ISSN: 2312-5810
DOI: 10.6278/tjme

第8卷　第2期
二〇二一年十月
VOL. 8　NO. 2
October 2021

臺灣數學教育期刊
Taiwan Journal of Mathematics Education

國立臺灣師範大學數學系
Department of Mathematics,
National Taiwan Normal University

TAME
台灣數學教育學會
Taiwan Association
for Mathematics Education

臺灣數學教育期刊　第 8 卷 第 2 期　2021 年 10 月

發行單位　國立臺灣師範大學數學系
台灣數學教育學會

地址	臺北市汀州路四段 88 號國立臺灣師範大學數學系 《臺灣數學教育期刊》
電話	886-2-7749-3678
傳真	886-2-2933-2342
電子郵件	TJME.taiwan@gmail.com
網址	http://tjme.math.ntnu.edu.tw/contents/contents/contents.asp?id=21

本刊 110 年獲科技部人文社會科學研究中心補助

主編的話

《臺灣數學教育期刊》第 8 卷第 2 期刊登三篇文章，分別為高中數學教師教學知識的質性分析、數學系大學生之函數極限概念與計算的錯誤類型分析，以及國小中年級學生數學學習興趣、學習自信，與數學成就之階層線性模式分析。三篇研究的對象與分析方法殊異，展現了圈內學者研究的多樣性。

第一篇著重數學教師教學知識的結構層次分析，其概念借鏡自學生學習成果的 SOLO 分類理論，研究想法具創新性。本文運用所建構的單一、多重、關聯、等價，與結晶五種不同的認知層次來分析四位高中數學教師在多項式四個單元所展現的教學知識層次。研究分析的教學影帶總計長達 2624 分鐘，本文對影帶切割、編碼系統的編製與調整、編碼的信度檢核、資料詮釋，以及對個案教師教學路徑的分析，提供了詳細豐富的描述，值得參考。

第二篇是以兩所大學 111 名應用數學系學生為對象，分析他們在微積分中函數極限測驗上所顯現之概念與計算的錯誤認知。本文透過解題的類型與百分比指出學習函數極限的難點與困境，有助於微積分教學的規劃與調整。

第三篇是以三所小學三、四年級合計 672 位學生在一學年中數學科三波次的學習興趣、學習自信和學習成就的資料進行階層線性模式分析，除了探討數學學習興趣、數學學習自信，與數學成就三者是否有各自的成長趨勢，以及興趣和自信是否可預測學習成就之成長趨勢，同時也探討前兩個問題是否存在年級與性別差異。該研究的數學成就乃運用試題反應理論三參數模式同時估計法得出學生的能力值，而階層線性模式能解決教學現場回收資料不易、闕漏較多的問題，在資料分析方法上可供讀者參酌。

本刊一直以發行高品質數學教育原創性論文為宗旨，每篇文稿不只經兩到三位審查委員提出審查意見、責任編輯積極建議修改方向，還需通過編輯委員會議的檢視，方能進入最後階段的編輯。感謝過程中作者的不放棄與把關者的精益求精，方能成就每一期的出版。

《臺灣數學教育期刊》主編

吳昭容 謹誌

臺灣數學教育期刊

第 8 卷　第 2 期

2014 年 4 月創刊　　2021 年 10 月出刊

目錄

Taiwan Journal of Mathematics Education

Vol. 8 No. 2

First Issue: April 2014 Current Issue: October 2021

CONTENTS

蔡政樺、秦爾聰（2021）。
建構 SOTO 分類法並探討其評價高中數學教學之蘊涵。
臺灣數學教育期刊，**8**（2），1-42。
doi: 10.6278/tjme.202110_8(2).001

建構 SOTO 分類法並探討其評價高中數學教學之蘊涵

蔡政樺　　秦爾聰

國立彰化師範大學科學教育研究所

本研究目的在於建立可觀察教學成果結構（The Structure of Observed Teaching Outcome, SOTO）分類法，以此分類法評價高中數學教師的數學教學知識，探討其所展現的 SOTO 認知層次及其發展的主要特徵。本研究採用質為主、量為輔的個案研究法，並參照自 Learning Mathematics for Teaching（LMT）計畫所發展的教學數學品質指標（Mathematical Quality of Instruction, MQI）之教學觀察系統，整合出四位高中數學教師數學教學知識的課室觀察系統，針對 108 課綱普高數學第一冊多項式之四個教學單元，分析與評價四位個案教師的數學教學知識在 SOTO 分類法的認知層次，及其發展途徑之樣貌。研究結果有：（1）四位個案教師之數學教學知識，展現出 SOTO 分類法之單一（U）、多重（M）、關聯（R）、等價（E）以及結晶（C）等五種不同的認知層次與知識類別；他們的數學教學知識之認知發展的主要特徵為，出現個數不一之 U-M-R 迴圈或路徑之教學通路。（2）四位個案教師數學教學知識的 SOTO 認知層次與知識面向之差異性，在教學實作中呈現不同樣貌的教學認知發展漸進圖，進而導致產生不同風格的數學教學知識。同時，也發現四位個案教師數學教學知識在 SOTO 分類法的認知層次愈高，其所展現的教學知識品質也愈好。從教學評價的蘊涵來看，其意義揭示透過 SOTO 分類法之質性評價，可以讓高中數學教師的數學教學知識變得更加可見與可覺察。

關鍵詞：可觀察教學成果結構、教學知識、數學知識、數學教學知識

通訊作者：秦爾聰，e-mail：abechin@cc.ncue.edu.tw
收稿：2021 年 8 月 13 日；
接受刊登：2021 年 10 月 15 日。

Tsai, C. H., & Chin, E. T. (2021).
Constructing a structure of observed teaching outcomes taxonomy to evaluate the teaching knowledge quality of high school mathematics teachers.
Taiwan Journal of Mathematics Education, *8*(2), 1-42.
doi: 10.6278/tjme.202110_8(2).001

Constructing a Structure of Observed Teaching Outcomes Taxonomy to Evaluate the Teaching Knowledge Quality of High School Mathematics Teachers

Cheng-Hua Tsai　　Erh-Tsung Chin
Graduate Institute of Science Education, National Changhua University of Education

The structure of observed learning outcomes (SOLO) taxonomy is a model that assesses student progress toward understanding a subject. In this study, we adopted SOLO for teachers and created a structure of observed teaching outcomes (SOTO) taxonomy. We used SOTO to evaluate the mathematics teaching knowledge (MTK) of four high school mathematics teachers. We executed this through a quality-oriented and quantity-supplemented case study method by implementing the mathematical quality of instruction teaching observation system proposed by the Learning Mathematics for Teaching (LMT) project in the classrooms of four high school mathematics teachers. The four teachers were observed in their teaching of four units on polynomials from the first volume of general high school mathematics of the 12-year Taiwan National Basic Education Mathematics Curriculum. The four teachers in the case study demonstrated five different cognition levels of MTK: unistructural, multistructural, relational, equivalence, and crystalline. Several U–M–R loops appeared in the cognitive development paths of the four case teachers' MTK. The differing SOTO cognition levels and knowledge dimensions of the four case teachers reveal different progressions of MTK mastery, which in turn lead to different styles of MTK. The higher the four teachers' SOTO cognition levels, the better their teaching knowledge quality. The SOTO taxonomy can be used to qualitatively evaluate the MTK of high school mathematics teachers.

Keywords: structure of observed teaching outcome, teaching knowledge, mathematics knowledge, mathematics teaching knowledge

Corresponding author：Erh-Tsung Chin，e-mail：abechin@cc.ncue.edu.tw
Received：13 August 2021;
Accepted：15 October 2021.

