢視藉由教學設計以促進學生學習的目的。

在這幾次活動中，我每次對學生的發現都不甚滿意，因為舊經驗影響著我對他們能力的期待值，在學習單鋪設上，我都還是用一個大階梯，希望他們找方法、找策略、進而找答案。其實我真的該給方法、給策略，不要吝惜讓學生「成功」。【TR-20131106】

拈子 3，是 T1 在個案班級中施行的拈子系列活動的最終回，回顧前兩次的拈子活動，拈子 1 是引起學生探究學習的動機的暖身活動，拈子 2 更以遊戲挑戰做為活動基調，目的是為了調和神算的抽象符號思考所帶給學生的單調與乏悶，拈子 3 完全沒有程序性操作，直接進入概念作為起始，完全以思考實驗的方式進入探究脈絡裡。T1 所設計的拈子活動情境如下：

「拈」(Nim) 是極其古老且饒富趣味的一個遊戲。據說,「拈」源自中國,經由被販賣到美洲的奴工們外傳。辛苦的工人們,在工作閒暇之餘,用石頭玩遊戲以排遣寂寞。流傳到高級人士,則用辨士(Pennils),在酒吧櫃檯上玩。最常見而為大眾熟悉的玩法是這樣的:「兩人輪流取一堆石頭,每人每次最少取 1 個,最多取 k 個,最後取光石頭的人贏得此遊戲。」請問有何致勝之道?

T1 將拈子活動佈題從特殊化到系統化將之分為三個層次(A 為拈子活動一、B 為拈子活動二、C 為拈子活動三):

- A.如果兩個人共取 35 顆棋子,每次可以拿 2、4、6 顆棋子,最後取光棋子的人贏得此遊戲,請問有何致勝之道?
- B.將十二枚銅板分三列排成三、四、五個,兩人輪流取銅板,每次需在某一列取一枚或一枚以上的銅板,但不能同時在兩列取銅板,最後將銅板拿光的人贏得此遊戲,請問必勝的秘訣是什麼呢?
- C.根據上次活動,當已知 $\{0.1.1\}$ 、 $\{0.2.2\}$ 為必勝棋形時,別人取第三列 5 顆後,此時,如果換我們拿棋,該如何拿呢?(狀況一、在其中一列取 4 顆;狀況二、在其中一列取 3 顆;狀況三、在其中一列取 2 顆;狀況四、在其中一列取 1 顆)

在「拈子 3」教學行動後 T1 的心態產生很大的改變,特別是不再以「結果」來衡量學生學了多少,反而聚焦在如何藉由教學策略與教學程序以促進學生學習的理解。事實上,發展對於學生學習的理解,是教師專業成長的一個重要環節(Simon, 1997),因為教師的知識的發展應包含關於學生學習,用於幫助教學決策制定(Fennema & Franke, 1992)。

這個活動跟以往設計不同的是,以前設計不同的主題是一個一個的活動,而這次設計的出發點是:培養(或者說是強迫)學生學會用公約化的數學符號來做溝通,並且有共識地立基彼此都「不言而自明」的必勝策略上,這對未來證明題,甚至是未來的活動有意義的地方在於學生必須學會靜下心來“紀錄”或者冥想棋局的變化。【TR- 20131204】

這次我聚焦的不再只是「學生發現了什麼」改變的是設法去理解或引導「學生如何發現」「學生怎麼討論」、「小組角色的功能」以及「學生瞭解多少」。【TR-20131204】

(二) 數學探究教學核心知識的形成數乘法:特殊化、系統化、一般化

在本研究中「系統化」是指「有系統的特殊化」(Mason et al., 2010),從「舉例」、「有系統

地多舉幾個例子」直到形成一般式的過程。在探索期時，T1 在教學實務上即有「系統化」的雛形，如數學任務「青蛙跳 1、2」（參考圖 3）。該任務系統化歷程即由 1 白對 1 黑 3 步、2 白對 2 黑 8 步、3 白對 3 黑 15 步、4 白對 4 黑 24 步、5 白對 5 黑 35 步，根據 3、8、15、24、35 的數字樣式猜想及推論 m 隻白蛙與 m 隻黑蛙交換位置的數學一般式（結果為 $m \cdot (m+2)$ ）。T1 在「拈子 3」將「系統化」的概念加以具體化，要求學生藉由不同條件的設定推論可能的結果，更在「青蛙跳 3」T1 運用「系統化」策略進行佈題，並輔以要求學生針對移動步數加以記錄，藉由觀察紀錄中所蘊含的數學樣式，來證明一般式猜想的合理性。

青蛙跳

如圖兩顏色的木樁置放於一直線上的 11 個洞裡，若欲將白色及黑色的木樁互相交換位置，但僅允許移動木樁時，向前移動至前面的空洞，或跳過前面的一個木樁進入該木樁前的空洞裡，請問最少的移動次數為何？

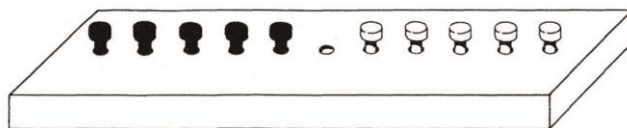


圖 3 青蛙跳問題。引自 *Thinking mathematically* (2nd ed.) (p. 52), by J. Mason, L. Burton, & K., Stacey, 2010, Harlow, UK: Pearson Education Limited.

「青蛙跳 3」T1 將 m 隻白蛙與 m 隻黑蛙的數學任務，改成 m 隻白蛙對 n 隻黑蛙交換位置任務，引導學生以表格化的方式在每次固定其中一個變數的條件下，推論該特殊化後的一般式，最後透過對於特殊化後一般式及記錄的觀察及整合，分析歸納出 m 隻白蛙對 n 隻黑蛙交換位置的一般式為 $m \cdot n + m + n$ 。從該任務設計的核心構念（圖 4）可以得知，「系統化」、「一般化」、「檢驗」、「證明」、「相信」是 T1 設計探究教學任務的主要元素，此外，「紀錄」是幫助學生進行論證的重要過程。在「青蛙跳 3」後，數學探究教學的核心思維已在 T1 的數學教學知識中逐漸成形，這樣的想法亦直接反應在其教學實務上，從 T1 行動後的反思亦能理解，數學臆測思維已是 T1 教學核心知識的一部分。

於缺乏階梯鷹架的支持，造成學生參與數學活動的動機降低外，更因學生得花更長的時間討論而影響活動進度的安排。由於 T1 是位具有高效能感的教師，經常會因學生的表現、如何實踐探究教學的旨趣而感到焦慮，儘管如此 T1 仍會努力嘗試去解決教學實務上所遭遇到的困難，也正因如此促使 T1 發展出多工教學程序，即在同一時間學生上台書寫小組發現、學生書寫工作單、教師先行為下個階段佈題並在小組間協助學生探究、授權小組幹部引導小組討論。

今天（神算活動）各組學生雖然都有提出一般式的想法，但大部分都沒能運用到位值概念，因此無法論述證明一般化結果的正確性，這是我假設性學習軌線（Simon, 1995）下次應該鋪設的更縝密一點的地方。【TR-20131023】

T1 之所以發展出多工教學程序，一則是覺察學生應負起學習責任，二則是在發展數學探究教學的過程中，藉由反思與實踐在探究教學設計上更能清楚掌握學生的假設性軌線，在教學程序或策略的使用上能更有彈性，達到提升教學效能的目標更能專注於學習環境的建構。

比起上學期，做數學活動對我而言有種駕輕就熟的感覺，不管是事前的準備學習單、當下分組的職責、討論的形式、突發狀況的處置…等等，雖然是千頭萬緒，但是現在可以更好整以暇地完成。【TR-20140219】

R：我今天看到你會在同一個時間裡讓很多教學程序同時進行，感覺在時間、空間上有比較大的彈性。

T1：以前我辦不到這樣！以前我覺得這個時間到做完就上去，時間到就應該做什麼…

【CD-20140416】

我開始嘗試在教學實務上多工並行，將關注的焦點放在「在多少人理解」、「多少人參與」。這樣的想法開始讓我在一般課室放下壓力，把學習責任「丟還」給學生。現在我會覺得，老師的責任是在引起動機、提供學生適當的探索題材，以及提供好的合作環境，而不是把學生學習的責任扛在身上。【TR-20140416】

（二）不讓任一個孩子落後的真義：「因材施教」才是真平等

T1 在下學期數學活動任務中特意安排了一次「尺規作圖」，該活動是 T1 以數學課本內容作為數學探究活動的嘗試，其緣由來自於研究者邀請 T3 及校內數學教師為其數學探究教學課室進行觀摩及建言，該課室施行前一週，T1 即在個案班級數學課室中完成六大基本尺規作圖的教授，T1 所設計的數學任務為藉由六大基本尺規作圖，完成麥田圈圖形的複製及創作，在創作前 T1

希望學生能夠將各組所分享的作法抄寫至學習單上，以達集思廣益的目的。

T3：你剛剛請孩子站著抄，我覺得不好ㄟ！

T1：但是如果沒有做這個動作會拖更久。

T3：那個東西我們老實說也是表面啦！

T1：基本上我已經給一段時間了，有認真執行的已經做完了，問題就在那些被動的，我會覺得如果沒有到一定的程度我沒有辦法繼續下面的程序。【TI-20140407】

藉由 T3 建言，T1 重新審視與檢驗自己的教學信念，開始覺察到過去自認對於低成就學生的關注，並非真實的平等。但隨著 T1 的自省與覺察，我們觀察到 T1 在後續活動中做了很大的調整，特別是在教師角色認同與數學任務佈局。

經過觀摩後的分享討論，才知道我自以為有效率的處理方式，其實造成假平等，要求一致，也是假平等，這樣的教學方式，無形中一直拖累我的進度使課堂的辯證失焦，也讓深度消失。事實是學生程度有差異，應該要彈性標準，多給予肯定和鼓勵。【TR-20140408】

（三）教師即佈題者：教師角色認同的自我覺察

探索期時，T1 堅持學習單必須在「工欲善其事必先利其器」的前提下做好萬全準備，以應付不時之需。其實這樣想法的背後是為了提升教學效能，因為 T1 認為探究教學比起傳統講述教學要更多的準備，不同程度的學習單可以提升學生的參與。

我會有一個預想的進度，看他們施行的結果怎樣再去調整，所以不一定要按照什麼形式走。甚至，我希望有一百種學習單，滿個櫃子都有，就是每一種都印一百張放著，我如果覺得什麼適合就用哪一個。【TI-20130925】

T1 在專業成長成熟期中，最令人眼睛為之一亮的地方莫過於他運用「空白」學習單來起始數學任務，除了讓學生更能專注於佈題脈絡外，更讓學生多了一份期待感，這樣的想法其實來自於 T1 對個案班級學生的了解。在成熟期時，T1 完全顛覆了先前的想法，在「魔你的數 2、3」T1 給學生「空白」學習單，以先前的發現作為進行佈題的基礎。

T1：可是就會像上次那樣，你活動單一給他，他就覺得哦！怎麼又是這個！可是你如果給他空白學習單，他就會覺得你想幹嘛？就能讓學生猜不到接下來要做什麼，進而提升他們的學習動機。

R：是不是學生已經熟悉你的模式了？已經養成習慣了？

T1：可是如果我現在反過來想，你一個活動做三次，第一次這個活動可能沒辦法做得很深，老師介入得很多，可是他還是把他帶到三次。下一個活動，他就大概知道那個模式，做三次就不會有期待感。【TI-20140617】

「魔你的數」(圖5)遊戲方式是開始時請一位同學選定1至63其中一個數字，然後老師逐次問他這個數字是否依序出現在表格一到六，最後教師透過該學生的回答，以表格一到六的最小數字1、2、4、8、16、32作為該表格所代表的基數，若學生回答有則加上該表格所代表的基數，加總的結果即是學生原先選定的數字，如數字5會出現在表格一、三，則1加4即得到5。

「魔你的數」是開放式的數學探究任務，學生必須根據表格中所存在的數字樣式猜想並推論出背後隱藏的二進位原理。因著數學問題的開放程度，學生學習社群管理能力、佈題脈絡掌握技巧、課室論述管理及教學進程整體的運籌帷幄等面向，對教師而言在在都是極具挑戰的任務。回顧T1在發展期「爬樓梯」活動，任務活動設計是將費伯納契數列的樣式隱藏在樓梯的數學解題任務中，讓學生自然而然地發現其中的數學原理。在當時，T1看待學生數學學習過程的想法已不同於研究初期，傾向於將自己視為訓練學生探究學習的「教練」。

樓梯活動前面設計了兩小節的暖身，以類比的方式來佈局，讓學生了解解題策略的多元性。T1會利用學生討論時間，先行把接下來要學生發表或討論的內容預先鋪排在黑板上，待學生進行到一定步驟後就銜接預先鋪好的佈題脈絡。【RF-20140219】

現在我能夠在事前思慮佈局（學習單內容安排），對學生程度的瞭解，對不進入狀況的學生處置都有思考過，所以我能夠從「管理者」變成現在是「看局者」，現在比較像是「教練」！

【TR-20140219】

No. 1							
17	19	61	43	25	27	57	31
1	51	37	7	9	11	13	15
33	35	5	39	29	23	45	47
49	3	53	55	41	59	21	63

No. 2							
50	51	10	43	58	15	62	63
2	27	6	7	54	22	14	38
18	19	11	23	26	3	30	31
34	35	59	39	42	55	46	47

No. 3							
15	5	44	37	12	13	39	4
20	21	61	23	28	29	38	53
52	31	54	47	60	22	62	63
36	7	30	14	6	45	46	55

No. 4							
46	13	26	63	28	11	30	31
12	62	42	43	44	45	29	47
56	8	58	59	60	61	41	27
57	9	10	24	40	25	14	15

No. 5							
61	17	62	60	20	21	22	23
48	49	50	19	52	53	57	55
24	25	26	27	28	29	58	31
56	54	30	59	51	16	18	63

No. 6							
58	33	59	32	36	51	41	39
40	38	42	43	56	48	34	47
63	49	50	37	52	57	54	55
44	53	61	46	60	35	62	45

圖5 魔你的數活動表格

事實上「教練」只是角色認同覺察過程中的過渡的印象，在發展系統化佈題策略、多工發展程序，以及覺察到學生是學習中心應施以因材施教後，T1 將自己的教師角色認同推向更高位階—「佈題者」。回想起來，T1 對於「導師」及「數學教學」兩者角色糾結的覺察，似乎是他在專業成長歷程中的重要養分。在最後兩次活動的課室觀察中發現，T1 似乎重拾過往對於數學教學的熱情與自信；T1 會將假設性學習軌線中的諸多細節先行佈局，視教學流程的進行隨時彈性調整，在歸納學生的數學發現上亦能按照學生發現的層次加以統整後安排學生的發表順序，使學生能夠清楚掌握數學知識發現的整體脈絡。「佈題者」並非只是設計數學任務，其中更包含課室環境的建構、學習社群的管理以及全班性論述的統整與歸納，亦是 T1 在專業成長計畫中的完美註解。

R：他們今天開始類比，去找先備知識，然後去讓他們會的教不會的，然後就把二進位的推法全部講一次。

T1：我覺得他們在討論的時候可能還沒有發展到那麼多

R：你今天比較突破的地方是你會去引導，把他們的發表順序按照你的想法來安排。

【TI-20140611】

老師的角色原本專職教學，現今漸次變成引導者，再慢慢成為佈題者！只要先預想好學生目前到哪裡，接下來往哪裡去，當我覺得學生學得差不多了，我嘗試大膽的跳躍，直接佈下難題。

【TR-20140618】

四、總結個案教師專業成長

教師專業成長是持續的動態歷程，從 T1 初期發展不難發現環境的擾動（我們與 T2 的介入）是促使 T1 在信念及實務上進行改革的誘因之一，其次 T1 在探究實作中發展出系統化佈題策略，協助他在探索學生臆測認知發展歷程中，理解教師應專注於學習環境建構，更應將學習的責任交還給學生。研究者以數學教師教學素養（NRC, 2001），作為論述 T1 專業成長歷程的基礎，論述方向以紮根理論所分析教學實務的結果論述流暢性與策略運用，以敘說分析探究教師信念的改變合併論述建設性意向及適性推論，並探討個案教師探究教學核心知識形成與發展。

（一）流暢性與策略運用

整體來說，T1 的流暢性與策略應用的發展脈絡與其建設性意向有關。T1 初期聚焦於建立學習環境，因此在秩序控管、小組角色責任的強調著墨頗多，在「績效」與「時間」雙重壓力下常使 T1 感到焦慮。此外，對於低成就學生的關注，造成教學程序間經常有點名提問、起立、坐下等，策略上在系統化佈題策略形成前，T1 慣用建設性提問及將問題加以特殊化以協助學生推論

一般式，在「系統化」佈題策略形成後，T1 逐漸能掌握佈題脈絡的進行，輔以記錄策略來幫助學生進行論證，在發展「多工教學程序」後，更能專注於學生的發表、論證，並歸納結果產生一致性的結論。

（二）對核心知識的概念理解

本節探討數學教師探究教學的核心知識聚焦於數學、教學和學習，即包含教師解決數學問題（包含臆測與論證）的數學知識、教導數學問題解決的教學知識和學生學習問題解決的學生學習知識等三部分，特別是教師對於學生學習數學探索（含臆測與論證）知識的理解。

T1 在設計數學探究活動時特別是數學內容會思考如何與課程內容結合，或者與學生未來學習的相關性，從探索期一直到成熟期皆是如此，此外 T1 是位高自我效能感的老師，在活動的過程中皆會親自參與學生學習活動，藉此引導學生進行數學思考，探索期時 T1 預期學生數學探究學習能夠透過不斷試誤找到數學問題中所隱藏的樣式。

R：所以必勝的棋型有很多種？

T1：對，在以前大家覺得必勝棋型有很多類型，最近有一本書家把它轉成二進位後結果全部都變成同一個棋型，我是沒有期盼他們會進到那麼高階去，但至少慢慢抓到。【TI-20131106】

發展期時，藉由系統化佈題策略，T1 對於數學臆測的理解有了不一樣的思維，但仍然堅持能夠直接猜出一般式再透過舉例加以檢驗的過程，比較符合他心目中對於數學臆測的理解，「系統化」對 T1 而言反而不是形成「猜想」的過程。事實上，T1 是在發展對於學生學習理解的過程中，漸次理解「系統化」對於學生數學臆測思維發展的重要性。

T1：我以前覺得臆測是先猜、檢驗，亂檢驗、亂檢驗，然後接著就會檢驗出系統的檢驗，系統的特殊化檢驗，然後去修正那個猜想。

R：現在呢？

T1：感覺上現在是不猜，不會直接猜十二階有多少，不會猜 N 階有多少，直接就開始從 1、2、3（系統性特殊化）。【TI-20140219】

這樣的想法也反映在 T1 的課室實務中，誠如探索期的研究發現，T1 認為樣式的探索需要透過不斷的嘗試，這樣的想法也形成了 T1 對於數學臆測中「系統化」的理解。

R：可是你今天不同在於將上次紀錄兩個改成三個，你又幫他們分類分好了。

T1：對啊，脈絡都先鋪好了。

R：依照你的習慣我認為你可以把他們的東西整理在下一張學習單裡。

T1：那就很多東西啊，會有多分細項狀況一、狀況二、狀況三這樣，列出來就一串啊，這一他們讀的話會不知道下一次的重心在哪裡，通常我們都是一直試誤、一直試誤，玩個一百次後，ㄟ，就發現是什麼、什麼！【TI-20131204】

在探索期時 T1 對於課室常規的關注一直與他「不讓一個孩子落後」的教學信念產生衝突，因為開放討論的課室中低成就孩子的學習參與度比較低，原因是 T1 沒有辦法在每個小組中逐一去關注不參與數學活動的低成就學生，在發展期時 T1 注意到可以透過小組幹部賦權與常規的建制來達成促進學生參與數學活動的目的。

T1：可是如果是傳統講述，低成就學生就可能會被列在趕的鴨子的最後一隻。但現在我會停在希望他不要去影響別人，他如果願意參與的時候可以參與，可是等到他有興趣參與的時候就是，因為他前面沒學到，他就沒有辦法去攻擊，就只能坐在那……

R：就常規啊！就是你要怎麼討論，討論的方法、反駁的方法，就是要一層一層去思考。

T1：嗯，他先要有常規才有學習、合作。【TI-20131231】

成熟期時，T1 會考慮數學活動設計內容幫助學生利用前面活動的數學知識作為先備知識，下述的皮克面積公式是奧地利數學家喬治皮克（Georg Pick，1859～1943）所發現的一個面積速算法，以格點為頂點的多邊形叫格點多邊形。若已知在多邊形內部的格點稱為內格點（代號 x ），在多邊形邊上的格點稱為邊格點（代號 y ），則面積可以透過 $\frac{y}{2} + x - 1$ 而得。T1 在設數學問題時，某種程度已先為學生預想到可能的延伸概念，儘管學生有可能不會遭遇到，然而運用已知猜想論證未知即是數學探究學習的重要旨趣之一。

T1：我發現我之前做的那個皮克面積公式，也是內格點一個變項，外格點一個變項。控制住內格點，觀察外格點變動去看面積的變化。

R：就是兩個變數就變難了！就像青蛙跳的 m 對 n 一樣。

T1：他很難直接看出來！【TI-20140305】

此外，T1 注意到探究活動中記錄對於學生數學思考的重要性，儘管有些學生能夠藉由心象來完成如河內塔的活動中的數學任務，T1 仍然認為符號紀錄式數學形式化思考中不可或缺的過程，其次，T1 會考慮到學生進行數學探究時所需要的數學內容知識。

R：今天紀錄的流暢性強很多。

T1：我發現他們會記下來...

.....

T1：可是我們希望的是他看到符號的對稱去看到其他的。

.....

T1：本來想說第二次就讓他們聚焦在記錄上，就直接從記錄中...【TI-20140305】

由於 T1 了解到不同學生應該給予不同程度的支持，「探究」對於 T1 而言是建構主動學習環境的脈絡，但學生必須先進行個人探究形成數學猜想，並藉由社會建構，在反駁、特殊化、系統化及一般化來來回回的歷程中藉由論證形成客觀性的知識。

探究就是分兩種，一種是個人的，一種的是社會的，個人的就是要自己去尋找 pattern 找規律，當然你要先理解題意，然後逐漸發展出自己的數學知識，然後再來跟其他人溝通、分享，透過合作方式分享，然後進到社會建構的過程，然後到發表再形成全班性的、一致的知識。

【TI-20131231】

R：你對探究的理解是什麼？

T1：就是佈一個豐富的情境，學生透過同儕的討論，在彼此的知識上建構新知。

R：那臆測跟探究有何不同？

T1：在探究的時候自然就會有人提出猜想、一般式的推論或提出反例加以反駁，所以兩個很難切割。【TI- 20140610】

（三）適性推論與建設性意向

NRC（2001）主張教學素養中的適性教學推論，強調教師能對教學設計與實作結果進行反思與推理，特別是針對學生學習困難、成因與可能對策的推理。在探索期時，對於 T1 而言數學探究教學所帶來最大的挑戰即是時間。

T1：時間一直是問題，因為要處理常規，所以時間就很趕，現在再壓進去就變成超趕，很多東西都只能交代過去，就更難在平常課室讓他探究。【TI-20131112】

R：為什麼不能直接破題啊？

T1：我覺得必勝的關鍵策略不能由我講出來，我只能用問句一直問、一直問，我覺得需要時間啦，他靜下來，說不定回去想想明天就有東西出來，但是時間就是有限。【TI-20131106】

T1 除了理解到時間是提升數學探究教學效能的關鍵外，為促使學生能在既定時間內達成有效的數學產出，在磋商過程中發現數學任務內容設計是最重要的環節，數學任務內容一直是 T1 很在意的議題，因為數學任務設計影響學生的數學參與、假設性學習軌線、先備知識以及 T1 對於學生數學探究學習的預期。

R：像上次的活動…他們來不及將他們的想法慢慢的消化掉，所以他們好像…沒有辦法在統整的時候有具體的內容。

T1：來不及想好又要轉述出來，又要發表。

R：所以一直以來你希望他們在最後能統整出一個精緻化的結果，一直出不來的原因也有可能在這裡。

T1：那解決的方式應該再降低階一點【TI- 20131106】

此外，T1 將任務設計類型分類成抽象思考與具象操做兩類，此點符應 Cañadas 等人(2007)的主張，即不同的任務類型能夠促進學生在不同的情境下引動數學臆測思維，而統整策略的運用，反映了 T1 希望藉由全班性的論述形成客觀的數學知識。

R：按照我們以前的討論，你讓學生靜下來後讓他又能進入數學情境的方式，就是條件設定好後現在開始玩，就有要有一個人負責記錄，然後上來說明過程發現什麼結果。

T1：可是現在又跳到只有純抽象思考，又沒有操作。

R：不然我們下一次就跳到同時並行啊！

T1：然後有立即的檢討。【TI- 20131204】

T1 建立學生數學探究學習社群最重要的策略是建立學習常規，一來幫助學生在學習軌線上進行有效的學習外，二來「不讓任一孩子落後」的真義是幫助學生建立一個自主的學習環境。

R：姑且不論學生的表現，就是這一年你這樣做下來有什麼感想？

T1：就是要建立遊戲規則，建立模式，不要一個（老師）對三十幾個（學生），叫他去做什麼，就是我以前會去告訴他們什麼是好的、什麼是對的、什麼是錯的，然後現在你應該做什麼、你不要做什麼，然後一個人一直去提醒、一直去提醒。【TI- 20140610】

回顧 T1 的專業成長歷程脈絡，建設性意向是主導 T1 發展數學探究教學的關鍵。研究初期 T1 採傳統講述教學原因是考量績效責任，幫助學生把講義上的例題精熟，就能讓學生的學習成就達到一定績效。因此，會產生學生參與活動意願不高的情形，因為數學任務內容無關乎考試，

也造成 T1 得花很多心力在提升學生對於數學活動的參與。在發展期 T1 改變了原先的意向，覺察自己是訓練學生探究學習的教練，專注於發展佈題策略外，更希望學生能夠「知其然，亦知其所以然」，因此強調記錄對於論證的重要。成熟期時，T1 在教師角色認同的覺察中，發現教學的核心價值在於以學生為中心，提供學生主動建構知識的環境、成功的學習經驗，「佈題」及「解決問題」是教師在實務上具體實踐改革教學信念的主要任務。

活動進入尾聲，這一年來的奮戰也接近收尾階段，這段時間感謝 R 不辭路途和時間的奔波，讓我在教學改變的現場不孤單，我們認真投入在教學上的改變，既使過了一整年，學校歷經觀課制度甚至推展教師評鑑，仍然顯得我們的作法立即而有效，而且專業又深入。對於在職的教師，其實真的最需要的就是客觀的觀課和專業的建議，也許每個環境和班級生態及教師信念都不相同，在給予教學建議上老師真的不是一次就能改變，但是只要有個明確的方向，教學模式的改變教師的精進不再只是口號。【TR- 20140219】

伍、結論與建議

一、結論

教師專業成長是教師在參與社群專業活動中所進行學習與改變（Clarke & Hollingsworth, 2002），並且教師教學專業成長來自於建立社群及關係、建立跨越理論及實務的連結、課程改革以及發展專業感等面向的支持（Arbaugh, 2003）；此外，教師唯有在改善教學實務過程中，體悟到學生學習上顯著性的改變才可能因此改變教學信念或態度（Guskey, 2002）。由於本研究旨於藉由超過一個學年的縱貫研究，探討一位國中現職教師在實踐社群的協助下於發展數學探究教學過程中，如何藉由對本身教學信念的覺察、教學實務的重塑、發展數學探究教學核心知識進行專業成長。在綜合分析各項研究結果後，本研究提出下列三項結論：

（一）信念改變源自於教學實務中的學習

教師在專業成長社群中，藉由對於教學實務的反思與實踐有助於改善教師教學實務進而提升學習品質（姚如芬，2006; Jaworski, 2001, 2006）；此外，教學是在實務中學習（Lave & Wenger, 1991），並且在過程中發展促進學生學習（Jaworski, 2006）。研究結果顯示初期 T1 對於數學任務佈建聚焦於如何安排非例行性任務給予學生挑戰，缺乏在過程中為學生搭建學習鷹架，以幫助學生獲致成功的學習經驗，並且初期對於「不讓任一孩子落後」信念的理解，影響了 T1 的數學探究教學任務設計於教學實務。在與師資培育社群反覆分享、討論、磋商及反思實踐後主要因為 T1 覺察到教師角色應不是「庶務性」的工作應以更高的層次即「佈題者」來思考教師自我角色認同；因此，T1 在專業成長歷程中發展出「由上而下的系統化佈題策略」，培養學生透過特殊化、系統化、一般化、反駁等策略發展數學臆測思維，並發展出多工教學程序以提升教學

效能。此項實徵性研究結果亦實證了國教輔導團多年協助數學教師進行專業成長的看法（李天堯，2011），教師的專業成長應在自主發展的過程中，藉由專業社群的協助有效推動教師的教學實踐與成長。此外為協助教師落實教學改革，應協助教師發現自己的教學核心價值及原則（Little, 1993）。研究結果亦發現，T1 在重新發現教學的核心價值與原則後，覺察到學生應是學習責任中心，認為探究教學的旨趣應是為學生建構一個主動學習環境，協助學生積極參與數學問題探究，並在良好的社會性脈絡中發展臆測思維及建構數學新知。

（二）教師臆測專業成長對於數學教學及研究社群之貢獻

由於學生數學臆測思維模式是在猜測、檢驗、反駁、相信的歷程中遞迴，並且課室中的臆測活動是一種探究教學，但在台灣相關教學研究或實務皆相當缺乏（陳英娥、林福來，1998）。本研究綜合個案教師教學經驗之敘說分析結果發現，個案教師的數學探究教學模式是建構在一個具有良好學習常規（社會性常規、數學學習常規）的學生探究社群上，在促進學生學習理解前提下以高觀點的策略性佈題，透過教學程序（論述管理、加減分）與教學策略（引導、佈題與統整）搭配，協助學生在特殊化、系統化、一般化及反駁的脈絡上建構數學知識。此一結果可提供正面臨教育改革實踐與傳統教學不可調和的張力（Gravemeijer, 1997）的現職教師，或是持有改革教學信念受制於環境影響存在教學信念與實務不一致的教師（Leatham, 2006），進行改革教學實作之參考；此外，數學臆測式數學探究的核心（Cañadas, et. al., 2007），本研究結果可提供有志於進一步發展臆測探究教學的研究者實徵證據之參考。

（三）數學探究教學理論與實踐

我們在協助個案教師發展數學探究教學過程中發現，教師在探究教學的嘗試過程中經常困惑於探究教學理論於實務間的矛盾與困惑，如 T1 在研究初期非常執著於要按照 5E 理論把每個步驟做完才算是完整的探究教學。我們理解到，教師磨合理論與實務間的「探究」即是教師專業成長發展的最佳架構（Crockett, 2002），因為探究即是在片段的關係中尋找和諧的整體（Peirce, 1955）。最終，T1 在教師角色認同中覺察「佈題」是最重要的關鍵，步驟、程序與策略皆是促進學生學習理解的手段。我們誠然相信，理論仍然具有參考的價值，因為理論是多人經驗的累積，在我們對於未知情境一無所悉之前，理論是最佳的經驗指引，但不同的人在實踐理論的過程會有不同的詮釋與調整，然而這不就是探究的真義——「探究」是工具（as a tool）更是本體存在的一種方式（as a way of being）（Jaworski, 2006）。

二、建議

本研究旨於探討一位國中現職教師發展數學臆測探究教學歷程，因此最終本研究擬從研究設計、研究方法與未來研究方向提出建議。

（一）教師專業成長社群的設置有助於教師專業成長

T1 在回顧這段專業發展歷程時勾勒出研究實踐社群對於教師教學改變始終是溫暖而間堅強的助力。此外，在 T1 所屬學校的教師社群中，研究者了解到有些教師雖有改變傳統教學意願但卻無所適從。建議未來協助在職教師進行專業成長的研究計畫，應融入教師日常教學活動，並協助有意願進行教學改變的教師共同組成專業成長學習社群，相信在研究實踐社群的支持下，教師必能在專業成長歷程中具體進行教學改革。

（二）關於改革取向教學

教育改革實踐與傳統教學間之所以存在不可調和的張力（Gravemeijer, 1997），其中可能原因除了教師所持有的教學信念外，事實上，教師發展探究教學是一漫長的信念與實務的改變過程（林勇吉、秦爾聰、段曉林，2010），從 T1 的專業成長歷程中我們可以發現，T1 因著教師自我角色認同覺察，發現在其初始信念的影響下，為學生擔負了大部分的學習責任，隨著學習責任中心的轉移，T1 也更能專注於學習環境的建置與佈題脈絡的精緻化。因此，建議初步嘗試教學改革的教師，應先行於課室中建立數學學習常規（Yackel & Cobb, 1996），如論述管理、小組角色（組長、風紀）的責任與賦權等以利建構學生探究學習社群（Goos, 2004）。

（三）關於教學設計

在本研究中參考以「探究」作為關鍵聯盟（critical alignment）的三階層研究設計（數學中的探究、數學教學中的探究與數學教學發展研究中的探究）（Jaworski, 2006），作為促進個案教師專業成長的三一架構，由於該架構將探究分三個層次來探討，若能依照該結構進行研究設計預期能有更細緻的研究產出，建議未來從事發展探究教學的研究者可以參考該研究設計。另外，不同的數學任務設計足以引動學生不同的臆測思維路徑（林碧珍，2015；Cañadas, et. al., 2007），在本研究中個案教師的任務設計僅略分為實體操作與抽象思考，並且，研究者未針對學生的數學思維發展做進一步資料蒐集與分析，建議未來有志於從事發展臆測探究教學研究之研究者，可進一步針對不同的臆測任務類型進行設計，相信根據學生的臆測思維路徑分析可以提供教師作為提升探究教學效能之參考。

（四）關於敘說探究研究方法

本研究採敘說探究作為主要質性研究方法，研究者發現敘說探究的定義眾說紛云，特別是在名詞的界定上如敘說探究、敘說分析、分析敘說，或者分析方法的區辨上如敘說分析、個案研究與論述分析等，對於初次嘗試以敘說探究作為研究方法的研究者而言可能莫衷一是。由於敘說探究文本撰寫是以故事方式呈現研究對象的經歷及遭遇，並且探究過程中研究者親自參與這些故事是「如何說出」以及「如何被說」，最後以參與者的角度詮釋及重現研究對象的經驗。

有鑑於此，建議未來初次採用敘說探究進行質性分析的研究者，除先釐清敘說探究的意義及敘說結構應如何形成外，對於需要邏輯實證的情節不妨輔以紮根理論進行分析，相信必有助於故事情節的配置發展及詮釋。

參考文獻

- 李天堯（2011 年 5 月）。試辦「數學領域全市專業成長社群」之經驗與省思。李林滄（主持人），主題二。99 學年度「數學領域輔導團永續經營研討會」暨「期末委員會議」發表之論文，國立臺北教育大學。【Lee, Tian-Yao (May, 2011). Experiences and reflections on the pilot of "Professional Development Community of Hsinchu City in Mathematics". In Lin-Tsang Lee (Chair), *Second theme*. Paper presented at the 2010 academic year of "Seminar on continuing management of Compulsory Education Counseling Group in Mathematics" and "Term of Committee Meeting", National Taipei University of Education. (in Chinese)】
- 李源順、林福來、陳美芳。（2012）。理論與實務持分者對不同身分國小教師所需數學教學專業知能觀點之比較研究。*科學教育學刊*，26(6)，539-562。doi: 10.6173/CJSE.2012.2006.03【Lee, Yuan-Shun, Lin, Fou-Lai, & Chen, Mei-Fang (2012). Professional knowledge/competence of mathematics teaching of different elementary teacher identities: The compare of theory and practice stakeholders. *Chinese Journal of Science Education*, 26(6), 539-562. doi: 10.6173/CJSE.2012.2006.03 (in Chinese)】
- 林勇吉、秦爾聰、段曉林（2010）。以敘說探究探討一位國中教師發展數學探究教學之信念與實務。*教育科學研究期刊*，55(3)，1-32。【Lin, Yung-Chi, Chin, Erh-Tsung, & Tuan, Hsiao-Lin (2010). Utilization of a narrative approach case study to investigate the implementation of mathematics inquiry teaching. *Journal of Research in Education Sciences*, 55(3), 1-32. (in Chinese)】
- 林碧珍（2015）。國小三年級課室以數學臆測活動引發學生論證初探。*科學教育學刊*，23(1)，83-110。doi: 10.6173/CJSE.2015.2301.04【Lin, Pi-Jen (2015). The exploration of conjecturing provoking argumentation of mathematics in a third grade classroom. *Chinese Journal of Science Education*, 23(1), 83-110. doi: 10.6173/CJSE.2015.2301.04 (in Chinese)】
- 姚如芬（2006）。成長團體之「成長」—小學教師數學教學專業之探究。*科學教育學刊*，14(3)，309-331。doi: 10.6173/CJSE.2006.1403.04【Yao, Ju-Fen (2006). Investigation of elementary teachers' professional development in mathematics instruction through a community "MTGG". *Chinese Journal of Science Education*, 14(3), 309-331. doi: 10.6173/CJSE.2006.1403.04 (in Chinese)】
- 陳英娥、林福來（1998）。數學臆測的思維模式。*科學教育學刊*，6(2)，191-218。【Chen, Ing-Er, & Lin, Fou-Lai (1998). A thinking model of conjecturing. *Chinese Journal of Science Education*, 6(2), 191-218. (in Chinese)】
- American Association for the Advancement of Science. (1993). *Benchmarks for scientific literacy: Project 2061*. New York, NY: Oxford University Press.
- American Federation of Teachers. (2002). *Principles for professional development*. Washington, DC: Author.