壹、緒論

一、研究動機

教學如同推理和領會，亦如同轉化和省思（Shulman, 1987），這些思維方式與反應成果形成一種教學的知識品質，不僅能展現教師學科教學知識的獨特性，和教師專業發展的可複製性（李源順，2004），亦能幫助教師重組學生易於理解與思考的知識。因此，評價（evaluating）教師與數學教學知識，對於教育相關利益者的廣泛學習有深遠的影響（Hill, Umland, Litke & Kapitula, 2012）；再者，教師透過評量（assessment）瞭解學生學習與認知發展，對於教師調整教學與推動學生學習進步的策略，亦是至關重要的。可見，評價工具對教學與學習之認知發展的蘊含意義非凡。

評價數學教師之數學教學知識的意義，是基於客觀務實的教育價值，也是發展數學教師專業成長所要審慎面對的教育挑戰。畢竟，數學教師所做的並非以專業數學家的姿態去定義或者創造數學，而是和學生很像，藉由教與學來理解、解構或者建構數學（Noddings, 1992）。因此，要發展數學教師數學教學知識之評價工具的關鍵要素之一，是深入瞭解專家數學教師之數學教學知識的構成面向（Hill, Ball, & Schilling, 2008），包括數學知識與教學知識。

關於學生從新手變為專家之歷程所展現的學習成果，Biggs 與 Collis（1982）已提出可觀察學習成果結構（Structure of the Observed Learning Outcome, SOLO）分類理論，認為人們思維表徵方式可透過學習，逐漸向更抽象的方向發展，並在認知發展的過程中表現出五個不同結構層次的學習成果。而關於教師與教學知識品質之評量指標，Hill 等人（2012）也建議有需要對教學用數學知識之內涵結構進行分析，提取更多有關這些數學教學知識的有效性與實用性之訊息，以獲得更好的一致性評價。

教育是一切的根本，要透過教育成就每個孩子，也要透過教育培育有志教育的孩子成為優秀教師，以期提升教育品質，培育具有公民素養的下一代，這是一個具有永續循環的教育價值，也是一個具有精緻遞移的教學認知發展。可見學習的認知結構是教學知識之認知發展的基石，故而以 SOLO 分類理論類比數學教師之數學教學知識的結構層次之評價意涵與應用，有其合理性。眾所皆知，教比學更難，因為教師要能夠在教學情境同時兼顧學生、教學、學習等脈絡內容，必須具有更高階的認知結構之教學知識，將當前的學校數學內容放置在較大的景色（Ball & Bass, 2009），這種數學教學所需要具備的更寬闊視野，不僅讓教師有機會覺察自己的教學知識、思考及信念（Mitchell & Marin, 2015; Schoenfeld, 2011），亦能促進教師覺察自己在教學情境中所做教學決策的改變。由此可見，數學教師所展現的數學教學知識之認知層次應比學生的學習成果在 SOLO 的結構層次更高。

基於上述，為了建立一個類似 SOLO 理論，以認知層次來描述高中數學教師之數學教學知識的評價工具，本研究參酌 Learning Mathematics for Teaching (LMT) Project（2000）計畫中，研究教學的數學品質指標（Mathematical Quality of Instruction, MQI）（以下簡稱 MQI 編碼系統），作為建構本研究課室觀察編碼系統的參考，分析四位高中數學個案教師針對高中數學領域之多項式教學單元所展現的數學教學知識。冀期所建立的評價工具，不僅能用於分析高中數學教師的數學教學知識所展現的認知層次及其發展的主要特徵，協助教師自我評鑑與察覺個人的教學知識品質，也能對整個教育評量的完整性，包括教師專業與學生學習評量，在教育意義與價值上做出重大的貢獻。

二、研究目的

為了建立一個分析高中數學教師之數學教學知識的評價工具，應先聚焦於數學教師在「教學」中知道與使用哪些數學知識與思考，也就是直接研究教師在教學情境中所用的與所需要的數學本質與內涵（Ball & Bass, 2000）。因此，本研究目的有下列兩項：

（一）描述高中數學教師之數學教學知識的認知層次及其發展的主要特徵，建立一個分析高中數學教師之數學教學知識的評價工具。

（二）利用所建立的評價工具分析四位個案教師的數學教學知識，探討其數學教學知識之認知層次的差異性。

貳、文獻探討與理論架構

一、數學教學知識的意涵與知識面向

Shulman（1987）認為學科教學知識（pedagogical content knowledge, PCK）能夠幫助教師將主題內容知識轉化為教學教材知識。Fennema 與 Franke（1992）分析數學教師的相關文獻後，提出在教學情境中發展的數學教學知識模型，認為教師的數學知識、教學法知識、學習者數學認知的知識會在教學情境脈絡中交互作用。又相關研究（陳彥廷，2015；Grossman, 1990; van Driel, Verloop, & de Vos, 1998）亦發現，教師進行不同主題單元教學時，會展現出具有「特殊主題整合」（topic-specific integration）特色的數學 PCK 樣態。由此可見，具有數學教學知識認知結構的數學教師能夠融合一般教學知識，同時也能深層理解數學學科內容知識，以及熟稔數學獨特教學規準的知識（Cheang, Yeo, Chan, & Lim-Teo, 2007）。因此，本研究針對「數學教學知識（mathematics teaching knowledge, MTK）」進行操作型定義是，數學教師運用自己對數學內容知識的組織與理解能力，藉由學生背景知識與能力的瞭解，和有效教學法的使用，執行數學專業領域教學過程中所涉及的知識。

Ball、Thames 與 Phelps（2008）提出數學教學用知識（Mathematical Knowledge for Teaching, MKT）之卵形領域圖（oval domain map）模型，將教師在進行數學教學時的知識分成兩大類別，分別為學科內容知識（subject matter knowledge, SMK）與學科教學知識（pedagogical content knowledge, PCK）。Ball 等人（2008）認為應該要對教學活動進行數學分析，方能瞭解教學知識如何被實踐，以及數學知識如何被使用，故從質與量兩個途徑來研究教師教學知識，其中質的方面是從 MTLT（Mathematics Teaching and Learning to Teach）計畫，建立一個數學教學資料庫，從教學情境中分析教學所需要的數學知識；而量的方面是為了補充質性分析的不足，從 LMT（2000）計畫中，發展檢測教學中數學知識品質（Mathematical Quality of Instruction, MQI）的系統，得到 MKT 的六個知識領域。由此可見，Ball 等人透過數學分析探討數學教師的教學知識之認知發展，如何在數學內容知識（SMK）和教學內容知識（PCK）之間產生交互作用，這樣的觀點不僅支持，亦啟發本研究利用數學知識之內涵特徵，建立一個數學教學知識的分析架構，探討高中數學教師的數學教學知識在教學實作中的整合情形及其所展現的認知層次之發展樣貌。因此，本研究參酌 LMT（2000）之 MQI 編碼系統，發展一個高中數學教師的課室觀察系統，又為了能較完整地呈現符合臺灣高中數學教師之數學教學知識類別的認知層次，故將高中數學教師的數學教學知識界定為「回應學生」、「數學的嚴謹性與豐富性」、「連結課室實務的數學」等三個知識面向，作為本研究探究個案教師數學教學知識認知層次的分析架構。

二、數學教學知識的認知層次分析對照

許多國內外學者（鍾靜、張淑怡、陳幸玫、陸昱任、戴坤邦，2012；Fennema & Frank, 1992）研究數學教學知識，多以靜態的觀點審視教師所具備的專業知識樣貌，檢視教師所具備的數學教學相關知識。此外，也有學者（林碧珍，2001；Cochran, DeRuiter, & King,1993）認為教師的學科知識是會隨著教學活動不斷與其他知識互相連結與整合，應以動態觀點審視教師的專業知識樣貌。易言之，教師所具備的數學教學知識包含其特定主題的數學知識，並總和許多教學面向而組成的知識（Abell, 2008），是無法脫離教學情境脈絡的。故而衍生兩種關於教師的數學教學知識之主要研究取向，其一是探究學科教學知識內的其中一個知識面向是如何影響其他的知識面向；其二、學科教學知識的某個知識面向與整體學科教學知識之間的關聯（Park & Chen, 2012）。因此，本研究旨在整合出數學教學知識之三個知識面向的評價規準，作為分析個案教師數學教學知識結構層次的工具，探討某知識面向的認知層次與整體數學教學知識之間的關聯性，及其在教學過程中的發展脈絡。

Piaget（1972）認為數學整體而言可視為結構的建置，從一個層級移動到另一個層級，這樣的過程在其中可轉變成為一個理論物件，亦可能會一直重複達到結構性的交替或是被一個更強大的結構所取代。Fennema 與 Franke（1992）亦認為數學教師的教學知識會在其所處教學脈絡

的交互作用下不斷發展。另外，Schoenfeld（2011）也認為教師在教學脈絡中所注意的是他（她）所重視的，也會影響他（她）的教學決策，進而產生他（她）不同的教學行為，都與他（她）的信念與知識相關。由此可知，教師的數學知識在教學情境中，會不斷地與教學知識整合，透過心智的壓縮與連結，內化成經常使用的數學教學知識，並逐步導致精緻化，形成一個可思考的知識體（Gray & Tall, 2007; Tall, 2013）。這樣精緻化的教學歷程，將導致數學教師展現出不同認知層次的數學教學知識。故本研採用 Gray 與 Tall（2007）的觀點，認為教師的數學知識在教學情境中，會不斷地與教學知識整合，透過心智的壓縮與連結，內化成經常使用的數學教學知識，並逐步導致精緻化，形成一個可思考的知識體；相對地，教師的教學知識亦會隨著與數學知識進行交互作用，在教學情境不斷整合發展與改變。

另一方面，Hashweh（2005）認為研究教師學科教學知識時，必須深入的探討學科教學知識中的所有知識面向之間的關聯性，以及教師如何將學科知識與教學知識實踐於教學情境中。陳彥廷（2015）亦指出，要探究教師的數學教學知識是不能迴避教師的學科內容知識。因此，本研究依據上述觀點，提出「數學教學知識之認知層次分析對照圖」（the analysis and comparison graph of the cognitive level of mathematics teaching knowledge），利用此圖描述數學教師在教學情境中所呈現的數學教學知識之認知層次，亦用以分析各認知層次的數學知識與教學知識之整合情形。此「數學教學知識之認知層次分析對照圖」之建構分為切割、分析和繪製等三個步驟，首先依教學段落與時間為原則，切割個案教師在教學情境中的數學教學知識事件，再根據研究團隊所發展的 MTK 編碼系統，分析每個數學教學知識事件所涉及的數學教學知識面向，最後將分析的內容分類繪製成教師的數學教學知識之認知層次分析對照圖。

三、SOLO 理論及其架構

SOLO 分類理論是由澳洲教育心理學家 John Biggs 與 Kevin Collis（1982）所提出的，是一種以質性等級描述學習行為表現的評價方法。此理論認為描述學習發展和認知結構的最佳方法，是分析學生的反應，即對刺激問題的回答。它也認為根據學生反應，能推測其內在認知過程的結構，亦能分析其對問題的深層理解，進而根據這些學習表現適切合理地評價其所處的認知發展階段。因此，SOLO 分類理論認為學生可透過學習將思維的表徵方式，逐漸向更抽象的方向發展，並在認知發展的過程中表現出五個不同結構層次的學習成果。

SOLO 的五種結構層次及其特徵，分別為

（一）前結構層次（pre-structural）：其特徵是學生缺乏解決問題的簡單知識，或回答問題時邏輯混亂或語意反覆，故無法正確使用相關表徵方式處理任務。

（二）單一結構層次（uni-structural）：其特徵是學生只關注單一狀況，使用一個相關線索，一找到線索就立即跳到結論，故學生會忽視問題內部其他可能出現的訊息或矛盾。

（三）多重結構層次（multi-structural）：其特徵是學生會使用兩個或多個線索，卻不能覺察到這些線索之間的聯繫，也不能對線索進行聯結。

（四）關聯結構層次（relational）：其特徵是學生能夠使用可獲得的線索，將問題的相關資訊聯結成一體，不僅能觸發聯想來解決較為複雜的問題，亦能夠在過程中進行反向操作，檢查錯誤與矛盾之處。

（五）擴展抽象結構層次（extended abstract）：其特徵是學生表現出強烈的探索精神，會歸納問題並概括出較抽象的結果，所得的結論不但能拓展問題本身的意義，亦對當前學習內容產生開放性和創造性的學習價值（Jimoyiannis, 2011）。

綜言之，SOLO 分類理論利用這五種結構層次，質性描述學生對某個學習內容的認知程度，這些反應成果不僅能判斷學生從新手到專家的發展過程中所展現的某種思維表徵方式，亦能對該表徵方式的學習成果進行分類與評價。

因此，此分類法的理論架構啟迪了本研究探討高中數學教師之數學教學知識的認知層次。顯然，數學教師的數學教學知識不太可能出現類似 SOLO 分類法的前結構層次之特徵，事實上，教比學更難，一個有能力真正地學的人，需要很久的時間才能夠真正地教（Heidegger, 1993; Lerman, 2001）。由此可見，高中數學教師的數學教學知識必然會超越擴展抽象的認知層次，方能迎合這樣層次的學生之學習需求。此外，數學教師在擴展抽象結構層次中除了會展現出歸納與拓展數學概念的教學知識外，亦會在教學情境中概括與推理出某些數學概念或問題之間的等價關係，故數學教師的數學教學知識應會漸進至雙向對偶性推理的等價結構層次。

參、研究方法

一、研究設計與參與者

（一）研究設計

為了建立分析高中數學教師之數學教學知識（mathematics teaching knowledge, MTK）的評價工具，探討其認知層次及其發展的主要特徵，故本研究使用個案研究法，針對四位高中數學個案教師之 MTK 進行資料蒐集與探討，為分析與描述其數學教學知識之認知層次與知識面向，提供一個周延而完整的研究策略（Yin, 2017）。同時，研究者進入四位個案教師的教學現場進行教學觀察與錄影，並改編 LMT（2000）之 MQI 編碼系統的細項，整合出四位高中數學個案教師在教學實作中所出現的類目編碼。

又為了更客觀的深入理解個案教師數學教學知識所展現的認知層次與知識面向，研究者也輔用持續性比較分析法（Strauss & Corbin, 1998），針對四位個案教師的課室教學影片進行深度分析與比較，以便提供資料分析方法方面的三角校正（Fusch, Fusch, & Ness, 2018）。由此可見，

本研究採取質的個案研究法，主要是針對四位高中數學個案教師的課室教學影片進行質性分析，整合出高中數學教師 MTK 之評價工具的編碼系統，再以此編碼系統的內涵特徵，對四位個案教師之數學教學知識的認知層次進行質性描述，並提供具體相關證據以資佐證，因而形成一個理論描述與主題探索兼具的個案研究設計（Creswell, 1998）。

（二）研究參與者

1.研究對象

為了充分探討高中數學教師之數學教學知識的認知層次，透過較為豐富的教學實作內容進行觀察、比較及分析，將有助於理解教學所用的和所需的知識類別與認知層次。有研究文獻（Chinnappan & Lawson, 2005）指出，資深教師的教學知識比新手教師更有結構性且富有連通性，在教學情境所展現的數學知識之流暢性也比較好。因此，研究者立意選取四位高中數學資深教師，均來自於臺灣中部同一所公立高中，其背景資料如表 1 所示。為了保密起見，四位個案教師均給予代號，分別為 ST1~ST4，教學年資分別為 17、15、20 及 27 年，且皆為男性。

表 1

個案教師背景資料

教師代號	ST1	ST2	ST3	ST4
性別	男	男	男	男
畢業學系	某國立大學數學系	某國立師範大學數學系	某國立大學資訊系	某國立師範大學數學系
教育程度	碩士	學士	學士	碩士
教授學科	數學	數學	電腦、數學	數學
特殊教學經驗	數理資優班	科學班	語文資優班	數理資優班、科學班
教學特殊專長	指導科展與競賽	指導科展與競賽	指導科展與競賽	指導科展與競賽
開設課程經驗	多元選修課程	多元選修及競賽培訓課程	多元選修課程	多元選修及競賽培訓課程
教學年資	17	15	20	27

2.研究分析社群

研究者為了整合數學教學知識之編碼系統，充分理解高中數學教師之數學教學知識之面向，組織一個數學分析社群，成員及其角色包括：一位數學專家學者，提供高階數學領域的高度視野；一位數學師資培育者，提供相關數學教育理論的觀點；二位數學諮詢專家教師，提供相關

數學教學知識、想法和經驗並協助信度的檢測；四位個案教師，提供課室教學觀察與分享教學觀點；以及一位數學教育博士生，協助信度的檢測並提供關於研究上相關議題的不同觀點。