- Arbaugh, F. (2003). Study groups as a form of professional development for secondary mathematics teacher. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 6(2), 139-163. doi: 10.1023/A:1023928410992
- Aulls, M. W., & Shore, B. M. (2008). *Inquiry in education. Volume I: The conceptual foundations for research as a curricular imperative*. New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.
- Biesta, G., Priestley, M., & Robinson, S. (2015). The role of beliefs in teacher agency. *Teachers and Teaching*, 21(6), 624-640. doi: 10.1080/13540602.2015.1044325
- Branch, J. L., & Oberg, D. (2004). *Focus on inquiry: A teacher's guide to implementing inquiry-based learning*. Edmonton, AB: Alberta Learning.
- Briscoe, C. (1991). The dynamic interactions among beliefs, role metaphors, and teaching practices: A case study of teacher change. *Science Education*, 75(2), 185-199. doi: 10.1002/sce.3730750204
- Cañadas, M. C., Deulofeu, J., Figuerias, L., Reid, D., & Yevdokimov, O. (2007). The conjecturing process: Perspectives in theory and implications in practice. *Journal of Teaching and Learning*, 5(1), 55-72. doi: 10.22329/jtl.v5i1.82
- Clandinin, D. J., & Connelly, F. M. (1996). Teachers' professional knowledge landscapes: Teacher stories—stories of teachers—school stories—stories of schools. *Educational Researcher*, 25(3), 24-30. doi: 10.3102/0013189X025003024
- Clandinin, D. J., & Connelly, F. M. (2000). *Narrative inquiry. Experience and story in qualitative research*. San Francisco, CA: Wiley.
- Clarke, D., & Hollingsworth, H. (2002). Elaborating a model of teacher professional growth. *Teaching and Teacher Education*, 18(8), 947-967. doi: 10.1016/S0742-051X(02)00053-7
- Cochran-Smith, M., & Lytle, S. L. (1999). Relationships of knowledge and practice: Teacher learning in communities. *Review of Research in Education*, 24, 249-305. doi: 10.3102/0091732X024001249
- Cohen, D. K., McLaughlin, M. W., & Talbert, J. E. (Eds.). (1993). *Teaching for understanding: Challenges for policy and practice*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.
- Connelly, F. M., & Clandinin, D. J. (1990). Stories of experience and narrative inquiry. *Educational Researcher*, 19(5), 2-14. doi: 10.3102/0013189X019005002
- Crockett, M. D. (2002). Inquiry as professional development: Creating dilemmas through teachers' work. *Teaching and Teacher Education*, 18(5), 609-624. doi: 10.1016/S0742-051X(02)00019-7
- Desimone, L. M. (2011). A primer on effective professional development. *Phi Delta Kappan*, 92(6), 68-71. doi: 10.1177/003172171109200616
- Fennema, E., & Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147-164). New York, NY: Macmillan Publishing Company.
- Franco, C., Sztajn, P., & Ortigão, M. I. R. (2007). Mathematics teachers, reform, and equity: Results from the Brazilian national assessment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(4), 393-419.
- Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L., & Fennema, E. (2001). Capturing teachers' generative change: A follow-up study of professional development in mathematics. *American Educational Research Journal*, 38(3), 653-689. doi: 10.3102/00028312038003653

- Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 225-256). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Furinghetti, F., & Pehkonen, E. (2002). Rethinking characterizations of beliefs. In G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törrner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education* (pp. 39-57). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.
- Glaser, B. G. (1992). *Basics of grounded theory analysis: Emergence vs forcing*. Mill Valley, CA: Sociology Press.
- Goos, M. (2004). Learning mathematics in a classroom community of inquiry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(4), 258-291. doi: 10.2307/30034810
- Gravemeijer, K. (1997). Solving word problems: A case of modelling? *Learning and Instruction*, 7(4), 389-397. doi: 10.1016/S0959-4752(97)00011-X
- Guskey, T. R. (2002). Professional development and teacher change. *Teachers and Teaching: Theory and Practice*, 8(3), 381-391. doi: 10.1080/135406002100000512
- Harlen, W. (2014). Helping children's development of inquiry skills. *Inquiry in Primary Science Education*, 1, 5-19.
- Jaworski, B. (1992). Mathematics teaching: What is it? *For the Learning of Mathematics*, 12(1), 8-14.
- Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching: A constructivist enquiry*. London, UK: The Falmer Press.
- Jaworski, B. (2001). Developing mathematics teaching: Teachers, teacher educators, and researchers as co-learners. In F. L. Lin & T. J. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 295-320). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/978-94-010-0828-0_14
- Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: Critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(2), 187-211. doi: 10.1007/s10857-005-1223-z
- Jaworski, B. (2015). Mathematics meaning-making and its relation to design of teaching. *PNA*, 9(4), 261-272.
- Kaasila, R. (2007). Using narrative inquiry for investigating the becoming of a mathematics teacher. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 39(3), 205-213. doi: 10.1007/s11858-007-0023-6
- Kent, B. (1997). The interconnectedness of Peirce's diagrammatic thought. In N. Houser, D. D. Roberts, & J. Van Evra (Eds.), *Studies in the logic of Charles Sanders Peirce* (pp. 445-459). Indianapolis, IN: Indiana University Press.
- Labov, W. (1972). *Language in the inner city: Studies in the black English vernacular*. Philadelphia, PA: University of Pennsylvania Press.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge, UK: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9781139171472

- Lave, J. (1996). Teaching, as learning, in practice. *Mind, Culture, and Activity*, 3(3), 149-164. doi: 10.1207/s15327884mca0303_2
- Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge, UK: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9780511815355
- Lavonen, J., Jauhiainen, J. Koponen, T. I., & Kurki-Suonio, K. (2004). Effect of a long-term in-service training program on teachers' beliefs about the role of experiments in physics education. *International Journal of Science Education*, 26(3), 309-328. doi: 10.1080/095006903200007433
- Leatham, K. R. (2006). Viewing mathematics teachers' beliefs as sensible systems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(1), 91-102. doi: 10.1007/s10857-006-9006-8
- Lin, F. L., & Tsao, L. C. (1999). Exam maths re-examined. In C. Hoyles, C. Morgan, & G. Woodhouse (Eds.), *Rethinking the mathematics curriculum* (pp. 228-239). London, UK: Falmer Press.
- Little, J. W. (1993). Teachers' professional development in a climate of educational reform. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 15(2), 129-151. doi: 10.3102/01623737015002129
- Little, J. W. (2006). *Professional community and professional development in the learning-centered school*. Washington, DC: National Education Association.
- Mason, J. (1998). Enabling teachers to be real teachers: Necessary levels of awareness and structure of attention. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1(3), 243-267.
- Mason, J., Burton L., & Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically* (2nd ed.). Harlow, UK: Pearson Education Limited.
- Meyer, M. (2010). Abduction — A logical view of investigation and initiating processes of discovering mathematical coherence. *Educational Studies in Mathematics*, 74(2), 185-205. doi: 10.1007/s10649-010-9233-x
- National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Research Council (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Peirce, C. S. (1955). The nature of mathematics. In J. Buchler (Ed.), *Philosophical writings of Peirce* (pp. 135-149). New York, NY: Dover.
- Polkinghorne, D. E. (1995). Narrative configuration in qualitative analysis. *International Journal of Qualitative Studies in Education*, 8(1), 5-23. doi: 10.1080/0951839950080103
- Putnam, R. T., & Borko, H. (2000). What do new views of knowledge and thinking have to say about research on teacher learning? *Educational Researcher*, 29(1), 4-15. doi: 10.3102/0013189X029001004
- Richards, J. (1991). Mathematical discussions. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 13-51). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer. doi: 10.1007/0-306-47201-5_2
- Riessman, C. K. (1993). *Narrative analysis. Qualitative research methods series, volume 30*. Newbury Park, CA: Sage.

- Rushton, S. P. (2004). Using narrative inquiry to understand a student-teacher's practical knowledge while teaching in an inner-city school. *The Urban Review*, 36(1), 61-79. doi: 10.1023/B:URRE.0000042736.78181.61
- Sarason, S. B. (1990). *The predictable failure of educational reform: Can we change course before it's too late?* San Francisco, CA: Jossey-Bass.
- Schön, D. A. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. New York, NY: Basic Books.
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145. doi: 10.2307/749205
- Simon, M. A. (1997). Developing new models of mathematics teaching: An imperative for research on mathematics teacher development. In E. Fennema & B. Scott-Nelson (Eds.), *Mathematics teachers in transition* (pp. 55-86). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1997). Understanding and improving classroom mathematics instruction: An overview of the TIMSS video study. *Phi Delta Kappan*, 79(1), 14-21.
- Strauss, A., & Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research: Grounded theory procedures and techniques*. Newbury Park, CA: Sage.
- Strauss, A., & Corbin, J. (1998) *Basics of qualitative research: Grounded theory procedures and techniques* (2nd ed.) London, UK: Sage.
- Trowbridge, L. W., & Bybee, R. W. (1990). *Becoming a secondary school science teacher* (5th ed.). New York, NY: Merrill.
- Wenger, E. (2015, April 15). *Communities of practice: A brief introduction*. Retrieved from <http://wenger-trayner.com/introduction-to-communities-of-practice/>
- Witherell, C., & Noddings, N. (1991). *Stories lives tell: Narrative and dialogue in education*. New York, NY: Teachers College Press.
- Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477. doi: 10.2307/749877

Chiu, M. S. (2017).

Identifying effective e-teaching and general mathematical teaching profiles to predict student mathematical cognition and affect. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, 4(2), 69-94.

doi: 10.6278/tjme.20171018.001

Identifying Effective E-Teaching and General Mathematical Teaching Profiles to Predict Student Mathematical Cognition and Affect

Mei-Shiu Chiu

Department of Education, National Chengchi University

The aim of this study was to identify the profiles of approaches to e-teaching and general teaching (g-teaching) and to explore the differences between the profiles in terms of student mathematical cognition and affect. Latent profile analysis (LPA) was applied to evaluate 3,978 Taiwanese 15-year-old students' perceived e-teaching and g-teaching behaviors (formative assessment, student orientation, and teacher direction) in mathematics classrooms. LPA identified four e/g-teaching profiles: parsimony, conservation, moderation, and liberal. Multivariate analysis of variance (MANOVA) and post hoc tests were used to examine profile differences in each element of cognition and affect; structural equation modeling (SEM) was used in latent constructs of cognition and affect. The combined MANOVA and SEM results indicated that moderation e/g-teaching benefits both cognition and affect, parsimony benefits cognition at the expense of affect, and both conservation and liberal benefit affect.

Keywords: e-teaching, latent profile analysis, mathematics affect, mathematics cognition, mathematics pedagogy

Corresponding author : Mei-Shiu Chiu , e-mail : meishiuchiu@gmail.com

Received : 9 January 2017;

Accepted : 18 October 2017.

邱美秀 (2017)。

辨識可預測學生數學認知和情意的有效 E 化和一般數學教學法組合：潛在剖面分析法。

臺灣數學教育期刊，4 (2)，69-94。

doi: 10.6278/tjme.20171018.001

辨識可預測學生數學認知和情意的有效 E 化和 一般數學教學法組合

邱美秀

國立政治大學教育學系

本研究旨在辨識 E 化和一般數學教學法的組合類型，並探討所辨識出的教學組合類型在學生數學認知和情意上的差異情形。以潛在剖面分析 (LPA) 方法分析 3,978 名臺灣 15 歲學生在數學教室中的 E 化數學教學和三項一般性的數學教學法 (形成性評量、學生導向和教師指導)。LPA 的結果辨識出四種 E 化與一般數學教學法組合：節約、保守、協調和自由使用 E 化與一般數學教學法的組合。接著，使用多變量變異數分析 (MANOVA) 和事後檢驗，來考驗四種教學法組合在學生各數學認知和情意細項內容上的差異，並且使用結構方程模式 (SEM) 考驗四種教學法組合在認知和情意二潛在構念上的差異。MANOVA 和 SEM 的分析結果顯示：協調的 E 化與一般數學教學法組合同時有益於學生認知和情意，節約的 E 化與一般數學教學法組合有利認知但犧牲情意，保守和自由的 E 化與一般數學教學法組合有利於情意。

關鍵詞：E 化教學、潛在剖面分析、數學情意、數學認知、數學教學法

通訊作者：邱美秀，e-mail：meishiuchiu@gmail.com

收稿：2017 年 1 月 9 日；

接受刊登：2017 年 10 月 18 日。

Introduction

Information and communication technology (ICT) has gradually been incorporated into general teaching (g-teaching), resulting in “e-teaching” (González, 2012). The relationships between e- and g-teaching, however, remain vague. Both e- and g-teaching may include pedagogies or practices for traditional, lifelong, and connected learning (Blignaut, Hinojosa, Els, & Brun, 2010). Pedagogical knowledge can fully comprise technological pedagogical knowledge or technological pedagogical content knowledge (Chai, Koh, & Tsai, 2013). The term “blended teaching” (González, 2012) explicitly indicates the diverse practices of integrating e- and g-teaching in real educational settings.

Researchers have identified different approaches to integrating e- and g-teaching (termed “e/g-teaching” in this study). Innovative e/g-teaching cases (e.g., Tan & Tan, 2015) and survey studies (e.g., Sang, Valcke, van Braak, & Tondeur, 2010) have integrated e- and g-teaching on the basis of ideas or theories. Qualitative studies have categorized methods of using ICT in teaching (González, 2012). These studies have tended to define or group e/g-teaching in a predetermined categorical manner. The aim of the current study was to identify e/g-teaching profiles on the basis of student perceptions of real mathematics teaching by using latent profile analysis (LPA) (Fraley & Raftery, 2007). LPA is a person-centered clustering method that aims to maximize the most likely profiles of distinct meanings on the basis of empirical data. LPA can exceed the linear relationship between e/g-teaching and learning outcomes to identify nonlinear profiles likely to address differences in learning outcomes. Examples of nonlinear relationships between e- and g-teaching include teachers using both e- and g-teaching intensively (e.g., the constructivist approach; Park et al., 2015), using e- and g-teaching moderately (e.g., the balance approach; Tan & Tan, 2015), and using e-teaching for g-teaching (e.g., the traditional approach; Lan, Chang, & Chen, 2012).

After the patterns of mathematics teachers’ e/g-teaching are identified, assessing how the patterns relate to students’ cognitive and affective learning outcomes is essential. Mathematics teaching and national curricula both relate to and emphasize learning outcomes in both cognitive and affective aspects (Chiu, 2009; Chiu & Whitebread, 2011). Competent mathematics learners require both cognitive and affective dispositions, such as domain knowledge, meta-knowledge, heuristics methods, self-regulatory skills, and beliefs about self and mathematical learning (De Corte, 2004). The current study also devoted partial attention to ICT availability and socioeconomic status (SES), which may condition e/g-teaching profiles (Cuckle & Clarke, 2002). In summary, the purpose of this study included identifying profiles or

patterns of mathematics teachers' e/g-teaching and assessing how the identified profiles interact with students' cognitive and affective learning outcomes, conditioned by students' ICT availability and SES.

Approaches to Integrating E- and G-Teaching

E/g-teaching profiles can be implied by past studies on approaches to integrating e- and g-teaching. Traditional and constructivist approaches are two extremes, and balance and theoretical approaches are mixed types of e/g-teaching, as shown in the following paragraphs.

The traditional, activating, or teacher-centred approach. This approach entails using ICT to present concepts, explain ideas, and lead discussion (Lan et al., 2012). Most teachers appear to focus on this traditional method of e-teaching (Blignaut et al., 2010; Louw, Brown, Muller, & Soudien, 2009; Smeets, 2005).

The constructivist, facilitating, or student-centred approach. This approach entails using ICT as a platform to transform teacher roles from dominant to parallel status (Park et al., 2015). Examples of this approach include collaborative creative writing (Vass, 2007) and use of Web 2.0 tools (Chai, Koh, Ho, & Tsai, 2012).