二、資料收集與影片分割編碼

（一）資料收集

經由諮詢專家討論後，所選取的高中課程教學單元內容儘量包含：數學概念的建立、發展該概念同時表徵過程與符號的過程概念以及連結該過程概念形成可思考的知識結構等三個教學面向，故研究者選取 108 課綱高中數學第一冊多項式之四個單元，作為四位個案教師課室觀察錄影的教學主題。研究期間針對這四個單元收集了四位個案教師的教學影片，總共約 2624 分鐘，大約 44 小時。由於每位個案教師的教學風格與速度不盡相同，故其每個單元的教學影片總時間不同，又為了保有完整的教學片段，所截取的教學影集個數亦有些差異，經過統計整理後，得到四位個案教師之教學影片時間個數摘要表，如表 2。

表 2 中的單元 1 至單元 4，依序為多項式的除法原理、一次與二次函數、三次函數的圖形特徵、以及多項式不等式。根據表 2 的數據分析顯示，每位個案教師之教學影片時間大約介於 9.3~12.3 小時之間，其中這 3 個小時的差異，主要原因是個案教師 ST2 與 ST4 的延伸補充教材比其他兩位個案教師較多之故。另外，這四個主題之教學內容在四位個案教師的整體教學時間之比例，以單元 1 和單元 2 最大，分別介於 35~43%及 31~45%，此比例與 108 課綱高中數學第一冊多項式之四個單元節數之間的佔比相似。

表 2

四位個案教師之教學影片時間暨影集個數摘要表（時間單位：分）

	單元 1		單元 2		單元 3		單元 4		整體總和	
個案教師	影片時間	影集個數	影片時間	影集個數	影片時間	影集個數	影片時間	影集個數	影片時間	影集個數
ST1	198	15	216	16	74	6	67	5	555	42
佔比%	35.7	35.7	38.9	38.1	13.3	14.3	12.1	11.9	100	100
ST2	320	26	233	17	119	8	63	5	736	56
佔比%	43.4	46.4	31.7	30.4	16.2	14.3	8.7	8.9	100	100
ST3	223	17	230	18	81	6	78	6	613	47
佔比%	36.4	36.2	37.6	38.2	13.2	12.8	12.8	12.8	100	100
ST4	245	17	324	25	60	6	86	6	717	54
佔比%	34.2	31.5	45.3	46.3	8.4	11.1	12.1	11.1	100	100

由於錄影資料能夠忠實地提供有關語言敘述的線索與行為事件的記錄，經由適當的轉換程序如觀察、編碼和計數後，同時結合質性和量化的分析研究，不僅能統合時間與分析方式的使用，亦有助於研究者探索社會行為的特質與重要性（Jacobs, Hollingsworth & Givvin, 2007）。因此，本研究參酌 Jacobs 等人（2007）所提的錄影資訊編碼循環模型，從藉由數學分析社群不斷重複觀看教學影片與討論開始，再產生構念、建立編碼及檢測信度，最後進行分析判斷並連結影片資料，以求更深入的理解 LMT（2000）MQI 編碼系統的細項之顯性特徵，直到整合出本研究用以評價與描述數學教學知識的編碼系統為止。

（二）影片切割

關於各個教學單元影片的分割，經由數學分析社群的觀看、討論和分析，以保有教學內容的完整性為原則，將各教學單元影片分割成多個教學影集，再將一個教學影集以每五分鐘左右切成一個數學教學知識事件（以下簡稱教學事件），作為判斷個案教師 MTK 的分析單位，以利觀察者審慎觀察與客觀分析。例如，若教學影集時間為 11.25，則切割成 5 與 6.25 等兩個教學事件；若教學影集時間為 13.21，則切割成 5、5 及 3.21 等三個教學事件。

三、研究工具

為了建立高中數學教師數學教學知識之評價工具的編碼系統，本研究改編 LMT（2000）之 MQI 編碼系統，作為整合高中數學教師之數學教學知識的編碼系統（以下簡稱 MTK 編碼系統）的參考。鑑於高中數學領域的知識有許多是屬於高推論性的，觀察者必須要運用其數學知識進行判斷才能夠進行分類編碼（卓益安、金鈴，2012），故研究者藉由兩位具有高階數學概念的觀察者來檢視各項目的信度。以下說明建立 MTK 編碼系統表的流程。

（一）MTK 編碼系統表的製作

本研究參照 MQI 編碼系統的各細項，藉由數學分析社群的不斷重複觀察與討論，針對個案教師之教學影片內容，按照前述三個教學面向做分類，精選出較適合用於分析臺灣高中數學教師之數學教學知識的細項。同時，在討論過程中持續進行比較與分析、整併與歸類，甚至新增類目，直到內涵類目無法再歸併為止，最後統整成本研究之 MTK 編碼系統表，如表 3。以下針對表 3 的主、次類目之調整情形加以說明。

表 3

MTK編碼系統表

主類目	次類目	代碼
回應學生 Responding to Students（RS）	迷思概念之診斷與提前佈局因應	M_1
	數學條件與結果的判斷	M_2
數學的嚴謹性與豐富性 Rigor and Richness of the Mathematics（RRM）	數學符號與詞彙的定義和使用	M_3
	多元思考模型	M_4
	數學概念與表徵的連結及比較	M_5
	使用計算器或具體模型表達數學概念	M_6
	數學定理及公式的使用	M_7
	延伸與推廣數學概念	M_8
	利用數學證明或數學軟體進行高階思考	M_9
	引入超出當前內容的數學定義與符號	M_{10}
	與數學家或數學史連結	M_{11}
連結課室實務的數學 Connecting Classroom Practice to Mathematics（CCPM）	使用一般語言進行數學描述	M_{12}
	使用數學事實	M_{13}
	補充進階探究問題或提示教材的位置	M_{14}
	使用術語輔助概念學習	M_{15}

1.主類別的調整

將 MQI 編碼系統的五個主類別，根據數學本質與內涵（Ball & Bass, 2000），整併成 MTK 編碼系統的三個主類目，分別為回應學生（Responding to Students, RS）、數學的嚴謹性與豐富性（Rigor and Richness of the Mathematics, RRM）、以及連結課室實務的數學（Connecting Classroom Practice to Mathematics, CCPM）。例如，將「偕同學生的數學使用」與「教學的內容與安排」整併為 RS；將「教學活動中數學領域的知識」與「課程和教師帶導的數學特徵」整併為 RRM；將「課程和教師帶導的數學特徵」與「為了教學平等使用的數學」整併為 CCPM。

2.次類別的刪減

依據數學本質的定位分析，經過數學分析社群討論後，刪減 MQI 系統中的十個細項。例如，關於「全體、小組或個人活動的安排」，和「教師鼓勵並提供學生自主工的機會」等細項，主要考量是與數學本質的關聯性甚少，故予以刪除。

3.次類別的新增

（1）RS 部分

經由數學分析社群討論後，認為數學教師應必備一項教學知能就是解惑，主要考量是學生

問題的出現具有不可預知性，若要回答學生所遭遇的問題，則需要運用深厚的數學知識與經驗。因此，在 RS 中新增了兩個次類目，分別為「數學條件與結果的判斷」與「迷思概念之診斷與提前佈局因應」，以闡述高中數學教師能覺察其講解或計算時所出現的錯誤，或適當地解釋學生的數學想法與迷思概念。

（2）RRM 部分

經由數學分析社群討論，參酌臺灣 108 課綱普高數學領域的基本理念，認為任何一個數學定理和公式的誕生，都推動了數學史的發展，並在其中佔據了一個無法取代的地位；同時，數學史能夠幫助教師理解數學發展在不同時期與不同文化的差異，更能協助教師釐清數學學習的主軸。因此，在 RRM 中新增了「數學定理及公式的使用」與「與數學家或數學史連結」等兩個次類目，以描述教師在介紹數學定理與數學史時所展現的知識脈絡與演繹思考之教學知識，畢竟將數學史融入教學需要整合很多數學概念（蔡文榮、張鈞淇、劉柏宏，2019），讓學生瞭解數學每一個公式定理的出現，都會對數學知識的發展產生關鍵性的影響。

另外，數學分析社群在觀看與討論四位個案教師之教學影片時，發現部分高中數學教師能熟悉並運用一些大學數學的高階知識與數學思維，這現象對教師教學與解答學生問題具有啟發作用。因此，在 RRM 中新增「延伸與推廣數學概念」與「引入超出當前內容的數學定義與符號」等兩個次類目，用以陳述教師運用高階知識和高觀點思維於學生學習的目的和優勢上。