The balance approach. This approach entails using ICT as a tool to compensate for conventional g-teaching methods for distinct blocks of teaching sessions (Tan & Tan, 2015). For example, g-teaching (paper-and-pencil or concept development) is followed by e-teaching (ICT use for generalization or application).

The theoretical or pedagogical approach. E- and g-teaching can be fully integrated by existing higher-order conceptions of g-teaching. Examples of g-teaching conceptions include reflection (Leijen, Admiraal, Wildschut, & Robert-Jan Simons, 2008), learning theories, teacher knowledge (Benson & Brack, 2009), and learning models (e.g., cognition, action, and reflection) (Lan et al., 2012). This approach fully integrates e- and g-teaching, through which e-teaching has actually transformed existing g-teaching conceptions into innovative ones. (Nachmias, Mioduser, & Forkosh-Baruch, 2010; Tømte, Enochsson, Buskqvist, & Kårstein, 2015).

Relations between E/G-Teaching Profiles and Learning Outcomes

Student learning outcomes can be effectively promoted by both e- and g-teaching, such as collaborative learning in both face-to-face and online settings (Solimeno, Mebane, Tomai, & Francescato, 2008). Teachers tend to perceive ICT use as potentially benefiting student learning outcomes in the aspects or constructs of cognition (e.g., mathematics knowledge) and affect (e.g.,

motivation and collaborative skills) (Blignaut et al., 2010). If both e- and g-teaching can benefit students, the next question may be what e/g-teaching profiles are more effective than others in benefiting cognition and affect.

Cognition. Mathematical cognition for learners can be defined as applying mathematical knowledge and reasoning to study patterns and relationships (Burton, 1994). Mathematics education researchers have identified the cognitive activities involved in mathematical problem-solving. For example, mathematical problem-solving may include the procedures of understanding, planning, implementing, and reviewing (Polya, 1945, 1962) and addressing problems, thus reflecting on the experience, studying the process of resolving problems, and noticing the interaction between the experience and what is learned (Mason, Burton, & Stacey, 1996).

Successful mathematics cognitive activities can be measured as mathematics performance or achievements. Research has indicated that student achievements positively relate to teacher-centered g-teaching, such as reasoning orientation (Thorvaldsen, Vavik, & Salomon, 2012), direct instruction, and frequent test use to assess student learning, and negatively relate to rule orientation (Hinostroza, Labbé, Brun, & Matamala, 2011). The effects of e-teaching on achievement are perceived by teachers of low mathematics-ability classes but less often by those of high-ability ones (Thorvaldsen et al., 2012), who may nevertheless frequently employ e-teaching (Hinostroza et al., 2011). Positive relations between constructivist e-teaching and students' meaningful learning perceptions, achievements, and course satisfaction may not be guaranteed (Wurst, Smarkola, & Gaffney, 2008) without formative feedback (Espasa & Meneses, 2010). Therefore, formative assessment in teaching and learning processes may play a role in the effect of e/g-teaching on learning outcomes.

Affects. Mathematics affects are an indispensable part of mathematics cognitive activities (Gómez-Chacón, 2000; Hannula, 2002). Mathematics affects include beliefs (e.g., I can competently solve problems), attitudes (e.g., I enjoy problem-solving), and emotions (e.g., mathematics is beautiful) (McLeod, 1992, 1994). Confidence-related mathematics beliefs (including self-efficacy) typically have high correlations with mathematics achievement (Chiu, 2012b; Grootenboer & Hemmings, 2007). E-teaching generally benefits student affects such as self-efficacy or confidence (Tan & Tan, 2015), interest, and engagement. Constructivist e-teaching (e.g., real-world settings, collaboration, and individual choices) can increase student interest in science (Wilson & Boldeman, 2012) and engagement (Rappa, Yip, & Baey, 2009). College teachers having multiple g-teaching concerns and using ICT for

teaching tend to emphasize the roles of g-teaching in engaging students through ICT use (Webster & Son, 2015).

Relations Between E/G-Teaching Profiles and Conditions

Naturally, e-teaching at school is conditioned by school ICT availability (Cuckle & Clarke, 2002). Constructivist e-teaching further requires student ICT availability (Smeets, 2005). SES is potentially another condition, which generally has a positive relation with home ICT availability, ICT use quality, and achievement (Lee & Wu, 2012).

Research Questions

The literature review suggests that innovative and diverse e/g-teaching profiles may be identified on the basis of real context data by using nonlinear person-based modeling analysis. The identified profiles may address differences in learning outcomes in the explicit elements or latent constructs of cognition and affect through profile difference analysis partially considering conditions. Therefore, the objective of this study was to answer the following three research questions (RQs):

1. What are the profiles of mathematics e-teaching (ICT use) and g-teaching behaviors (formative assessment, student orientation, and teacher direction) perceived by students?
2. What are the differences between the identified profiles in the explicit elements of cognition (e.g., employing, formulating, and interpreting), affects (e.g., self-efficacy, interest, and engagement), and conditions (e.g., SES, home ICT availability, and school ICT availability)?
3. How do the identified profiles, conditioned by school ICT availability, predict differences in the latent constructs of cognition and affect?

Method

Data Source and Sample

This study used data on Taiwan from the main and ICT surveys of the Programme for International Student Assessment (PISA) in 2012 (Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD], 2014b). The PISA started in 2000 and is a triennial international survey examining the achievement of 15-year-old students, principally in the fields of mathematics, science, and reading. PISA also collects self-report, contextual data from students, teachers, schools, parents, and national PISA administrators. PISA 2012 is the fifth survey focusing on mathematics.

The total Taiwan sample of PISA 2012 comprised 6,046 students. The four e/g-teaching measures

used in this study (cf. the Measures section) included approximately 33.6% missing data, which prevented the use of LPA to identify e/g-teaching profiles (cf. the Data Analysis section). To handle the problem of missing data, multiple imputation procedures were attempted by using the mix package in R. However, the several imputed data sets generated unstable profile solutions, implying that different imputed data sets generated different profile solutions. Therefore, listwise deletion was used for the four e/g-teaching measures, which resulted in a total sample of 3,978 students in this study. Sampling weights were not used in this study because of the considerable amount of missing data and the use of listwise deletion. Accordingly, the findings of this study can only be explained as a phenomenon of the specific sample and cannot be generalized to the population.

The exact sample sizes for the other measures, as derived after the aforementioned listwise deletion, are presented in Table 1. Notably, the affective measures had small sample sizes because of missing data (Table 1), implying that some participating students did not fully complete the related affective measures in the survey. Medium correlations were observed between self-efficacy and mathematics cognitive measures ($r = .63, .64$, and $.59$), and these results are consistent with previous study findings revealing stable relationships between achievement- and confidence-related constructs (Chiu, 2012b; Grootenboer & Hemmings, 2007). Moreover, medium correlations were observed between self-efficacy and the other two affective measures ($r = .43$ and $.48$, respectively), implying relatively high differences between self-efficacy and the other two affective measures. This may result in lower factor loadings for either self-efficacy or the other two affective measures.

Measures

This study focused on 13 student measures obtained from the PISA 2012 database (OECD, 2014a, 2014b). These measures were grouped into four categories (e/g-teaching, cognition, affect, and condition). All 13 measures were derived from several items in the PISA data sets and rescaled using item response theory, with higher scores representing higher degrees in the meanings of these measures. Table 2 presents detailed information on the 13 measures, including measure names in this study; original labels in the PISA data set; item stems, sample items, and item numbers; measurement methods; OCED means, standard deviations (*SDs*), and internal reliability coefficients (Cronbach's alpha (α)); and Taiwan's α . Table 1 presents the means and *SDs* of the present Taiwan sample.

Data Analysis

The RQs were answered through statistical analysis using the software R Version 3.1.3 (R Core

Table 1
Descriptive Statistics and Correlations Between E/G-Teaching Behaviors, Cognition, Affects, and Conditions

	<i>N</i>	<i>Mean</i>	<i>SD</i>	<i>r</i>											
Measures				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<i>E/g-teaching behaviors</i>															
1. ICT use	3978	-0.43	0.75												
2. Formative assessment	3978	-.10	.95	<u>.09</u>											
3. Student orientation	3978	.01	.98	<u>.13</u>	<u>.50</u>										
4. Teacher direction	3978	-.07	1.06	<u>.06</u>	<u>.68</u>	<u>.42</u>									
<i>Cognition</i>															
5. Employing	3978	547.38	107.12	<u>-.12</u>	-.01	<u>-.28</u>	.01								
6. Formulating	3978	577.25	134.29	<u>-.12</u>	-.02	<u>-.28</u>	-.01	<u>.95</u>							
7. Interpreting	3978	547.57	102.01	<u>-.12</u>	<u>-.05</u>	<u>-.31</u>	-.02	<u>.94</u>	<u>.92</u>						
<i>Affects</i>															
8. Self-efficacy	1980	.18	1.18	-.01	<u>.14</u>	<u>-.07</u>	<u>.13</u>	<u>.63</u>	<u>.64</u>	<u>.59</u>					
9. Interest	1981	.02	.96	<u>.10</u>	<u>.32</u>	<u>.13</u>	<u>.27</u>	<u>.32</u>	<u>.32</u>	<u>.26</u>	<u>.43</u>				
10.Engagement	1985	.07	.98	<u>.09</u>	<u>.27</u>	<u>.10</u>	<u>.19</u>	<u>.45</u>	<u>.43</u>	<u>.37</u>	<u>.48</u>	<u>.53</u>			
<i>Conditions</i>															
11.SES	3968	-.39	.84	<u>-.04</u>	<u>.06</u>	<u>-.07</u>	<u>.05</u>	<u>.43</u>	<u>.40</u>	<u>.38</u>	<u>.32</u>	<u>.11</u>	<u>.25</u>		
12.Home ICT availability	3976	-.35	.92	.03	<u>.09</u>	<u>.06</u>	<u>.04</u>	<u>.10</u>	<u>.10</u>	<u>.08</u>	<u>.15</u>	.01	<u>.11</u>	<u>.44</u>	
13.School ICT availability	3967	-.22	.82	<u>.08</u>	<u>.15</u>	<u>.11</u>	<u>.12</u>	.03	.03	.01	.04	<u>.07</u>	<u>.09</u>	<u>.08</u>	<u>.22</u>

Note. The underlined correlations (*rs*) are significant at $p = .05$.

Table 2

Detailed Descriptions of the 13 Measures

Measure name	PISA label	Item stem sample items (item numbers)	Measurement methods	OECD mean	OECD SD	OECD α	Taiwan mean	Taiwan SD	Taiwan α
<i>E/g-teaching behaviors</i>									
1. ICT use	Use of ICT in Mathematic Lessons	Within the last month, has a computer ever been used for the following purposes in your mathematics lessons? Drawing the graph of a function (such as $y = 4x+6$). (7 items)	3-point Likert scale: 1 = yes, students did this, 2 = yes, but only the teacher demonstrated this, 3 = no. (reverse coded)	-1.57	1.57	.91	-.43	.75	.95
2. Formative assessment	Teacher Behavior: Formative Assessment	How often do these things happen in your mathematics lessons? The teacher gives me feedback on my strengths and weaknesses in mathematics. (4 items)	4-point Likert scale: 1 = every lesson ~ 4 = never or hardly ever (reverse coded)	-.28	1.35	.76	-.10	.95	.74
3. Student orientation	Teacher Behavior: Student Orientation	(The same item stem as the above.) The teacher has us work in small groups to come up with joint solutions to a problem or task. (4 items)	(Same as the above)	-.98	1.06	.68	.01	.98	.69
4. Teacher direction	Teacher Behavior: Teacher-directed Instruction	(The same item stem as the above.) The teacher asks me or my classmates to present our thinking or reasoning at some length. (5 items)	(Same as the above)	.54	1.14	.73	-.07	1.06	.78
<i>Cognitions</i>									
5. Employing	Plausible value 1 in process subscale of Maths - Employ	(PISA 2012 released mathematics problems)	Cognitive performance test	493*	na	.91	547.38	107.12	.93
6. Formulating	Plausible value 1 in process subscale of Maths - Formulate	(PISA 2012 released mathematics problems)	Cognitive performance test	492*	na	.89	577.25	134.29	.93
7. Interpreting	Plausible value 1 in process subscale of Maths - Interpret	(PISA 2012 released mathematics problems)	Cognitive performance test	497*	na	.90	547.57	102.01	.90

(continued)

Table 2 (continued)

Measure name	PISA label	Item stem sample items (item numbers)	Measurement methods	OECD mean	OECD SD	OECD α	Taiwan mean	Taiwan SD	Taiwan α
<i>Affects</i>									
8. Self-efficacy	Mathematics Self-Efficacy	How confident do you feel about having to do the following mathematics tasks? Calculating how many square metres of tiles you need to cover a floor. (8 items)	4-point Likert scale: 1 = very confident ~ 4 = not at all confident (reverse coded)	1.15	1.50	.85	.18	1.18	.91
9. Interest	Mathematics Interest	Thinking about your views on mathematics: to what extent do you agree with the following statements? I enjoy reading about mathematics. (4 items)	4-point Likert scale: 1= strongly agree ~ 4 = strongly disagree (reverse coded)	-.82	2.93	.89	.02	.96	.91
10. Engagement	Mathematics Behavior	How often do you do the following things at school and outside of school? I do mathematics more than 2 hours a day outside of school. (8 items)	4-point Likert scale: 1 =always or almost always ~ 4 =never or rarely (reverse coded)	-1.55	1.12	.72	.07	.98	.76
<i>Conditions</i>									
11. SES	Index of economic, social and cultural status	(1) home possessions, (2) the highest parental occupation, and (3) the highest parental education. (3 items)	3 derived items, each z-standardized	-.22	.94	.65	-.39	.84	.69
12. Home ICT availability	ICT Availability at Home	Are any of these devices available for you to use at home? Desktop computer; portable laptop or notebook; Internet connection. (11 items)	3-point Likert scale: 1 = yes, and I use it, 2 = yes, but I don't use it, 3 = no (reverse coded)	.59	.76	.53	-.35	.92	.63
13. School ICT availability	ICT Availability at School	Are any of these devices available for you to use at school? Desktop computer; portable laptop or notebook; Internet connection. (7 items)	(Same as the above)	-.21	1.15	.65	-.22	.82	.59

Note. The OECD data with * were obtained from Figure I.2.37 in OECD (2014a) and the other OECD data and Taiwan's α were obtained from OECD (2014b). Taiwan's means and SDs were calculated on the basis of the final sample (n = 3978) used in this study. α = Cronbach's alpha (internal reliability coefficient); na = not available.

Team, <http://www.R-project.org/>). This study focused on answering the three RQs, but descriptive statistics and correlations (obtained by the psych and stats packages in R) facilitated a basic understanding of the measures and data structures.

RQ 1 was investigated through LPA, because all the 13 measures were continuous variables (Muthén & Muthén, 2012); the analysis was conducted using the mclust package in R. LPA can identify latent profiles with distinct meanings such as different SES levels (Chittleborough, Mittinty, Lawlor, & Lynch, 2014) and combinations of academic/cognitive, social/emotional, and behavioral risks (Wang & Peck, 2013). LPA is more efficient than conventional cluster analysis (Chiu, Douglas, & Li, 2009). A simulation study indicated that the mclust package in R tends to outperform Latent Gold® and the poLCA package in R, particularly for continuous measures (Haughton, Legrand, & Woolford, 2009). The mclust package applies a model-based clustering technique and uses higher Bayesian information criterion (BIC) values to represent more favorable profile number solutions. Notably, Mplus (Muthén & Muthén, 2012), another software package widely used by researchers for LPA, uses lower BIC values to represent more effective profile number solutions, because Mplus and mclust use different formulae for the BIC. A priori theories may also be used to determine proper profile numbers (Marsh, Lüdtke, Trautwein, & Morin, 2009). This means that profile names and numbers must be determined by considering existing research findings and educational practices in a society. For example, direct teaching and liberal teaching may be one of the dominant mathematics teaching profiles in Taiwan (Chiu, 2009; Chiu & Whitebread, 2011).

RQ 2 was answered through multivariate analysis of variance (MANOVA) for the categories of cognition, affect, and condition by using the base package in R. When MANOVA results showed significant differences, each element in the category was subjected to analysis of variance (ANOVA), followed by TukeyHSD post hoc tests using the base package. Subsequently, effect sizes (partial eta squared (η^2)) were obtained using the heplots, MASS, and car packages. According to Cohen (1988, p. 283), $.01 < \eta^2 < .06$ shows small effect sizes, $.06 < \eta^2 < .14$ medium effect sizes, and $\eta^2 > .14$ large effect sizes.

RQ 3 was answered through structural equation modeling (SEM) using the MASS, matrixcalc, and sem packages. The SEM technique used in this study focused on multiple-indicator/multiple-cause (MIMIC) analysis, because the models were aimed at examining profile differences (cf. Figure 2) (Hsu, Zhang, Kwok, Li, & Ju, 2011). Similar to MANOVA and ANOVA, MIMIC examines profile differences but additionally allows for measures with underlying latent constructs and conditions to be included in

one model (Green & Thompson, 2006). The major criteria for determining model goodness of fit included (1) a root mean square error of approximation (RMSEA) lower than .10, (2) comparative fit index (CFI) higher than .90, and (3) nonnormed fit index (NNFI) higher than .90 (Hair, Black, Babin, & Anderson, 2010). Because of the large sample size in this study, the conventional criterion, a nonsignificant chi-square (χ^2), would be easily violated (Bollen & Long, 1993). Thus, χ^2 did not serve as the major criterion in this study.

Results

Profiles of Mathematics E/G-Teaching

The results of LPA involving the default testing of one to nine profiles by using the mclust package showed that seven profiles were the optimal solutions, as revealed by the highest BIC value (−29089.43) associated with the EEV (ellipsoidal, equal volume, and shape) model in Figure 1. Nevertheless, the seven-profile EEV solution generated indistinguishable means between the seven profiles and was difficult to interpret on the basis of theories or research findings. The three-, four-, and six-profile EEV solutions had relatively high BIC values (−32458.69, −32245.01, and −30807.00, respectively). The profile means of the three-, four-, and six-profile EEV solutions showed that the four-profile solution tended to be theoretically interpretable (Marsh et al., 2009) and was thus used for further analysis.

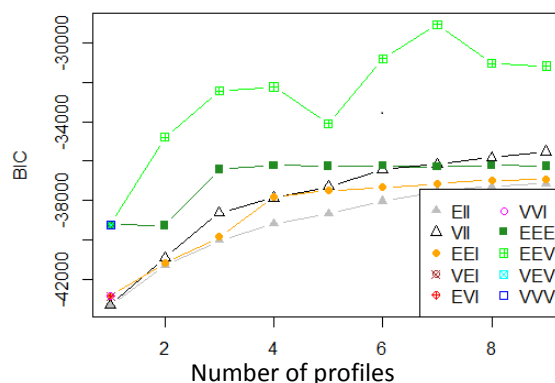


Figure 1 BIC values by number of profiles obtained through latent profile analysis. Multivariate mixture models used by the mclust package in R: EII = spherical, equal volume; VII = spherical, unequal volume; EEI = diagonal, equal volume and shape; VVI = diagonal, varying volume, equal shape; EEV = diagonal, equal volume, varying shape; VVE = diagonal, varying volume and shape; EEE = ellipsoidal, equal volume, shape, and orientation; EEV = ellipsoidal, equal volume and equal shape; VEV = ellipsoidal, equal shape; VVV = ellipsoidal, varying volume, shape, and orientation (Fraley, Raftery, & Scrucca, 2015, p. 28).

The MANOVA results showed that the four profiles differed in some e/g-teaching behaviors (Wilks = .22; $F_{(4,3973)} = 3386.60$, $p < .0005$, $\eta^2 = .77$). The ANOVA and TukeyHSD post hoc test results indicated significant differences between the four profiles in the four e/g-teaching behaviors (Table 3). As shown by the last column in Table 3 for ICT use, students in Profiles C and D experienced more e-teaching than those in Profiles A and B ($CD > AB$); students in Profile D experienced more ICT use in teaching than those in Profile C ($D > C$). The same interpretation methods applied to formative assessment ($BD > A$; $B > CD$; $D > C$), student orientation ($BD > A$; $B > CD$; $D > C$), and teacher direction ($BCD > A$; $B > CD$). The differences between the profiles in the four e/g-teaching behaviors had medium to large effect sizes ($\eta^2 = .08$ for student orientation to $.79$ for ICT use). On the basis of these results, the profiles are designated and interpreted as follows.

Parsimony e/g-teaching (Profile A). The parsimony approach to e/g-teaching involves low e-teaching (ICT use) ($M = -.77$) and medium, below-average g-teaching ($M_s = -.22, -.11$, and $-.25$ for formative assessment, student orientation, and teacher direction, respectively). In other words, parsimony teachers do not intensively use either e-teaching or g-teaching strategies in mathematics classrooms. Most students ($75\% = 2980/3978$) experienced parsimony e/g-teaching.

Conservation e/g-teaching (Profile B). The major characteristic of conservation e/g-teaching is high degrees of g-teaching behaviors, with extremely high teacher direction ($M = 2.55$) and frequent use of formative assessment ($M = 1.34$) and student orientation ($M = 1.10$). However, conservation teachers seldom use ICT ($M = -.76$). Approximately 4% ($=163/3978$) of the students experienced conservation e/g-teaching.

Moderation e/g-teaching (Profile C). The moderation profile revealed medium degrees of e/g-teaching in all four behaviors, with ICT use as the highest ($M = .52$), followed by teacher direction, formative assessment, and student orientation ($M = .11, -.09$, and $-.10$, respectively). Approximately 9% ($= 348/3978$) of students experienced moderation e/g-teaching.

Liberal e/g-teaching (Profile D). The major characteristic of liberal e/g-teaching is intensive ICT use ($M = 1.07$) with emphasis on student orientation ($M = .41$) supplemented by formative assessment and teacher direction ($M_s = .18$ and $.03$, respectively). Approximately 12% ($= 487/3978$) of the students experienced liberal e/g-teaching.

Profile Differences in Explicit Elements of Cognition, Affect, and Condition

The MANOVA results revealed that profile differences occurred in some cognitive elements (Wilks = .99; $F_{(3,3974)} = 14.00$, $p < .0005$, $\eta^2 = .01$). In addition, the ANOVA results showed significant

differences between the four profiles in all the three cognitive elements (Table 3). The TukeyHSD post hoc test results indicated that students who experienced Profiles A and C exhibited higher employing, formulating, and interpreting abilities in mathematics than did those who experienced Profiles B and D. The profile differences in the three cognitive elements had small effect sizes ($\eta^2 = .02$ for all three cognitive elements).

The MANOVA results showed some profile differences in the three affects (Wilks = .98; $F_{(3,1968)} = 14.55$, $p < .0005$, $\eta^2 = .02$). Furthermore, the ANOVA and TukeyHSD post hoc test results revealed no profile difference in self-efficacy ($\eta^2 = .00$) but significant differences in interest (Profiles B, C, and D > Profile A; $\eta^2 = .02$) and engagement (Profile D > Profile A; $\eta^2 = .01$).

The MANOVA results showed some profile differences in the conditions (Wilks = .99; $F_{(3,3951)} = 18.03$, $p < .0005$, $\eta^2 = .01$). Moreover, the ANOVA and TukeyHSD post hoc tests revealed no profile differences in SES and home ICT availability ($\eta^2 = .00$ for both) but a significant difference in school ICT availability (Profiles B, C, and D > Profile A; $\eta^2 = .01$). The results imply that profile differences may only be conditioned by school ICT availability, a result suggested in previous research (Cuckle & Clarke, 2002). Thus, the subsequent SEM analyses included only school ICT availability as the conditioning variable in the models.

Profile Differences Predicting Latent Cognition and Affect

SEM was applied to analyze six models (configured as Figure 2), with every two profiles being dummy coded to examine their differences in the latent constructs of cognition and affect; the two constructs were set to be correlated, a general phenomenon in mathematics education (Chiu, 2012a). The SEM results showed that the six models were acceptable, as indicated by all the NNFI and CFI values being higher than .90 and RMSEA values being equal to .10, except for the RMSEA value (= .11) of Model 5 (Table 4).

Table 3

Descriptive Statistics and Results of ANOVA and TukeyHSD Post Hoc Tests for the 4 Identified E/G-Teaching Profiles

	Profile A: Parsimony			Profile B: Conservation			Profile C: Moderation			Profile D: Liberal			ANOVA			TukeyHSD
	e/g-teaching			e/g-teaching			e/g-teaching			e/g-teaching						post hoc test
	<i>N</i> 1	Mean	<i>SD</i>	<i>N</i> 2	Mean	<i>SD</i>	<i>N</i> 3	Mean	<i>SD</i>	<i>N</i> 4	Mean	<i>SD</i>	<i>F</i> _(<i>df</i>1,<i>df</i>2)	<i>p</i>	η^2	<i>p</i> < .05
<i>E/g-teaching behaviors</i>																
ICT use	2980	-.77	.05	163	-.76	.09	348	.52	.35	487	1.07	.93	4960.00	<.0005	.79	CD>AB;D>C*
Formative assessment	2980	-.22	.89	163	1.34	.96	348	-.09	1.01	487	.18	.83	175.90	<.0005	.12	BD>A;B>CD;D>C
Student orientation	2980	-.11	.91	163	1.10	1.41	348	-.10	1.00	487	.41	.89	120.80	<.0005	.08	BD>A;B>CD;D>C
Teacher direction	2980	-.25	.89	163	2.55	.12	348	.11	1.05	487	.03	.98	507.50	<.0005	.28	BCD>A;B>CD
<i>Cognitions</i>																
Employing	2980	552.42	105.11	163	517.32	102.19	348	562.08	105.33	487	516.08	114.77	22.89	<.0005	.02	AC>BD
Formulating	2980	584.24	131.57	163	536.08	129.05	348	592.20	135.36	487	537.58	142.22	23.80	<.0005	.02	AC>BD
Interpreting	2980	553.17	99.60	163	512.22	97.07	348	560.97	103.24	487	515.58	108.78	28.05	<.0005	.02	AC>BD
<i>Affects</i>																
Self-efficacy	1480	.16	1.20	97	.36	1.28	172	.30	1.05	231	.13	1.07	1.70	1.70	.00	NS
Interest	1481	-.06	.94	98	.34	1.15	171	.20	.93	231	.26	.94	14.03	<.0005	.02	BCD>A
Engagement	1484	.01	.97	98	.17	1.10	172	.21	.94	231	.27	1.02	.01	.0002	.01	D>A
<i>Conditions</i>																
SES	2972	-.38	.82	162	-.39	.87	348	-.37	.87	486	-.48	.87	2.17	.09	.00	NS
Home ICT availability	2980	-.37	.90	162	-.22	.99	347	-.39	.85	487	-.26	1.03	3.092	.03	.00	NS
School ICT availability	2971	-.27	.81	163	-.10	.83	348	-.07	.77	485	-.05	.90	15.69	<.0005	.01	BCD>A

Note. *D > C = Profiles D > Profiles C (same interpretation methods applying to the others). Small effect size: $.01 < \eta^2 < .06$; medium effect size: $.06 < \eta^2 < .14$; large effect size: $\eta^2 > .14$ (Cohen, 1988, p. 283). $F_{(df1,df2)} = F_{(3,N1+N2+N3+N4-4)}$; df = degree of freedom. NS = not significant.

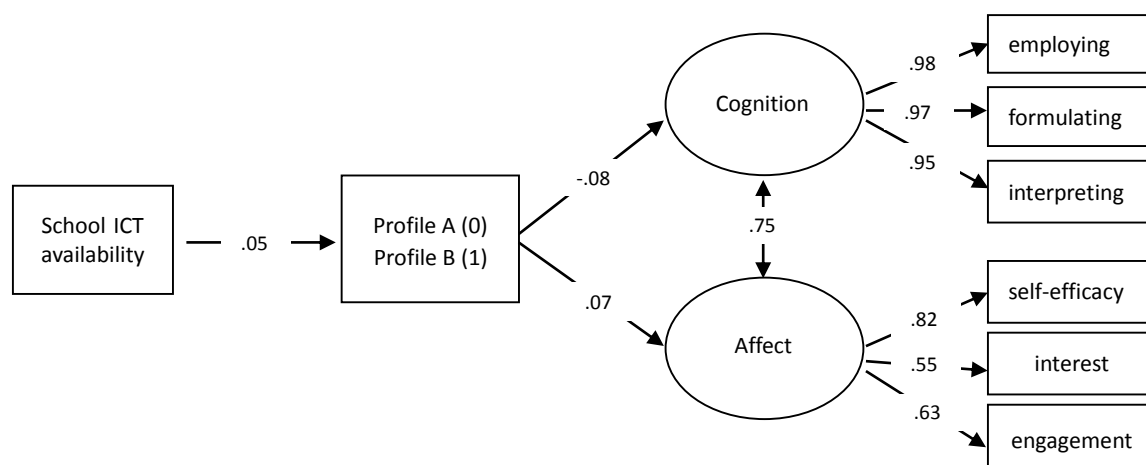


Figure 2 Structural model for the effects of profile differences on latent cognition and affect. Model 1 (Table 4) served as an example with Profile A coded as 0 and Profile B as 1. All the parameter estimates presented are significant at $p = .05$.

Table 4

Parameter Estimates Obtained by SEM

Relation	Model	Model 1	Model 2	Model 3	Model 4	Model 5	Model 6
		Profile A(0)	Profile A(0)	Profile A(0)	Profile B(0)	Profile B(0)	Profile C(0)
		Profile B(1)	Profile C(1)	Profile D(1)	Profile C(1)	Profile D(1)	Profile D(1)
school ICT -> profiles		<u>.05</u>	<u>.08</u>	<u>.09</u>	.01	.02	.01
profiles -> cognition		<u>-.08</u>	.03	<u>-.12</u>	<u>.21</u>	.00	<u>-.21</u>
profiles -> affect		<u>.07</u>	<u>.07</u>	<u>.06</u>	-.03	<u>-.07</u>	<u>-.04</u>
cognition <-> affect		<u>.75</u>	<u>.74</u>	<u>.75</u>	<u>.76</u>	<u>.74</u>	<u>.75</u>
cognition -> employing		<u>.98</u>	<u>.98</u>	<u>.98</u>	<u>.96</u>	<u>.98</u>	<u>.96</u>
cognition -> formulating		<u>.97</u>	<u>.97</u>	<u>.96</u>	<u>.95</u>	<u>.97</u>	<u>.95</u>
cognition -> interpreting		<u>.95</u>	<u>.95</u>	<u>.94</u>	<u>.93</u>	<u>.95</u>	<u>.93</u>
affect -> self-efficacy		<u>.82</u>	<u>.82</u>	<u>.81</u>	<u>.83</u>	<u>.83</u>	<u>.81</u>
affect -> interest		<u>.55</u>	<u>.55</u>	<u>.56</u>	<u>.54</u>	<u>.54</u>	<u>.55</u>
affect -> engagement		<u>.63</u>	<u>.63</u>	<u>.64</u>	<u>.62</u>	<u>.62</u>	<u>.64</u>
Fit indexes							
χ^2		<u>780.80</u>	<u>778.84</u>	<u>798.29</u>	<u>802.97</u>	<u>847.99</u>	<u>792.99</u>
df		18	18	18	18	18	18
RMSEA		.10	.10	.10	.10	.11	.10
NNFI		.95	.95	.95	.95	.94	.95
CFI		.97	.97	.97	.97	.96	.97

Note. The underlined figures are significant at $p = .05$.

The factor loadings for cognition leading to employing, formulating, and interpreting (.93–.98) were large, and those for affect leading to self-efficacy, interest, and engagement (.54–.83) were acceptable (above .30; Costello & Osborne, 2005, p. 3). The two constructs (cognition and affect) were highly correlated (.74–.76), as suggested by previous research (Chiu, 2012b). These results suggest that SEM is suitable for examining profile differences because the six measures of cognition and affect have underlying constructs. SEM also allows for including school ICT availability as a condition. School ICT availability plays significant roles for models including Profile A (i.e., Models 1–3 in Table 4), with Profile A having less school ICT availability than Profiles B, C, and D (parameter estimates = .05, .08, and .09 respectively).

Both RQs 2 and 3 focused on the differences between the profiles in learning outcomes of cognition and affect, but RQ 2 focused on those in explicit elements and RQ 3 focused on those in latent elements. Table 5 presents a comparison of the answers to RQs 2 and 3. The answers to RQs 2 and 3 were the same in explicit and latent cognition (Profiles A and C > Profiles B and D), interest, latent affect (Profiles B, C, D > Profile A for both), and school ICT availability (Profiles B, C, and D > Profile A). The answers to RQs 2 and 3 differed only in affects, with Profile D having more engagement than Profile A but having less latent affect than Profiles B and C. One reason for the slightly unstable answers about affects may be that the factor loadings of the three affective elements were not as large as those of the three cognitive elements (Table 4).

Table 5 presents a comprehensive description of profile differences. The results were stable for cognition. Profiles A and C were determined to benefit cognitive learning outcomes more than Profiles B and D did. In affective learning outcomes, the profile differences were relatively unstable, which means that the four profiles performed slightly differently between different observed measures and the latent measure. Nevertheless, a general trend still occurred: Profile D was determined to benefit affect most, followed by Profiles B and C, and then Profile A. Profile differences in conditions were stable: the only difference occurred in school ICT availability. Detailed interpretations of the four profiles and their differences in learning outcomes are presented in the Discussion section.

Table 5

Test Results of Profile Differences in Cognition, Affect, and Condition Obtained by MANOVA and SEM

	MANOVA and related post hoc tests (Table 3)	SEM(Table 4)
<i>Cognitions</i>	na	AC>BD
Employing	AC>BD*	na
Formulating	AC>BD	na
Interpreting	AC>BD	na
<i>Affects</i>	na	BCD>A; BC>D
Self-efficacy	NS	na
Interest	BCD>A	na
Engagement	D>A	na
<i>Conditions</i>	na	na
SES	NS	na
Home ICT availability	NS	na
School ICT availability	BCD>A	BCD>A

Note. *AC > BD = Profiles A and C > Profiles B and D (same interpretation methods applying to the others); NS = not significant; na = not available.

Discussion

Four E/G-Teaching Profiles Addressing Differences in Learning Outcomes

In this study, the statistical method, LPA, identified four student-perceived profiles of e- and g-teaching behaviors in mathematics classrooms: parsimony, conservation, moderation, and liberal. The four identified profiles are context-based and partially mirror previous theories and findings, but they also provide new insights into approaches to integrating e- and g-teaching. Moderation e/g-teaching appears to be similar to the balance and pedagogical approaches; conservation e/g-teaching is similar to the traditional/activating/teacher-centered approach; liberal e/g-teaching is similar to the constructivist approach; and parsimony e/g-teaching has limited use of either e- or g-teaching pedagogies, which is not reported in the literature. The profiles further relate to learning outcomes in different degrees, as presented in descending order as follows.

Moderation e/g-teaching (Profile C). Moderation teaching often involves ICT use, and it also involves teacher direction but not at the expense of formative assessment and student orientation. Profile C is similar to the balance approach, in which e-teaching (or ICT) is used to compensate for g-teaching

(Tan & Tan, 2015), and is similar to the theoretical or pedagogical approach, in which the higher-order conception of g-teaching is fully integrated with e-teaching (Tømte et al., 2015). The moderation profile appears to be the most effective e/g-teaching profile in terms of its positive effects on both student cognition and affect among the four identified profiles (Tables 3–5). E-teaching increases not only student interest but also noise because of novel materials/tasks and collaborative works (Watts & Lloyd, 2004). ICT use may increase difficulty in teaching, and the difficulty may be reduced by high-quality teacher direction in design and management.