綜合上述，本研究經過刪減、合併和新增過程，整合成 MTK 編碼系統的三個主類目與十五個次類目，其代碼分別為 M1~M15。在 MTK 編碼系統的每個次類目內涵，除了能闡述數學內容知識的類別特性外，亦能描述各主類目之教學知識的認知層次。例如，在 RRM 主類目中，當教師使用兩點距離公式進行解題，則其數學內容知識歸屬「數學定理及公式的使用」次類目。如果教師先利用水平、鉛直之投影距離與兩點之距離會構成一個直角三角形，再使用畢氏定理，推理得到兩點距離公式的數學內容知識，則應歸屬「利用數學證明或數學軟體進行高階思考」次類目，且其教學知識的認知層次亦較高，主要關鍵在於教師能從不同視野與高度切入，運用高階數學思考執行論證程序，而非直接將公式套用到解題程序。

（二）MTK 編碼系統表之內涵特徵的介紹

以下逐一介紹調整後的 MTK 編碼系統各知識類目的教學知識，並提供個案教師教學影片所轉譯的質性資料，佐以描述其所展現的數學教學知識，闡明其與本研究之高中數學教師的教學知識品質有密切的關聯。

1.回應學生（Responding to Students, RS）：包含二個次類目，分別說明如下。

（1）迷思概念之診斷與提前佈局因應：對學生的迷思概念作反應，或利用學生的想法或算式解釋數學概念。例如，個案教師 ST2 在單元 2 有一段教學情境呈現此知識類別，簡述如

下：

「教師提供一道有關解不等式時學生常出現之迷思概念的例題，讓學生提早因應與思考，題目是已知一次函數 $f(x)$ 滿足 $1 \le f(1) \le 7, 2 \le f(2) \le 5$，求 $f(5)$ 的範圍。教師提供含有迷思概念的錯誤解法，如圖 1，讓學生思考與判斷，經過和學生互動討論後，指出產生迷思概念的關鍵在於等號成立的條件。」

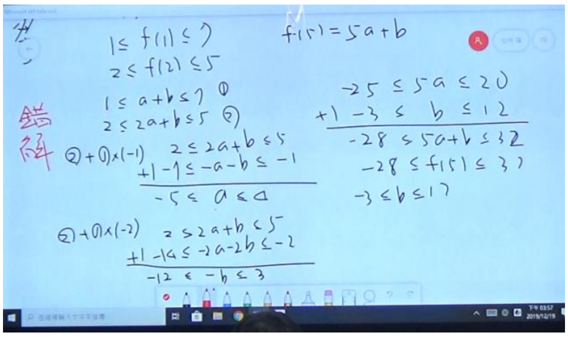


圖 1　迷思概念之診斷與提前佈局因應

（2）數學條件與結果的判斷：判斷講解或計算出現的錯誤，或解讀學生的想法與答案。例如，個案教師 ST3 在單元 2 有一段教學情境呈現此知識類別，簡述如下：

「教師請同學上台分享解法，學生說明：由 $a+b=k-2$，$ab=k^2+3k+5$，列出 $a^2+b^2=-(k+5)^2+19$，再由 k 的限制條件 $-\frac{4}{3} \ge k \ge -4$ 進行判斷，即可得最大值應該是 $-1+19=18$，如圖 2。接著，教師判斷並回應：這位同學的解題想法關鍵在於，利用二次方程式有兩實根的條件，列出 k 的限制條件，進而求得最大值的正確答案，否則大部分的同學都以為最大值是 19，那是因為他們都忽略了實根的關鍵條件。」

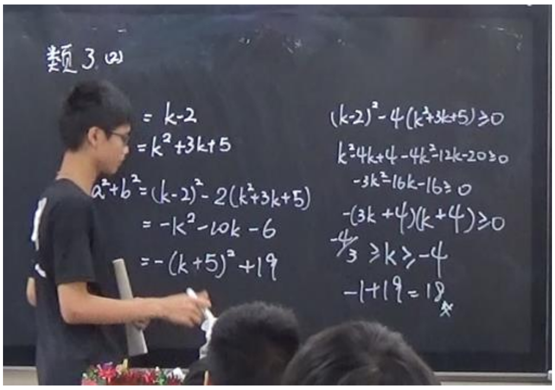


圖 2　應數學條件與結果的判斷

2.數學的嚴謹性與豐富性（Rigor and Richness of the Mathematics, RRM）：包含九個次類目，分別說明如下。

（1）數學符號與詞彙的定義和使用：賦予數學概念符號表徵與詞彙描述。例如，個案教師 ST3 在單元 2 有一段教學情境呈現此知識類別，簡述如下：

「教師利用對應關係之詞彙與集合的符號表徵對函數做出定義，如 A 為定義域、B 為對應域、以及值域為 $f(A)$，使用符號表徵 $f(A) \subset B$，說明值域是對應域的子集合。並以兩集合關係 $A \subset B$ 且 $B \subset A$ 之符號表徵代表兩集合互相包含，用來描述兩集合相等，如圖 3。並在黑板上書寫函數的定義：$f: A \to B$，滿足 $\forall x_i \in A$，$\exists y_i \in B$，使得 $f(x_i) = y_i$，則 y 稱為 x 的函數」。

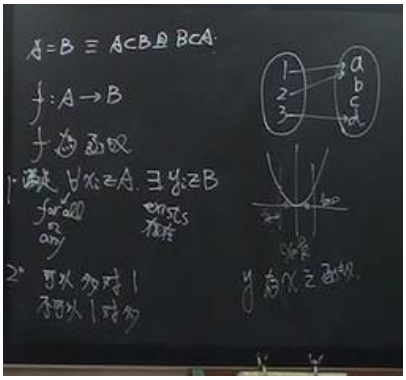


圖 3　數學符號與詞彙的定義和使用

（2）多元思考模型：使用多重模型或觀點表達數學概念，展現概念的不同面向，如使用一題多解模式。例如，個案教師 ST3 在單元 4 有一段教學情境呈現此知識類別，簡述如下：

「教師透過多重模型或想法，針對例題：已知 $x \in R$，求 $f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 2}{x^2 + x + 1}$ 之最大值與最小值，以及 $f(x) = \dfrac{x^4 + 2x^3 + x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$ 之最小值，提供兩種截然不同的解法，其一是利用二次方程式有實根的判別式恆大於等於零的想法；其二是利用算幾不等式的模型求得最小值。對數學問題與概念，展現多元數學思考的教學知識，如圖 4。」

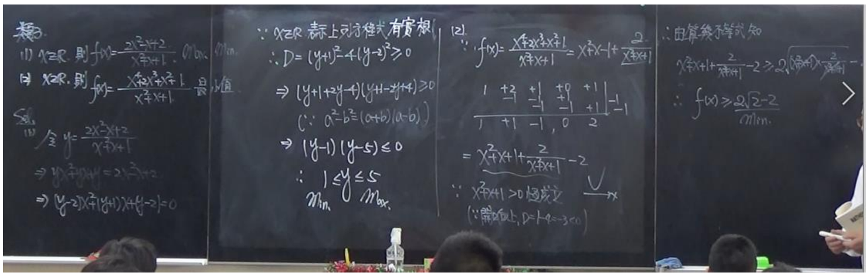


圖 4　多元思考模型

（3）數學概念與表徵的連結及比較：指出數學概念與表徵間有所關聯，或指出解法優劣異同。例如，個案教師 ST4 在單元 2 有一段教學情境呈現此知識類別，簡述如下：

「教師整理二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 之圖形結構，與係數 a, b, c 及判別式 b^2-4ac 的正負關係，如圖 5，如 a 用來判斷其凹口方向，b 可由對稱軸的位置，或圖形與 y 軸交點的切線斜率 m，也就是如果 m 是正的，b 是正的，而 m 是負的，b 是負的。」