Parsimony e/g-teaching (Profile A). This approach, experienced by most students, combines slight use of e-teaching and slightly medium but below-average use of g-teaching in Taiwanese mathematics classrooms (Table 2). The parsimony profile benefits student cognition but may be at the expense of student affect, having the least affect among the four profiles (Table 5). The parsimony profile depicts mathematics teaching and learning to be serious and boring. Parsimony teachers have medium, below-average degrees of g-teaching, in addition to having the highest degree of student orientation, followed by formative assessment and teacher direction. Parsimony e/g-teaching may reflect Confucianism (emphasizing respectable teachers' serious roles) in Taiwanese society and recent constructivism (emphasizing student-centered teaching) in Taiwanese mathematics curricula (Chiu, 2011).

Conservation e/g-teaching (Profile B). Conservation teachers frequently engage in direction supplemented by formative assessment and student orientation. The conservation profile appears to partially reflect traditional/activating/teacher-centered approaches to e/g-teaching, in which e-teaching is seldom used or only for traditional purposes such as presenting materials (Lan et al., 2012). The conservation profile benefits affects but not cognition, a result different from previous research findings that high-quality g-teaching behaviors benefit cognition (Hinostroza et al., 2011; Thorvaldsen et al., 2012). One reason may be that effective g-teaching, which implies intense affective teacher–student relations, relates to affect (e.g., engagement) more than to cognition (e.g., achievements) (Roorda, Koomen, Spilt, & Oort, 2011).

Liberal e/g-teaching (Profile D). In a liberal classroom, class time is mostly allocated for teacher and student ICT use with high student orientation and medium, above-average formative assessment and teacher direction (Table 3). This profile appears to slightly reflect the constructivist approach to integrating e- and g-teaching (Park et al., 2015). The liberal profile benefits student interest, engagement, and latent affect (compared with Profile A), but its benefit to latent affect is slightly less than those of

the moderation or conservation profiles (Table 5). The slight benefit of the liberal profile to affect, but not to cognition, is unsatisfactory because constructivist approaches to e-teaching can transform educational practices, which is advocated by scholars (e.g., Chai et al., 2012). ICT use in mathematics teaching requires teachers to extend their expertise from g-teaching to e/g-teaching, especially when teachers aim for a liberal e/g-teaching profile. Teachers with a liberal profile may need more professional development and support than those with the other three profiles. How to transform the liberal profile from benefiting only affect to benefiting both affect and cognition remains a concern for educators and future research.

Few Profile Differences in Conditions

Profile differences occur in school ICT availability, not in SES or home ICT availability (Table 3). Future research should consider other potential conditions that may play a role in e-teaching, such as digital learning materials, school management, and ICT technical support (Cuckle & Clarke, 2002; Shohel & Kirkwood, 2012; Somyürek, Atasoy, & Özdemir, 2009).

Only the parsimony profile was observed to involve low school ICT availability, which may partially explain the low ICT use revealed by the parsimony profile (Table 3). However, after being conditioned by school ICT availability, the parsimony profile was still observed to involve high student cognition and low affect (cf. Table 5 for comparison between the MANOVA and SEM solutions). The results regarding the conditioning effects of school ICT availability on cognition and affect imply that g-teaching behaviors play more roles in student learning outcomes than simple ICT use. ICT use in teaching may need to be closely linked to g-teaching for achieving traditional learning objectives of subject matters. Future research should validate this speculation.

Limitation and Suggestions for Education and Future Research

A limitation of this study is that the three affective measures appeared to perform differently, which may reduce the model fit to data because of measurement errors. In particular, self-efficacy acted differently from the other two affective measures (i.e., interest and engagement). The results show that self-efficacy exhibited higher correlations with cognitive measures than the other two affective measures did (Table 1). Furthermore, the profiles differed in interest and engagement but not in self-efficacy (Table 3). However, self-efficacy had a higher factor loading than interest and engagement did (Figure 2). All the results imply that different affective measures of mathematics may represent dissimilar constructs such as different beliefs, attitudes, and emotions (McLeod, 1992, 1994). Future research can investigate the diversity and complexity of affective constructs and their interaction with diverse

cognitive measures and e- and g-teaching profiles.

The second limitation may be that the four e/g-teaching profiles were identified by statistical methods. Future research should investigate the validity of the four teaching profiles in real educational settings and interpret the identified four teaching profiles by using real cases in actual mathematics classrooms.

The four e/g-teaching profiles identified in this study and their interaction with student cognitive and affective learning outcomes may provide valuable suggestions for mathematics education practices. Moderation e/g-teaching, which is moderately open to using ICT and diverse general teaching methods, appears to benefit students most in both cognitive and affective mathematics learning outcomes. The results suggest that the comprehensive but moderate use of diverse teaching methods, including e-teaching, may be one of the most favorable choices for developing effective teaching for student learning outcomes. Future research should validate whether moderate e/g-teaching is superior to parsimony teaching in terms of affective learning outcomes and whether it is superior to both conservation teaching and liberal teaching in terms of cognitive learning outcomes.

Conclusion

The major contribution of this study is the use of LPA to identify student-perceived e/g-teaching profiles (latent nonlinear relationships between e- and g-teaching behaviors) that successfully demonstrate the differences in students' mathematics cognition and affect. First, the identified four e/g-teaching profiles contribute new knowledge to mathematics education research. The four e/g-teaching profiles identified in this study are outlined as follows: parsimony (low e-teaching and medium, below-average g-teaching), conservation (low e-teaching and high g-teaching, particularly in teacher direction), moderation (medium e-teaching and g-teaching), and liberal (high e-teaching and medium, above-average g-teaching of student orientation, formative assessment, and teacher direction, in descending order). The moderation profiles appear to be similar to the balance and pedagogical approaches and represent a thoughtful, considerate, and cautious use of e- and g-teaching. The conservation profile tends to reflect the traditional/activating/teacher-centered approaches to integrating e- and g-teaching, and the liberal profile reflects the constructivist/facilitating/student-centered approaches. The parsimony profile appears to be new in the literature and limited by school ICT availability.

Second, linking the identified teaching profiles with cognitive and affective learning outcomes provides practical implications for mathematics education. MANOVA and SEM were determined to generate similar results regarding the differences between the profiles in terms of learning outcomes;

however, MANOVA focused on elements and SEM focused on constructs of cognitive and affective outcomes. The moderation profile benefits both student cognition and affect. The parsimony profile benefits cognition but may harm affect. The two extreme profiles, conservation and liberal, benefit only affects. The literature tends to advocate constructivist e-teaching practices. However, the current study, based on data from a real educational setting, suggests that moderate ICT use with the merit of diverse g-teaching behaviors (in particular, teacher direction) may optimize student cognition and affect.

Finally, the successful use of LPA to identify distinct teaching profiles and the use of MANOVA and SEM to link teaching profiles with learning outcomes contribute a methodology to future research. Future educational research can use similar statistical methods to find context-based, effective teaching profiles for predicting diverse learning outcomes.

Acknowledgement

This study was supported by the Ministry of Science and Technology, Taiwan (MOST 103-2410-H-004-137; MOST 104-2410-H-004-143-MY2).

References

- Benson, R., & Brack, C. (2009). Developing the scholarship of teaching: What is the role of e-teaching and learning? *Teaching in Higher Education*, 14(1), 71-80. doi: 10.1080/13562510802602590
- Blignaut, A. S., Hinostroza, J. E., Els, C. J., & Brun, M. (2010). ICT in education policy and practice in developing countries: South Africa and Chile compared through SITES 2006. *Computers & Education*, 55(4), 1552-1563. doi: 10.1016/j.compedu.2010.06.021
- Bollen, K. A., & Long, J. S. (1993). *Testing structural equation models*. Newbury Park, CA: Sage.
- Burton, L. (1994). *Children learning mathematics: Patterns and relationships*. Hertfordshire, UK: Simon & Schuster.
- Chai, C. S., Koh, J. H. L., Ho, H. N. J., & Tsai, C. C. (2012). Examining preservice teachers' perceived knowledge of TPACK and cyberwellness through structural equation modelling. *Australasian Journal of Educational Technology*, 28(6), 1000-1019. doi: 10.14742/ajet.807
- Chai, C. S., Koh, J. H. L., & Tsai, C. C. (2013). A review of technological pedagogical content knowledge. *Educational Technology & Society*, 16(2), 31-51.
- Chittleborough, C. R., Mittinty, M. N., Lawlor, D. A., & Lynch, J. W. (2014). Effects of simulated interventions to improve school entry academic skills on socioeconomic inequalities in educational achievement. *Child Development*, 85(6), 2247-2262. doi: 10.1111/cdev.12309
- Chiu, C. Y., Douglas, J. A., & Li, X. (2009). Cluster analysis for cognitive diagnosis: Theory and applications. *Psychometrika*, 74(4), 633-665. doi: 10.1007/s11336-009-9125-0
- Chiu, M. S. (2009). Approaches to the teaching of creative and non-creative mathematical problems. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7(1), 55-79. doi: 10.1007/s10763-007-9112-9

- Chiu, M. S. (2012a). Identification and assessment of Taiwanese children's conceptions of learning mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10(1), 163-191. doi: 10.1007/s10763-011-9283-2
- Chiu, M. S. (2012b). The internal/external frame of reference model, big-fish-little-pond effect, and combined model for mathematics and science. *Journal of Educational Psychology*, 104(1), 87-107. doi: 10.1037/a0025734
- Chiu, M. S., & Whitebread, D. (2011). Taiwanese teachers' implementation of a new 'constructivist mathematics curriculum': How cognitive and affective issues are addressed. *International Journal of Educational Development*, 31(2), 196-206. doi: 10.1016/j.ijedudev.2010.06.014
- Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences* (2nd ed.). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Costello, A. B., & Osborne, J. W. (2005). Best practices in exploratory factor analysis: Four recommendations for getting the most from your analysis. *Practical Assessment, Research & Evaluation*, 10(7), 1-9.
- Cuckle, P., & Clarke, S. (2002). Mentoring student-teachers in schools: Views, practices and access to ICT. *Journal of Computer Assisted Learning*, 18(3), 330-340. doi: 10.1046/j.0266-4909.2002.00244.x
- De Corte, E. (2004). Mainstreams and perspectives in research on learning (mathematics) from instruction. *Applied psychology*, 53(2), 279-310. doi: 10.1111/j.1464-0597.2004.00172.x
- Espasa, A., & Meneses, J. (2010). Analysing feedback processes in an online teaching and learning environment: An exploratory study. *Higher Education*, 59(3), 277-292. doi: 10.1007/s10734-009-9247-4
- Fraley, C., & Raftery, A. E. (2007). Model-based methods of classification: Using the mclust software in chemometrics. *Journal of Statistical Software*, 18(6), 1-13. 10.18637/jss.v018.i06
- Fraley, C., Raftery, A., & Scrucca, L. (2015, February 20). *Package 'mclust' Version 4.4 reference manual*. Retrieved from <http://cran.r-project.org/web/packages/mclust/mclust.pdf>
- Gómez-Chacón, I. M. (2000). Affective influences in the knowledge of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 43(2), 149-168. doi: 10.1023/A:1017518812079
- González, C. (2012). The relationship between approaches to teaching, approaches to e-teaching and perceptions of the teaching situation in relation to e-learning among higher education teachers. *Instructional Science*, 40(6), 975-998. doi: 10.1007/s11251-011-9198-x
- Green, S. B., & Thompson, M. S. (2006). Structural equation modelling for conducting tests of differences in multiple means. *Psychosomatic Medicine*, 68(5), 706-717. doi: 10.1097/01.psy.0000237859.06467.ab
- Grootenboer, P., & Hemmings, B. (2007). Mathematics performance and the role played by affective and background factors. *Mathematics Education Research Journal*, 19(3), 3-20. doi: 10.1007/BF03217459
- Hair, J. F. Jr., Black, W. C., Babin, B. J., & Anderson, R. E. (2010). *Multivariate data analysis: A global perspective* (7th ed.). Upper Saddle River, NJ: Pearson Education.
- Hannula, M. S. (2002). Attitude towards mathematics: Emotions, expectations and values. *Educational Studies in Mathematics*, 49(1), 25-46. doi: 10.1023/A:1016048823497

- Haughton, D., Legrand, P., & Woolford, S. (2009). Review of three latent class cluster analysis packages: Latent Gold, poLCA, and MCLUST. *The American Statistician*, 63(1), 81-91. doi: 10.1198/tast.2009.0016
- Hinostroza, J. E., Labbé, C., Brun, M., & Matamala, C. (2011). Teaching and learning activities in Chilean classrooms: Is ICT making a difference? *Computers & Education*, 57(1), 1358-1367. doi: 10.1016/j.compedu.2011.01.019
- Hsu, H. Y., Zhang, D., Kwok, O. M., Li, Y., & Ju, S. (2011). Distinguishing the influences of father's and mother's involvement on adolescent academic achievement: Analyses of Taiwan Education Panel Survey data. *The Journal of Early Adolescence*, 31(5), 694-713. doi: 10.1177/0272431610373101
- Lan, Y. J., Chang, K. E., & Chen, N. S. (2012). CoCAR: An online synchronous training model for empowering ICT capacity of teachers of Chinese as a foreign language. *Australasian Journal of Educational Technology*, 28(6), 1020-1038. doi: 10.14742/ajet.808
- Lee, Y. H., & Wu, J. Y. (2013). The indirect effects of online social entertainment and information seeking activities on reading literacy. *Computers & Education*, 67, 168-177. doi: 10.1016/j.compedu.2013.03.001
- Leijen, Ä., Admiraal, W. F., Wildschut, L., & Robert-Jan Simons, P. (2008). Pedagogy before technology: What should an ICT intervention facilitate in practical dance classes? *Teaching in Higher Education*, 13(2), 219-231. doi: 10.1080/13562510801923351
- Louw, J., Brown, C., Muller, J., & Soudien, C. (2009). Instructional technologies in social science instruction in South Africa. *Computers & Education*, 53(2), 234-242. doi: 10.1016/j.compedu.2009.02.001
- Marsh, H. W., Lüdtke, O., Trautwein, U., & Morin, A. J. S. (2009). Classical latent profile analysis of academic self-concept dimensions: Synergy of person- and variable-centred approaches to theoretical models of self-concept. *Structural Equation Modelling: A Multidisciplinary Journal*, 16(2), 191-225. doi: 10.1080/10705510902751010
- Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1996). *Thinking mathematically* (Rev. ed.). Wokingham, UK: Addison-Wesley.
- McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 575-596). New York, NY: Macmillan.
- McLeod, D. B. (1994). Research on affect and mathematics learning in the JRME: 1970 to the present. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(6), 637-647. doi: 10.2307/749576
- Muthén, L. K., & Muthén, B. O. (2012). *Mplus user's guide* (7th ed.). Los Angeles, CA: Muthén & Muthén.
- Nachmias, R., Mioduser, D., & Forkosh-Baruch, A. (2010). ICT use in education: Different uptake and practice in Hebrew-speaking and Arabic-speaking schools in Israel. *Journal of Computer Assisted Learning*, 26(6), 492-506. doi: 10.1111/j.1365-2729.2010.00374.x
- Organisation for Economic Co-operation and Development. (2014a). *PISA 2012 results: What students know and can do – Student performance in mathematics, reading and science* (Volume I, Revised edition, February 2014). Paris, France: Author. doi: 10.1787/9789264208780-en

- Organisation for Economic Co-operation and Development. (2014b). *PISA 2012 technical report*. Paris, France: Author.
- Park, J. B. H., Schallert, D. L., Sanders, A. J., Williams, K. M., Seo, E., Yu, L. T., ... Knox, M. C. (2015). Does it matter if the teacher is there?: A teacher's contribution to emerging patterns of interactions in online classroom discussions. *Computers & Education*, 82, 315-328. doi: 10.1016/j.compedu.2014.11.019
- Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Polya, G. (1962). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving* (Vol. I). New York, NY: John Wiley & Sons.
- Rappa, N. A., Yip, D. K. H., & Baey, S. C. (2009). The role of teacher, student and ICT in enhancing student engagement in multiuser virtual environments. *British Journal of Educational Technology*, 40(1), 61-69. doi: 10.1111/j.1467-8535.2007.00798.x
- Roorda, D. L., Koomen, H. M. Y., Spilt, J. L., & Oort, F. J. (2011). The influence of affective teacher-student relationships on students' school engagement and achievement: A meta-analytic approach. *Review of Educational Research*, 81(4), 493-529. doi: 10.3102/0034654311421793
- Sang, G., Valcke, M., van Braak, J., & Tondeur, J. (2010). Student teachers' thinking processes and ICT integration: Predictors of prospective teaching behaviors with educational technology. *Computers & Education*, 54(1), 103-112. doi: 10.1016/j.compedu.2009.07.010
- Shohel, M. M. C., & Kirkwood, A. (2012). Using technology for enhancing teaching and learning in Bangladesh: Challenges and consequences. *Learning, Media and Technology*, 37(4), 414-428. doi: 10.1080/17439884.2012.671177
- Smeets, E. (2005). Does ICT contribute to powerful learning environments in primary education? *Computers & Education*, 44(3), 343-355. doi: 10.1016/j.compedu.2004.04.003
- Solimeno, A., Mebane, M. E., Tomai, M., & Francescato, D. (2008). The influence of students and teachers characteristics on the efficacy of face-to-face and computer supported collaborative learning. *Computers & Education*, 51(1), 109-128. doi: 10.1016/j.compedu.2007.04.003
- Somyürek, S., Atasoy, B., & Özdemir, S. (2009). Board's IQ: What makes a board smart? *Computers & Education*, 53(2), 368-374. doi: 10.1016/j.compedu.2009.02.012
- Tan, C. K., & Tan, C. P. (2015). Effects of the handheld technology instructional approach on performances of students of different achievement levels. *Computers & Education*, 82, 306-314. doi: 10.1016/j.compedu.2014.11.011
- Thorvaldsen, S., Vavik, L., & Salomon, G. (2012). The use of ICT tools in mathematics: A case-control study of best practice in 9th grade classrooms. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 56(2), 213-228. doi: 10.1080/00313831.2011.581684
- Tømte, C., Enochsson, A. B., Buskvist, U., & Kårstein, A. (2015). Educating online student teachers to master professional digital competence: The TPACK-framework goes online. *Computers & Education*, 84, 26-35. doi: 10.1016/j.compedu.2015.01.005
- Vass, E. (2007). Exploring processes of collaborative creativity – The role of emotions in children's joint creative writing. *Thinking Skills and Creativity*, 2(2), 107-117. doi: 10.1016/j.tsc.2007.06.001

- Wang, M. T., & Peck, S. C. (2013). Adolescent educational success and mental health vary across school engagement profiles. *Developmental Psychology*, 49(7), 1266-1276. doi: 10.1037/a0030028
- Watts, M., & Lloyd, C. (2004). The use of innovative ICT in the active pursuit of literacy. *Journal of Computer Assisted Learning*, 20(1), 50-58. doi: 10.1111/j.1365-2729.2004.00065.x
- Webster, T. E., & Son, J. B. (2015). Doing what works: A grounded theory case study of technology use by teachers of English at a Korean university. *Computers & Education*, 80, 84-94. doi: 10.1016/j.compedu.2014.08.012
- Wilson, K. L., & Boldeman, S. U. (2012). Exploring ICT integration as a tool to engage young people at a Flexible Learning Centre. *Journal of Science Education and Technology*, 21(6), 661-668. doi: 10.1007/s10956-011-9355-7
- Wurst, C., Smarkola, C., & Gaffney, M. A. (2008). Ubiquitous laptop usage in higher education: Effects on student achievement, student satisfaction, and constructivist measures in honours and traditional classrooms. *Computers & Education*, 51(4), 1766-1783. doi: 10.1016/j.compedu.2008.05.006

《臺灣數學教育期刊》稿約

2013.04.03 編審委員會會議通過

2013.09.27 編審委員會會議修訂通過

2014.09.04 編審委員會會議修訂通過

2017.03.17 編審委員會會議修訂通過

- 壹、《臺灣數學教育期刊》(Taiwan Journal of Mathematics Education)(以下簡稱本刊)是國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同發行之期刊，內容以出版數學教育領域相關議題的原創性論文為宗旨。本刊徵求符合宗旨的文稿，且以實徵性研究成果為主，回顧性論文需能整合相關之實徵研究，提出批判性或創發思考的評析。
- 貳、本刊每年發行兩期，分別於四月、十月出刊，並採電子方式發行。全年徵稿，隨到隨審。
- 參、本刊所刊之文稿須為原創性的學術論文之文稿，即未曾投遞或以全論文形式刊登於其他期刊、研討會彙編或書籍。若文稿在送審後自行撤稿，或出現一稿多投、修正稿回覆逾期、侵犯著作權等違反學術倫理等情況，將依下列規則處理：
- 一、來稿一經送審，不得撤稿。因特殊理由而提出撤稿申請者，案送主編決定；非特殊理由而自行撤稿者，一年內將不再接受該作者的投稿。
 - 二、若文稿被發現一稿多投、侵犯著作權或違反學術倫理等情況，除文稿隨即被拒絕刊登外，一切責任由作者自負，且本刊於三年內不接受該作者來稿，並視情節嚴重程度求償。
 - 三、作者應於發出文稿修正通知的三週內回傳修正稿及修正回覆說明書，逾期視同撤稿。若有特殊情況請先與本刊聯絡。
- 肆、未經本刊同意，已發表之文章不得再於他處發表。投遞本刊之學術論文須經編審委員會送請專家學者審查通過後予以刊登，被刊登文章之著作財產權歸國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同擁有，文責由作者自負。投稿至《臺灣數學教育期刊》之文章，若經編輯委員推薦且經作者同意，可轉稿至《臺灣數學教師》。
- 伍、文稿經初審結果為修訂後再審時，本期刊責任編輯將協助引導作者進行文稿修訂。
- 陸、文稿可以中文或英文撰寫，中文稿件字數以20,000字（英文10,000字）為上限（包含論文全文、中英文摘要、圖表、附註、參考文獻、附錄等），特殊邀稿不在此限。文稿請使用Microsoft Word 98以上之繁體中文文書軟體處理，中英文稿均請用單行間距之12級字新細明體或Times New Roman字體，以橫書方式於A4規格紙張上，文

稿上下左右各留2.5公分空白。

柒、中文文稿格式請參考本期刊論文撰寫體例的說明或已發行之文稿，若為英文撰寫之文稿、引用英文文獻以及數學符號、公式等請參考APA第六版出版手冊。投稿時應注意下列事項：

一、提交投稿基本資料表

(一) 文稿基本資料。

(二) 通訊作者之姓名、服務單位、職稱、通訊地址、聯絡電話和電子郵件地址。

一位以上作者時，非通訊作者只需填寫姓名、服務單位和職稱。

(三) 任職機構及單位：請寫正式名稱，分別就每位作者寫明所屬系所或單位。

(四) 頁首短題（running head）：中文以不超過15個字、英文以不超過40個字元為原則。

(五) 作者註（author note）：說明與本篇研究相關的資訊。

二、提交已簽署的《臺灣數學教育期刊》著作財產權讓與同意書。

三、除文稿正文外，還需包含中英文摘要，相關規定如下：

(一) 中文文稿的中文摘要在前，英文文稿則英文摘要在前。

(二) 中文文稿之中文摘要頁內容包括論文題目（粗體20級字、置中）、摘要（不分段，限500字以內）及關鍵詞（以五個為上限，並依筆畫順序由少到多排列）；英文摘要頁內容包括 Title（bold, 20 pt, central）、Abstract（不分段，限300字以內）及 Keywords（字詞及順序須與中文關鍵詞相對應）。

(三) 英文文稿之英文摘要頁內容包括 Title（bold, 20 pt, central），Abstract（不分段，限300字以內）及 Keywords（以五個為上限，並依字母順序排列）；中文摘要頁內容包括論文題目（粗體20級字、置中）、中文摘要（不分段，限500字以內）及中文關鍵詞（字詞及順序須與英文關鍵詞相對應）。

(四) 內文格式詳見《臺灣數學教育期刊》論文撰寫體例。

四、若為修正稿，遞交修正的文稿（上述第三點之資料）上請以色字標示修改處，並需提交「修正回覆說明書」，依審查意見逐項說明修改內容或提出答辯。

捌、本刊審查流程分為預審與正式審查兩個階段：

一、預審：不符合本刊宗旨、品質要求，或撰寫體例者，逕行退稿或退回請作者修改後再上傳。

二、正式審查：為雙向匿名審查，除基本資料表外，不得出現作者姓名或任何足以辨識作者身份之資料，包括請先省略誌謝。匿名的參考格式為：

(一) 若本文引用作者已發表之文章，須以「（作者，西元年）」或“(Author, Year)”；若引用作者已發表之文章不只一篇，則以「（作者，西元年a）、（作者，西元年b）、……」或“(Author, Year a)、(Author, Year b)、……”的中文作

者姓氏筆畫順序以及外文作者姓氏字母順序排列。

(二) 若在參考文獻中則以「作者(西元年), **期刊刊名**。」或「作者(西元年), **書名**。」或「作者(西元年). 編者, **書名**。」或“Author (Year). *Title of Periodical*.”表示。

引用文獻中包含一位以上的投稿文章作者, 其所有著作皆須遵守上述規範。

範例1: 「林妙鞠、楊德清(2011)。故事融入小一弱勢學生之補救教學研究。**台灣數學教師(電子)期刊**, **25**, 1-16。」一文的作者欲引用該文, 文中應以「(作者, 西元年)」表示, 參考文獻則以「作者(西元年)。**台灣數學教師(電子)期刊**。」表示。

範例2: 「李源順(2009)。三階段輔導模式 - 以數學學習領域為例。收錄於鍾靜和楊志強(主編), **優質實習輔導教師的增知賦能**(pp.141-157)。臺北市: 國立臺北教育大學。」一文的作者欲引用該文, 文中應以「(作者, 西元年)」表示, 參考文獻則以「作者(西元年)。收錄於鍾靜和楊志強(主編), **優質實習輔導教師的增知賦能**。」

範例3: “Chang S. L., & Lin, F. L. (2006). Investigations into an elementary school teacher's strategies of advancing children's mathematical thinking. *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*. 5, 21-34.”的作者應以“(Author, Year)”引用該文, 參考文獻則以“Author (Year). *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*.”表示。

玖、文稿以電子郵件方式投遞, 包括作者基本資料表、著作財產權讓與同意書與全文共三份資料。作者應負論文排版完成後的校對之責, 而被接受刊登的英文文稿, 作者需自行負責檢查文稿中的用詞、語法、拼寫、含意和邏輯的正確性, 並另提供中文參考文獻之英譯資料, 編輯委員僅負責格式上之校對。

壹拾、 投稿電子郵箱: tjmeassistant@gmail.com

《臺灣數學教育期刊》研究論文撰寫體例

2013.04.03 編審委員會會議通過

2013.09.27 編審委員會會議修訂通過

2014.09.04 編審委員會會議修訂通過

2017.03.17 編審委員會會議修訂通過

本期刊原則上依循美國心理學會(American Psychological Association)的撰寫格式，中文文稿請參考下面的說明或本刊已發表的文稿，若為英文撰寫之文稿、引用英文文獻以及數學符號、公式等請參考 APA 第六版出版手冊。文稿請使用 Microsoft Word 98 以上之繁體中文文書軟體處理。除另有規定外，中文字型一律採用新細明體，英文字型一律為 Times New Roman。

壹、 撰稿格式

- 一、投稿除需要附上作者基本資料表檔案外，中文稿件內容依序為中文摘要頁（含關鍵字）、英文摘要頁（含關鍵字）、正文（包括圖、表、附註、誌謝、參考文獻）以及附錄（若無必要可省略）；英文稿件之撰寫順序相同，唯中英文摘要頁位置對調。
 - 二、稿件版面以單欄版面橫向印列的A4規格紙張，上下左右各留2.5公分空白，除基本資料表頁外每頁需加註頁碼。文稿字數（包含摘要、正文、圖表、附註、參考文獻、附錄等）中文以20,000字為上限，英文以10,000字為上限。
 - 三、中文摘要頁內容包括論文題目（粗體20級字、置中）、摘要（不分段，限500字以內）、與關鍵字（以五個為上限，並依筆畫順序由少到多排列）。
 - 四、英文摘要頁內容包括論文題目（bold, 20 pt, central），並附英文摘要（不分段，限300字以內）及英文關鍵字（字詞及順序須與中文關鍵字相對應）。
 - 五、除各項標題、表之註記與另起一段之引文外，內文不分中英文均為12級字，單行行距。
 - 六、除另有規定外，中文字型一律採用新細明體，標點符號及空白字為全形字；英文字型一律為Times New Roman。
- 三、本期刊為雙向匿名審查，除基本資料表外，不得出現作者姓名或任何足以辨識作者身份之資料。匿名的參考格式為：
- (一) 若本文引用作者已發表之文章，須以「（作者，西元年）」或“(Author, Year)”；若引用作者已發表之文章不只一篇，則以「（作者，西元年a）、（作者，西元年b）、……」或“(Author, Year a)、(Author, Year b)、……”的中文作者姓氏筆畫順序以及外文作者姓氏字母順序排列。
 - (二) 若在參考文獻中則以「作者（西元年），期刊刊名。」或「作者（西元年），書名。」或「作者（西元年）。編者，書名。」或“Author (Year). Title of Periodical.”

表示。

引用文獻中包含一位以上的投稿文章作者，其所有著作皆須遵守上述規範。

範例1：「林妙鞠、楊德清（2011）。故事融入小一弱勢學生之補救教學研究。

台灣數學教師(電子)期刊，25，1-16。」一文的作者欲引用該文，文中應以「（作者，西元年）」表示，參考文獻則以「作者（西元年）。

台灣數學教師(電子)期刊。」表示。

範例2：「李源順（2009）。三階段輔導模式 - 以數學學習領域為例。收錄於鍾靜和楊志強（主編），優質實習輔導教師的增知賦能（pp.141-157）。

臺北市：國立臺北教育大學。」一文的作者欲引用該文，文中應以「（作者，西元年）」表示，參考文獻則以「作者（西元年）。收錄於鍾靜和楊志強（主編），優質實習輔導教師的增知賦能。」

範例3：“Chang S. L., & Lin, F. L. (2006). Investigations into an elementary school teacher's strategies of advancing children's mathematical thinking. *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*. 5, 21-34.”的作者應以“(Author, Year)”引用該文，參考文獻則以“Author (Year). *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*.”表示。

貳、正文

一、正文原則上包括「緒論」、「文獻探討」、「方法」、「結果」、「討論」與「參考文獻」等六部分，「緒論」含研究動機與目的、假設或研究問題等內容。前述格式為原則性規定，作者可依論文性質斟酌改變。

二、標題的層次、選用次序與字體為：

壹、16級字、粗體、置中

一、14級字、粗體、靠左對齊

(一)12級字、粗體、靠左對齊

1. 12級字、粗體、靠左對齊

(1)內縮1.5字元、12級字、粗體、靠左對齊

A.內縮1.5字元、12級字、底線、靠左對齊

1. 第一級標題為「緒論」、「文獻探討」、「方法」、「結果」、「討論」與「參考文獻」等，各層次標題選用次序為：壹、一、(一)、1、(1)、A 最多以六個層次為原則。
2. 第一、二、三、四、五層次標題請使用粗體。
3. 第一層次標題使用 16 級字，第二層次標題使用 14 級字，其餘 12 級字。
4. 第一層次標題置中，其餘靠左對齊。
5. 第一、二、三層次標題為單行間距，並與前後段距離均為 1 行；第四、五、六層次標題為 12 點最小行高，並與前後段距離均為 0.5 行。
6. 第五、六層次標題內縮 1.5 字元，而第六層次標題加上底線。
7. 標題請用字簡明，勿用句號或冒號。若逢頁尾最後一行，應移至次頁首行。

三、英文統計符號須用斜體字，例如 $F(1, 53) = 10.03$, t , F , M , SD , N , r , p 等。希臘字母則不要斜體，例如： α , β , ε , η 。

四、資料分析結果的有效位數須全文一致。恆小於「1」的數值，例如 $KR20$, α , p 等統計數值的個位數字「0」請省略。

五、文獻資料的引用一律採取文內註釋。引用文獻時，必須有作者姓名（中文作者姓名全列，英文作者僅列姓氏）及論文年份（中文文獻及英文文獻均使用西元年份）。相同作者在同一段中重複被引用時，第一次須寫出年代，第二次以後，在不造成混淆的情況下年代可省略。若在不同段落中重複引用時，則仍須完整註明。本文中引用之文獻必須在參考文獻中列出。文獻引用格式於下：

1. 當作者為一人時，格式為作者（年代）或（作者，年代）、Author (Year)或(Author, Year)。
2. 當作者為二人時，每次引用均須列出全部作者，在行文中，以「與」連接；在括號和參考文獻中，中文以頓號「、」，西文以“&”連接。格式為作者 1 與作者 2（年代）或（作者 1、作者 2，年代）、Author 1 與 Author 2 (Year)或(Author 1 & Author 2, Year)。
3. 當作者為三至五人時，第一次引用時所有作者均須列出，第二次以後僅需寫出第一位作者並加「等」字或“et al.”。在同一段落中重複引用時，第一次須完整註明，第二次以後僅需寫出第一位作者再加「等」字或“et al.”，可省略年代。若在不同段落中重複引用，則僅需寫出第一位作者再加「等」字或“et al.”，但仍需註明年代。
4. 當作者為六人以上時，每次引用都只列第一位作者並加「等」字或“et al.”。
5. 當作者或作者之一為機構時，第一次引用應寫出機構全名，並以中括號註明慣用之簡稱，第二次之後即可使用簡稱替代，並依上述一至四點處理。例如：行政院國家科學委員會（國科會，2011）或（行政院國家科學委員會[國科會]，2011）、National Science Council (NSC, 2011)或(National Science Council [NSC], 2011)。

6. 當文獻為翻譯作品時，以原作者為主要作者，中文翻譯的文獻須註明原著出版年代，接續註明譯者姓名與譯本出版年代，作者與譯者之人數及其引用格式的規範與一般作者相同。英文翻譯文獻則僅須註明原著出版年代和譯本之出版年代，中間以斜線區隔，不須註明譯者姓名，作者人數及其引用格式的規範與一般作者相同。例如：Skemp (1987/1995)。
7. 當西文作者同姓時，須引用全名，且採「名在前姓在後」方式書寫。例如：A. J. Bishop (1985)和 E. Bishop (1970) 都認為……。
8. 在同一括號內同時引用多位作者的文獻時，依作者姓名筆畫（英文用字母）排序；若同時有中英文作者，則先列中文作者。不同作者之間用分號分開，相同作者不同年代之文獻用逗號隔開年代。
9. 在文章中引用同一作者在同一年度的多篇著作時，應在年代後加註 a, b, c……以茲區別。
10. 當引用文獻需標出頁數時，西文單頁為“p.”、兩頁以上為“pp.”，中文則以「頁」表示。例如：（洪萬生，2006，頁 167）、(Dubinsky, 1991, p. 102)、(Heath, 1956, pp. 251-252)。
11. 當引用之觀念或陳述，來自第二手資料時，應將原始資料和第二手資料同時註明。在括號中首先列出原始作者與年代，接續中文以「引自」，西文以“as cited in”註明第二手資料之作者與年代，並說明出處頁碼。例如：（Garner, 1988，引自蘇宜芬、林清山，1992，頁 246）、Peirce (1968, as cited in Sáenz-Ludlow, 2002, p. 289)
12. 引文超過中文 80 字（西文 40 字），則須另起一段，並改為標楷體 10 級字，左右縮排 2 字元，與正文間前後空一行，且在引文前後無需用引號。例如：