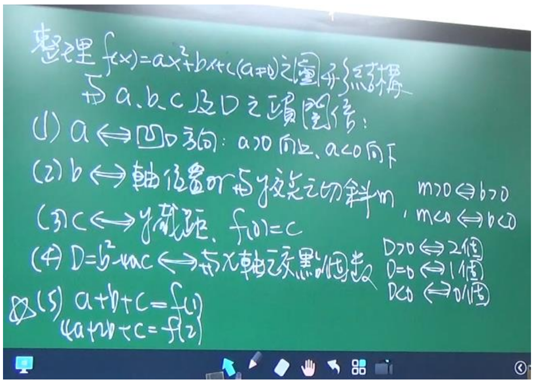


圖 5　數學概念與表徵的連結及比較

（4）使用計算器或具體模型表達數學概念：操作計算器或在黑板上畫圖，幫助理解數學概念。

例如，個案教師 ST1 在單元 3 有一段教學情境呈現此知識類別，簡述如下：

「透過平移變換消去二次項後，將函數 $f(x)=x^3-6x^2+4x-24$ 轉換為 $f(x)=(x-2)^3-8(x-2)-32$；再利用綜合除法，將 $t^3-8t-32=(t-4)Q(t)$ 化為 $f(x)=(x-2)^3-8(x-2)-32=[(x-2)-4]Q(x)$，如圖 6。並畫出其函數圖形會通過 x 軸上點 $(6,0)$，說明圖形彎曲的關鍵在於三次與一次係數的正負」。

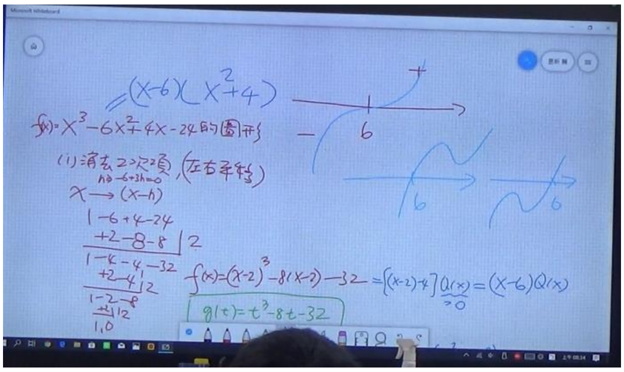


圖 6　使用計算器或具體模型表達數學概念

（5）數學定理及公式的使用：套用數學定理與公式，包括恆等式及不等式的數學式，執行有效率的數學程序。例如，個案教師 ST3 在單元 2 有一段教學情境呈現此知識類別，簡述如下：

「關於函數 $y=3x^2$ 如何平移可得到新函數 $y=3x^2+12x+16$。教師利用代換公式，將 $y=3x^2$ 向右平移 h，向上平移 k，得到 $y-k=3(x-h)^2$，再與 $y=3x^2+12x+16$ 之係數進行對照，求得 $h,$

k 之值，如圖 7。」

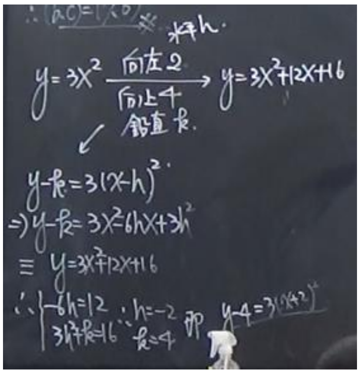


圖 7　數學定理及公式的使用

（6）延伸與推廣數學概念：將當前數學概念延伸，推廣為進階的數學知識。例如，個案教師 ST3 在單元 1 有一段教學情境呈現此知識類別，簡述如下：

「延伸多項式的表達式，推廣牛頓與拉格朗日插值多項式的數學概念。關於滿足三個多項式值 $f(\alpha_1)=\beta_1$，$f(\alpha_2)=\beta_2$，$f(\alpha_3)=\beta_3$ 的最低次多項式，其牛頓插值多項式為 $f(x)=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)+\mathrm{b}(x-\alpha_1)+\beta_1$，如圖 8，而拉格朗日插值多項式為 $f(x)=\beta_3\dfrac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)}+\beta_2\dfrac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)}+\beta_1\dfrac{(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)}$。」

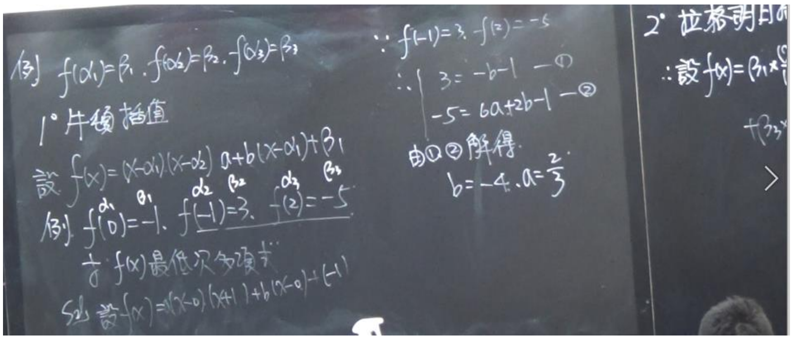


圖 8　延伸與推廣數學概念

（7）利用數學證明或數學軟體進行高階思考：證明數學公式、定理或性質，或藉助數學軟體進行高階思考。例如，個案教師 ST4 在單元 4 有一段教學情境呈現此知識類別，簡述如下：

「證明一道題目，已知 $a+b+c>0$，$ab+bc+ca>0$，$abc>0$，試證：a,b,c 均為正數。教師先點出 a, b, c 的正負共有八種，要怎麼證明其中一種三個都是正的。再解釋題目敘述與多項式並無關聯，要如何聯想到使用多項式概念證明此題，如圖 9，讓學生學習運用過程概念進行推理證明。」

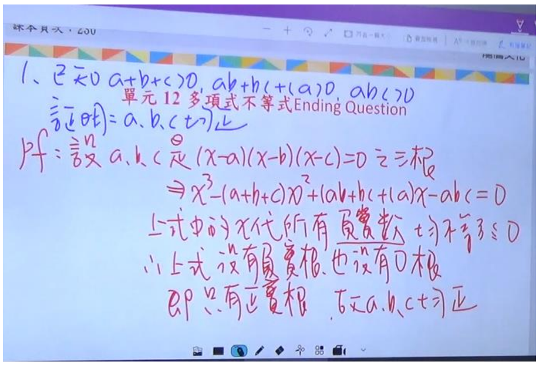


圖 9　利用數學證明或數學軟體進行高階思考

（8）引入超出當前內容的數學定義與符號：介紹非當前內容的高階數學符號表徵與數學概念定義。例如，個案教師 ST4 在單元 1 有一段教學情境呈現此知識類別，簡述如下：

「教師介紹同餘是高等數論的概念，由德國數學家高斯最先定義，即當兩個整數 a_1 與 a_2 除以同一個正整數 b，得到相同的餘數，則稱 a_1, a_2 對於 b 同餘，以符號 $a_1 \equiv a_2 (\bmod b)$ 表示。顯示教師引入超出當前學校內容的進階概念，發展成多項式餘式的模運算，如圖 10。」

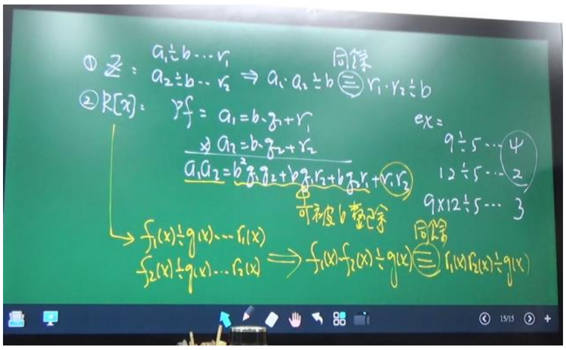


圖 10　引入超出當前內容的數學定義與符號

（9）與數學家或數學史連結：涉及介紹相關數學概念的數學發展史，或數學家的數學想法。例如，個案教師 ST2 在單元 1 有一段教學情境呈現此知識類別，簡述如下：

「教師提及牛頓是三大數學家之一，包括阿基米德、高斯。並介紹牛頓解題想法如下：已知 $f(1)=7, f(3)=1, f(4)=10$，先作一個圖表，在圖表中算斜率，求得一次斜率 $\frac{1-7}{3-1}=-3$，$\frac{10-1}{4-3}=9$，…，再求二次斜率（不是真正的斜率）$\frac{9-(-3)}{4-1}=4$，最後將所得到的 $4,-3,7$ 圈起來，如圖 11，指出這三個值與 $f(x)=4(x-1)(x-3)-3(x-1)+7$ 中的係數 $4,-3,7$ 之關係。」

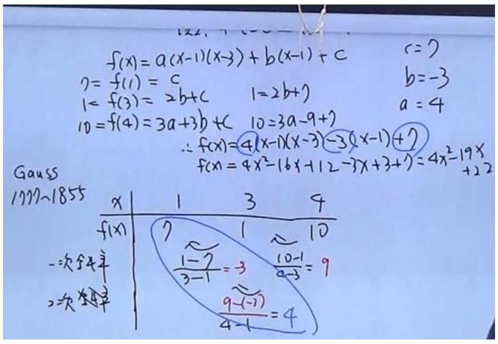


圖 11　與數學家或數學史連結

3.連結課室實務的數學（Connecting Classroom Practice to Mathematics, CCPM）：包含四個次類目，分別說明如下。

（1）使用一般語言進行數學描述：利用生活語言譬喻或表達數學概念，條理清楚的解說數學步驟或程序。例如，個案教師 ST1 在單元 1 有一段教學情境呈現此知識類別，簡述如下：

「根據政府部門統計，說明臺灣的觀光客以日本最多。因為超便宜，由於日本薪水和物價指數合起來是臺灣的 10 倍，也就是說在臺灣可以賺 4 萬元，在日本可以賺 40 萬元，但匯率兌換只有 3 點多，所以超便宜的。舉例說在日本一碗拉麵 6、7 百日元，換算臺幣要 200 元。教師利用數學的線型函數，以日常用語解釋生活情境的數學問題。」

（2）使用數學事實：自動化提取學過或精熟的數學知識或問題，如心算、過程概念、或特殊的數學感。例如，個案教師 ST2 在單元 4 有一段教學情境呈現此知識類別，簡述如下：

「教師將已學過的二次函數 ax^2+bx+c 恆負之充要條件為 $a<0$ 且 $b^2-4ac<0$，視為二次函數圖形結構的數學事實，如圖 12。這樣的數學事實能幫助教師快速掌握數學概念的重點，也能在教學過程中快速提取，支持學生進行解題思考。」

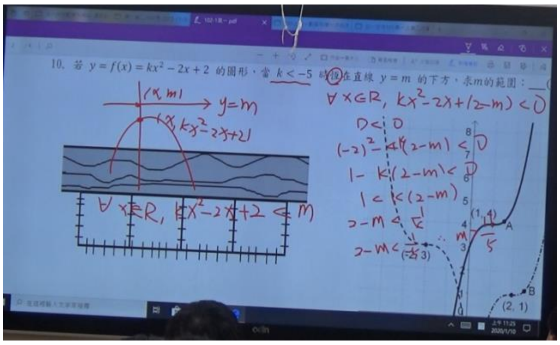


圖 12　使用數學事實

（3）補充進階探究問題或提示教材的位置：補充非當前學校內容的進階問題，幫助學生更加理解數學概念，或提及與未來學習有關聯的內容位置。例如，個案教師 ST4 在單元 3 有一段教學情境呈現此知識類別，簡述如下：

「教師介紹三次函數的圖形特徵之學習單元，在舊課程是規劃在高三選修課程，以微積分為工具探討它的圖形結構。當前數學內容是以一次與二次函數為基礎，探討三次函數圖形的結構。」

（4）使用術語輔助概念學習：利用口訣或術語幫助學生理解與記憶數學概念。例如，個案教師 ST4 在單元 4 有一段教學情境呈現此知識類別，簡述如下：

「教師利用解法口訣，將解多項式不等式的四個步驟，稱為一條龍原理：因式分解、畫數線標示實根、畫一尾龍以作答但要注意等號是不成立。如圖 13，協助學生瞭解一條龍是函數圖形的一個意象表徵。」

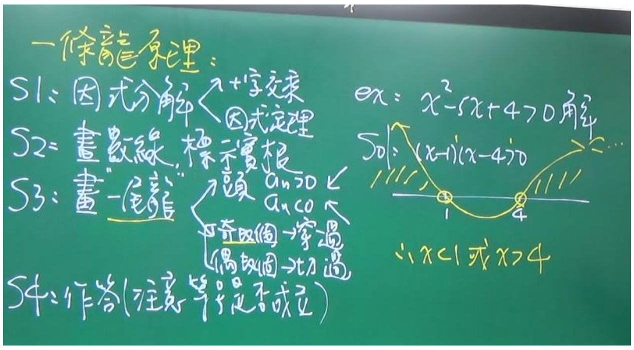


圖 13　使用術語輔助概念學習

（三）MTK 編碼系統表的信度檢測

雖然 MTK 編碼系統的各類目，經由數學分析社群的充分討論所整合而成的，但為了建立可信的編碼系統與減低過度主觀，所以本研究依下列流程檢測此系統的信度。首先，關於信度檢測者的選取，由於所探討高中數學教師之數學教學知識的認知層次，較偏向於數學本質與內涵，又本研究工具之評價原則為，數學教師不論以單調或全面方式展現其數學教學知識，若確定評價規準中的某顯性特徵具體顯現於教學行為，則表示其數學教學知識已由最低層次漸進到其所對應的認知層次，但不注重出現頻率的多寡。也就是說，認知層次提升的判斷關鍵，是根據數學教師在教學情境中的具體教學行為，所展現出對數學知識的理解、意識、覺察、調整與統整之教學思考與策略改變，方能確認其低階認知層次累積足夠飽和度漸進至較高的認知層次。由此可見，MTK 編碼系統之信度的檢驗者應擁有較高層次的數學知識才能正確地編碼。因此，研究者選取數學分析社群中的一位數學專家教師與一位數學教育博士生一起進行一致性的檢測。接著，挑選四位個案教師中教學年資最長之 ST4 的關於第 2 單元之課室教學影片，由檢測者獨立地依據此 MTK 編碼系統表進行判斷、分析和編碼。最後，藉由 kappa 統計量（以下稱 K 值）（Cohen, 1960），進行此系統所有類目的信度檢測。

本研究由 K 值的大小來檢驗兩次以上評估檢測的一致程度，如落在 0.61～0.80 表高度一致

性，落在 0.81 ~ 1.00 表幾乎完全一致性；又根據若以教學影片替代實際課室觀察，則 K 值須大於 0.75 才算達到評價結果之一致性的論點（Frick & Semmel, 1978）。據此，經由信度檢測的 kappa 統計結果，得到 MTK 編碼系統整體的 15 個次類別之 K 值約為 0.86。可見，此結果符合 Frick 與 Semmel（1978）的信度要求，顯示本研究 MTK 編碼系統的評價結果，具有高度的一致性。

另外，在效度方面，在資料收集、討論、分析、編碼和檢驗的研究期間，透過研究者與數學分析社群之成員的三角檢定，提供研究者不同面向的思考，減少研究者疏失與主觀偏見，以獲得較高的研究效度。此外，研究者也與數學分析社群針對課室影片的數學教學知識及其轉譯稿資料持續交叉比較，進行資料來源的三角校正，以檢核資料的正確性，冀期運用完整和豐富的資料，檢驗與分析在四位高中數學個案教師的數學教學知識。

肆、研究結果與討論

本研究旨在建立分析高中數學教師數學教學知識的評價工具，探討其數學教學知識的認知層次及其差異性。以下針對四位高中數學教師數學教學知識的認知層次及其主要特徵，和認知層次的差異性等兩個研究結果，詳加論述如下。

一、個案教師之數學教學知識的認知層次及其主要特徵

針對四位個案教師關於多項式主題內容之四個教學單元的課室教學觀察資料，透過 MTK 編碼系統各類目之顯性特徵，和持續比較法進行質性分析後，發現其教學表現都會出現一些不同認知層次的數學教學知識，同時也顯現出其認知層次發展途徑的主要特徵。以下針對四位個案教師之數學教學知識的認知層次及其主要特徵加以論述。

（一）數學教學知識的認知層次

以下是針對個案教師 ST4 在多項式主題之第 2 單元一次與二次函數的教學影片，透過本研究所發展的 MTK 編碼系統進行分析與評價，並詳細論述此單元教學情境中的一些數學教學知識事件（以下稱為教學事件）所反應的認知層次，和其所涉及的數學教學知識類別。