Schoendfeld (1992, p.335) 有一段話可以用來討論：

數學從其創生之始就是一種社會活動，在此活動中一群訓練有素的實踐者（數學科學家）從事組型的科學——基於觀察、研究和實驗，有系統地試圖要決定一個公理化或理論化之系統中的規律的性質和原理（此為純數學），或者從實在世界物體中抽象出來之系統的模式（此為應用數學）。數學的工具是抽象、符號表徵、和符號操作。然而學會運用這些工具，其意義乃謂一個人以數學方式思考而非如一個工匠使用工具。以數學的方式思考就是：（1）形成數學觀點——珍視數學與抽象的歷程，並偏愛其應用，（2）發展此學科的工具的能力，並應用這些工具以協助我們理解結構——數學的建構意義（mathematical sense-making）。

六、圖與表格：

1. 圖下方應置中書明圖序及圖之標題；表格上方應置中書明表序及表名，圖表序號均使用阿拉伯數字，且圖表序與圖名之間空一個中文字（或 2 個英文字母）。各圖表之標題及說明宜精簡，但不宜精簡至看正文才能知此圖的訊息。
2. 表格之製作以簡明清楚、方便閱讀為原則，頂端與底端採用粗線(1.5pt)繪製，中間與兩邊不必畫線。表序須配合正文以阿拉伯數字加以編號，並書明表之標題。
3. 每一個圖表的大小以不超過一頁為原則，如超過時，須在續表之表序後加上(續) / (continued)，但無須重現標題，如：表 1 (續) 或 Table 1 (continued)。
4. 圖與表格應配合正文出現，與前後段空一行間距。圖及表格內容若有解釋的必要，可作註記。註記與圖表之左邊界切齊，列在圖、表之下方，每註另起一行，按編號順序排列。

七、誌謝與附註：

1. 誌謝應力求簡短扼要，置於正文之後。誌謝二字為 16 級字、粗體、置中。誌謝文另行起、第一行內縮 2 字元、12 級字。
2. 附註應置於參考文獻之前，每項附註均另起一行，並以阿拉伯數字編號，依順序排列。

參、參考文獻

- 一、正文中引用過之文獻，必須全部列舉在參考文獻內，且不得列出未引用之文獻，接受刊登之論文，作者應另提供中文參考文獻之英譯資料。
- 二、每個作者第一行由第一格開始寫，第二行中文內縮三個字；英文內縮六個字母。中文參考文獻先寫作者姓名（年代），再用「。」接續「篇名」，「。」後再寫「期刊名稱」或「書名」以及「頁碼」。中文參考文獻「書名」或「期刊名及卷數」以粗體表示，其餘（含期數）維持標準樣式。英文參考文獻先寫作者姓名（年代），再用「.»接續「篇名」，「.»後再寫「期刊名稱」或「書名」以及「頁碼」。英文參考文獻「書名」或「期刊名及卷數」以斜體表示，其餘（含期數）維持標準樣式。即：

作者（年代）。文章篇名。**期刊刊名**，**卷**（期若無則可省略），xxx-xxx。

Author, A. A. (Year). Title of article. *Title of Periodical*, *volume* (issue若無則可省略),
xxx-xxx.

三、各種不同形式的中英文參考文獻的格式如下：

1. 期刊

中文格式：作者（年代）。文章篇名。**期刊刊名**，**卷**（期），xxx-xxx。

英文格式：Author, A. A. (Year). Title of article. *Title of Periodical*, *volume*(issue),
xxx-xxx.

2. 書籍

中文格式：作者（年代）。**書名**（版次若有須註記）。出版地：出版者。

英文格式：Author, A. A. (Year). *Title of book* (Edition). Location: Publisher.

3. 編輯著作：中文編輯著作以編者之姓名起始，其後以「編」、「編著」等標示其著作方式，以資區別。英文編輯著作以編者之姓氏起始，其後則為編者名字的縮寫，再加上“Ed.”、“Eds.”、或“Comp.”，以資區別其著作方式。

中文格式：編者編（年代）。**書名**（冊次若無則可省略）。出版地：出版者。

英文格式：Editor, A. A. (Ed.). (Year). *Title* (Volume若無則可省略). Location: Publisher.

4. 翻譯作品

中文格式：原作者（譯本出版年）。**翻譯書名**（譯者譯）。出版地：出版者。
（原作出版於xxxx年）

英文格式：Author, A. A. (Year). *Title* (B. B. Translator, Trans.). Location: Publisher.
(Original work published Year).

5. 書中的文章

中文格式：作者（年代）。文章名稱。收錄於編著姓名（編著），**書名**（冊次若無則可省略，頁xx-xx）。出版地：出版者。

英文格式：Author, A. A. (Year). Title of article. In B. B. Editor (Ed.), *Title of Book* (Edition若無則可省略, pp. xx-xx). Location: Publisher.

6. 研究計畫報告：若引述的報告是取自 ERIC (the Educational Resources Information Center)或 NTIS (the National Technical Information Service)，則在最後須以括號註明 ERIC 或 NTIS 的編號。

中文格式：作者（年代）。**報告名稱**（報告編號若無則可省略）。出版地：出版者。

英文格式：Author, A. A. (Year). *Title of report* (Report No.若無則可省略). Location: Publisher.

7. 研討會發表之論文（未出版）

中文格式：作者（年，月）。**論文標題**。發表於會議名稱。會議地點：舉辦單位若無則可省略。

英文格式：Author, A. A. (Year, month). *Title of paper*. Paper presented at the Title of the Symposium. Location, Country.

8. 未出版之學位論文

中文格式：作者（年代）。**論文名稱**。未出版之博／碩士論文，學校暨研究所名稱，大學所在地。

英文格式：Author, A. A. (Year). *Title of doctoral dissertation/master thesis*. Unpublished doctoral dissertation/master thesis, Name of

University, Location.

9. 網路資源

中文格式：作者若無則可省略（年月日若無則可省略）。網頁標題。檢自URL。

英文格式：Author, A. A. (Year, month day若無則可省略). *Title of webpage*. Retrieved from URL.

篇名		(中文)		
		(英文)		
總字數		稿件全文(含中英文摘要、正文、參考文獻、附錄等)共_____字。		
關鍵詞(最多五個)		(中文)		
		(英文)		
頁首短題 (running head)		(請以不超過15個中文字或40個英文字元為原則。)		
通訊作者資料	姓名	(中文)	(英文)	
	職稱			
	服務單位 (或就讀校系)	(中文)	(英文)	
	E-mail			
	通訊地址			
	電話	辦公室：() 分機		
行動電話：				
如為共同著作，請詳填以下共同著作人欄位，非共同著作則不需填寫。(以下欄位不敷填寫時請自行增加)				
共同著作人		姓名	服務單位(或就讀校系)	職稱
第一作者 (<input type="checkbox"/> 通訊作者)	(中文)	(中文)		
	(英文)	(英文)		
第二作者 (<input type="checkbox"/> 通訊作者)	(中文)	(中文)		
	(英文)	(英文)		
第三作者 (<input type="checkbox"/> 通訊作者)	(中文)	(中文)		
	(英文)	(英文)		
作者註 (可複選)	<input type="checkbox"/> 本篇論文為碩、博士論文改寫，指導教授為_____。 <input type="checkbox"/> 本篇論文曾於_____發表。 <input type="checkbox"/> 本篇論文獲國科會補助，計劃編號：_____。			
1.茲保證本論文符合研究倫理。 2.茲保證所填基本資料正確，文稿未曾以任何方式出版或發行，且無一稿多投、違反學術倫理，或違反著作權相關法令等事情。 3.茲瞭解並同意貴刊著作權授權規範，並保證有權依此規範進行相關授權。 4.茲保證文稿已經所有作者同意投稿至《臺灣數學教育期刊》。 填表人：_____ 填表日期：_____年____月____日				

《臺灣數學教育期刊》著作財產權讓與同意書

茲同意投稿至國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會共同發行的《臺灣數學教育期刊》之一文，名稱為：

立書人聲明及保證本著作為從未出版之原創性著作，所引用之文字、圖表及照片均符合著作權法及相關學術倫理規範，如果本著作之內容有使用他人以具有著作權之資料，皆已獲得著作權所有者之（書面）同意，並於本著作中註明其來源出處。著作人並擔保本著作未含有毀謗或不法之內容，且絕未侵害他人之智慧財產權，並同意無償授權國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會於本著作通過審查後，以論文集、期刊、網路電子資料庫等各種不同方法形式，不限地域、時間、次數及內容利用本著作，並得進行格式之變更，且得將本著作透過各種公開傳輸方式供公眾檢索、瀏覽、下載、傳輸及列印等各項服務。國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會並得再授權他人行使上述發行之權利。惟著作人保有下列之權利：

1. 本著作相關之商標權及專利權。
2. 本著作之全部或部份著作人教學用之重製權。
3. 出版後，本著作之全部或部份用於著作人之書中或論文集中之使用權。
4. 本著作用於著作人受僱機關內部分送之重製權或推銷用之使用權。
5. 本著作及其所含資料之公開口述權。

著作人同意上述任何情形下之重製品應註明著作財產權所屬，以及引自《臺灣數學教育期刊》。

如果本著作為二人以上之共同著作，下列簽署之著作人已通知其他共同著作人本同意書之條款，並經各共同著作人全體同意，且獲得授權代為簽署本同意書。如果本著作係著作人於受僱期間為雇用機構所作，而著作權為讓機構所有，則該機構亦同意上述條款，並在下面簽署。

本著作之著作財產權係屬（請勾選一項）

- ☐ 著作人所有
☐ 著作人之僱用機構所有

立同意書人（著作人或僱用機構代表人）簽章：_____

著作人姓名或僱用機構名稱：_____

（正楷書寫）

中華民國 年 月 日

《臺灣數學教育期刊》編審辦法

2013.04.03 編審委員會會議通過

壹、《臺灣數學教育期刊》（以下簡稱本刊）之審查包括預審、正式審查兩個階段：

- 一、預審：檢視來稿是否符合本刊稿約之宗旨、論文品質以及進行論文格式之審查；
- 二、正式審查：審查委員與投稿者採雙向匿名方式進行。主編就審查委員的回覆意見及論文品質決定接受或拒絕文稿，或是需要作者修改後再進行審查或檢核。需要「修正後再審」之稿件，交原審查委員或委由主編委任進行再審。所有文稿最後須經編輯委員會審查通過後，方能刊出。
稿件之最終審查決定以投稿後六個月內完成並通知作者。

貳、審查委員針對稿件之學術原創性、正確性及價值等條件從嚴審查，以確保所刊文稿的品質。審查委員可提供作者具建設性的修改建議，以利文稿的修正及品質提昇，並以下列其中一種的刊登建議回覆：

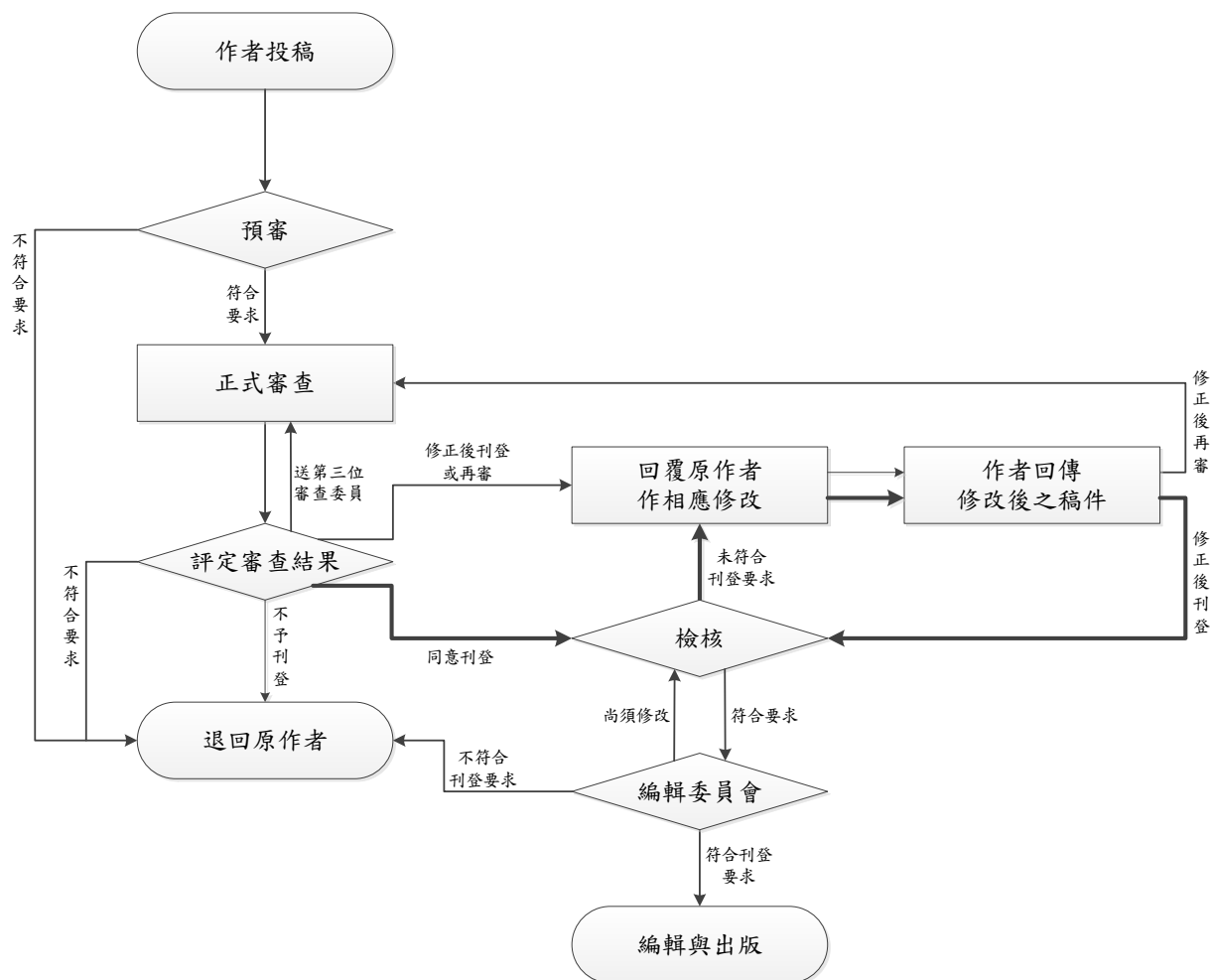
- 一、「同意刊登」：論文不需要修改可作原稿刊登。
- 二、「修正後刊登」：通知作者依審查意見修改或答辯後刊登。
- 三、「修正後再審」：要求作者依審查意見修改或答辯，修正稿由編輯委員會送原審查委員或委由主編委任進行再審。
- 四、「不宜刊登」：通知作者退稿。

稿件審查的時間以三週為限，若超過期限，編輯委員會將去函提醒審查委員儘速審查，若逾六週審查者仍未寄回審查意見，則編輯委員會得再聘請另一位審查者取代之。每位審查者皆為無償審查，但會在每年第二期期刊中列名致謝。

參、本刊主編、副主編或編輯委員如投稿本刊，該委員應迴避推薦審查委員名單、參與審查結果決定之討論或經手處理與個人稿件有關的資料(包括審稿者資料、推薦審查委員名單、審稿意見等)。

肆、本刊預計每年四月和十月出版，稿件刊登順序由主編原則上依文稿性質與投稿時間之先後次序決定之，而第一作者的文稿以一篇為限，超過篇數之稿件留至下期刊登。

伍、本刊稿件之編審流程如下圖所示：



Publisher	Department of Mathematics, National Taiwan Normal University Taiwan Association for Mathematics Education
-----------	--

Editorial Board

Chief Editor	Tai-Yih Tso (Department of Mathematics, National Taiwan Normal University)
Vice Chief Editor	Chao-Jung Wu (Department of Educational Psychology and Counseling, National Taiwan Normal University)
Editorial Panel	<p>Kai-Lin Yang (Department of Mathematics, National Taiwan Normal University)</p> <p>Li-Yu Hung (Department of Special Education, National Taiwan Normal University)</p> <p>Yuan Yuan (Graduate School of Education, Chung Yuan Christian University)</p> <p>Hsin-Mei Huang (Department of Learning and Materials Design, University of Taipei)</p> <p>Chih-Chien Yang (Graduate Institute of Educational Measurement and Statistics, National Taichung University of Education)</p> <p>Der-Ching Yang (Graduate Institute of Mathematics and Science Education, National Chiayi University)</p> <p>Po-Hung Liu (College of General Education, National Chin-Yi University of Technology)</p> <p>Man-Li Liu (Graduate Institute of Mathematics and Science Education, National Pingtung University of Education)</p> <p>Yuan-Chen Liu (Graduate School of Educational Communications and Technology, National Taipei University of Education)</p> <p>Wen-Huan Tsai (Graduate Institute of Mathematics and Science Education, National Hsinchu University of Educational)</p> <p>Feng-Jui Hsieh (Department of Mathematics, National Taiwan Normal University)</p> <p>Hak-Ping Tam (Graduate Institute of Science Education, National Taiwan Normal University)</p>

Address	No.88 Sec. 4, Ting-Chou Rd., Taipei City, Taiwan, R.O.C. Department of Mathematics, National Taiwan Normal University <i>"Taiwan Journal of Mathematics Education"</i>
TEL	886-2-7734-6576
FAX	886-2-2933-2342
E-mail	tjmeassistant@gmail.com
Website	tame.tw/forum.php?mod=forumdisplay&fid=56

- 1 探究九年級生推論形式之邏輯結構的建構與轉化
/ 謝佳勸、唐書志

Construction and Transformation of Logical Structures in Ninth-graders' Inferring Types
／ Chia-Jui Hsieh, Shu-Jyh Tang

- 33 探討一位國中數學教師發展探究教學之專業成長
/ 劉致演、秦爾聰、尤昭奇

An Investigation of a Junior High School Teacher's Professional Growth towards
Developing Mathematics Conjecturing-Inquiry Teaching
／ Chih-Yen Liu, Erh-Tsung Chin, Chao-Chi Yu

- 69 Identifying Effective E-Teaching and General Mathematical Teaching Profiles to Predict
Student Mathematical Cognition and Affect
/ Mei-Shiu Chiu

辨識可預測學生數學認知和情意的有效 E 化和一般數學教學法組合
／ 邱美秀