1.教學事件一：教師 ST4 畫出函數 $f(x)=ax^2$ 之拋物線圖形，指出其開口方向能反應係數 a 之正負值。顯示其數學教學知識處於，單一數學概念反應出一個教學知識內涵，故其認知層次達到單一結構層次（Uni-structural level, U）。而所展現的數學知識與教學知識，分別是使用二次函數圖形為拋物線之數學事實，和運用二次函數領導係數反映圖形開口方向的教學策略。

2.教學事件二：教師 ST4 在黑板上畫出多個二次函數圖形，型如 $f(x)=2x^2-8x+6$，$f(x)=2(x-2)^2-2$，$f(x)=2(x-1)(x-3)$，$f(x)=2(x-1)^2-8(x-1)+6$ 等不同表達式。顯示其數學教學知識處於，多個孤立數學概念各自反應其教學知識內涵，故其認知層次達到多重結構

層次（Multi-structural level, M）。而所展現的數學知識與教學知識，分別是使用二次函數之不同符號表徵的數學概念，和運用不同符號表徵各自反映其圖形結構的教學思考。

3.教學事件三：教師 ST4 講解不同表徵之二次函數 $f(x)=a(x-h)^2+k$ 與 $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ 之間的圖形關係，得到 $h=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 的結果。顯示其數學教學知識處於，將多個關聯性的數學概念連結並聯繫成一個教學知識網絡，故其認知層次達到關結構層次（Relational-structural level, R）。而所展現的數學知識與教學知識，分別是使用數學代數符號表徵的幾何意義之數學概念，和運用數學符號表徵與圖形結構進行連結與比較，來探討其關聯性的教學方法。

4.教學事件四：教師 ST4 利用代數符號表徵，解釋二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$，經過向右平移 h 單位，向上平移 k 單位之平移變換後，得新函數表達式為 $f(x)=a(x-h)^2+b(x-h)+c+k$。再將此過程術語化，即原函數中的 x 用 $(x-h)$ 代換，y 用 $(x-k)$ 代換，也就是常數項加 k。顯示其數學教學知識處於，將關聯性的數學概念進行歸納與整合，並能拓展問題本身的意義，雖然與 SOLO 理論的擴展抽象認知層次相仿，但它亦能推理出其系統性結構的雙向等價關係，可見其認知層次應比擴展抽象層次高，因此本研究稱此認知層次為等價結構層次（Equivalence-structural level, E）。而所展現的數學知識與教學知識，分別是使用等價性的數學概念或程序，形成一個可操作、可思考的過程概念，和運用等價性的過程概念進行數學推理，並將過程概念口語化以利執行程序性知識的教學行為。

5.教學事件五：教師 ST4 補充進階問題進行數學探究，利用二次函數 $f(x)=x^2+c$，提供一個初始情境，給定參數 c 值與初始值 x_0，經過 $f(x)$ 的多次迭代後，藉由 GGB 數學軟體的操作輔助，與學生一起探討迭代函數 $f(f(\cdots f(x)))$ 的動態系統之渾沌問題，引導學生體驗數學應用的探究實作。顯示其數學教學知識已超越一個有關常數項與函數圖形上下平移變換之間的等價認知層次，進而發展到能運用心智連結與壓縮，將高階的數學知識不斷地與教學知識整合，形成一個具有多面向的數學教學知識體系。這個現象與 Tall（2013）所提的結晶概念之觀點相仿，認為它是一個具有內部結構的多面向知識體系，也是數學思考之最高階的認知層次，故本研究引用這個觀點，用以闡述個案教師 ST4 之數學教學知識能達到統籌更高階思維的結晶結構層次（Crystalline-structural level, C）。而所展現的數學知識與教學知識，分別是使用數學條件、工具和具體模型表達數學概念，延伸與推廣數學概念，以及運用數學工具探究進階問題，提供學生一個富有創意與探究學習機會的教學思考與策略。

根據上述教學事件的分析與編碼結果，顯示教師 ST4 在第 2 單元一次與二次函數之整體教學情境所展現的數學教學知識，出現五種不同的認知層次，分別為單一、多重、關聯、等價和結晶結構層次。由此可見，此結果闡明了高中數學教師的數學教學知識具有結構層次的特徵，也

支持本研究建立一個可觀察教學成果結構（The Structure of Observed Teaching Outcome, SOTO）認知層次光譜圖，如圖 14，不僅能描述教師之數學教學知識的認知層次，亦能反應其數學知識和教學知識的內涵特徵。因此，不論從新手教師到專家教師的數學教學知識，都有可能在 SOTO 認知層次光譜圖中展現不同認知層次與知識類別，進而針對其數學教學知識進行分類與評價，故稱為 SOTO 分類法。

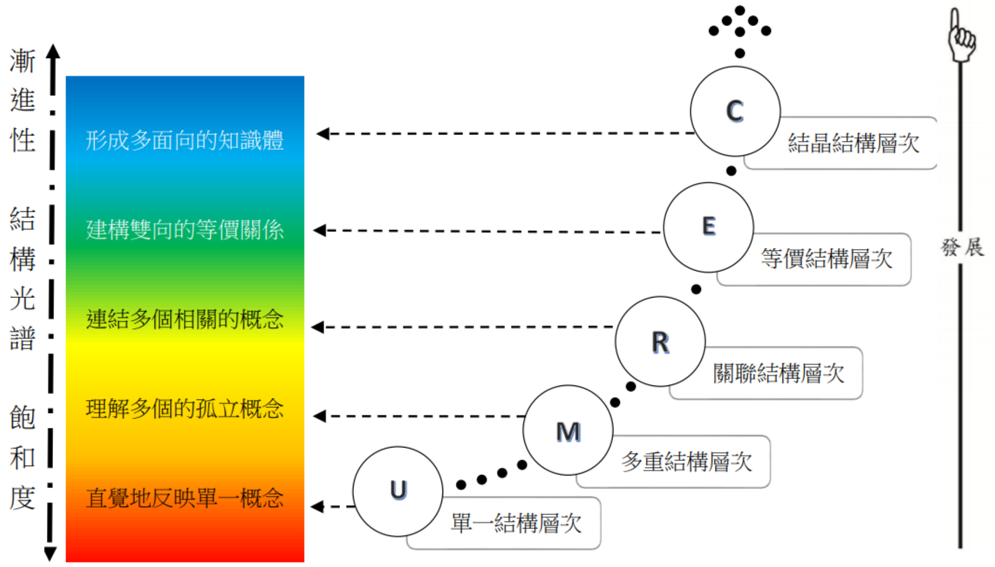


圖 14　SOTO 認知層次光譜圖

接著，研究者將上述 SOTO 分類法的五種認知層次，由低而高依序編碼為 1~5，再透過本研究的 MTK 編碼系統，針對個案教師 ST4 在第 2 單元一次與二次函數的整體教學影片，切割成 25 個教學影集，以及 67 個教學事件，再進行數學教學知識的編碼與分析統計，最後得到個案教師 ST4 有關第 2 單元之數學教學知識在 SOTO 分類法的認知層次統計表，如表 4。同時，研究者再利用「數學教學知識之認知層次分析對照圖」之建構三個步驟，繪製個案教師 ST4 在此單元關於 SOTO 分類法的認知層次分析對照圖，如圖 15，此圖不僅可描述其數學教學知識的 SOTO 已達到結晶結構層次，亦可用以分析教師 ST4 在教學情境中，所呈現各認知層次的數學知識與教學知識之內涵特徵。

表 4

教師ST4在單元2的數學教學知識之SOTO認知層次統計表

影集編號	E1	E2	E3	E4	E5
SOTO 編碼	5	5	5	5	5
影集編號	E6	E7	E8	E9	E10
SOTO 編碼	4	4	5	4	5
影集編號	E11	E12	E13	E14	E15
SOTO 編碼	4	5	4	5	5
影集編號	E16	E17	E18	E19	E20
SOTO 編碼	5	5	5	5	5
影集編號	E21	E22	E23	E24	E25
SOTO 編碼	5	5	4	4	5
單元 2 整體 SOTO 編碼平均值			4.72		

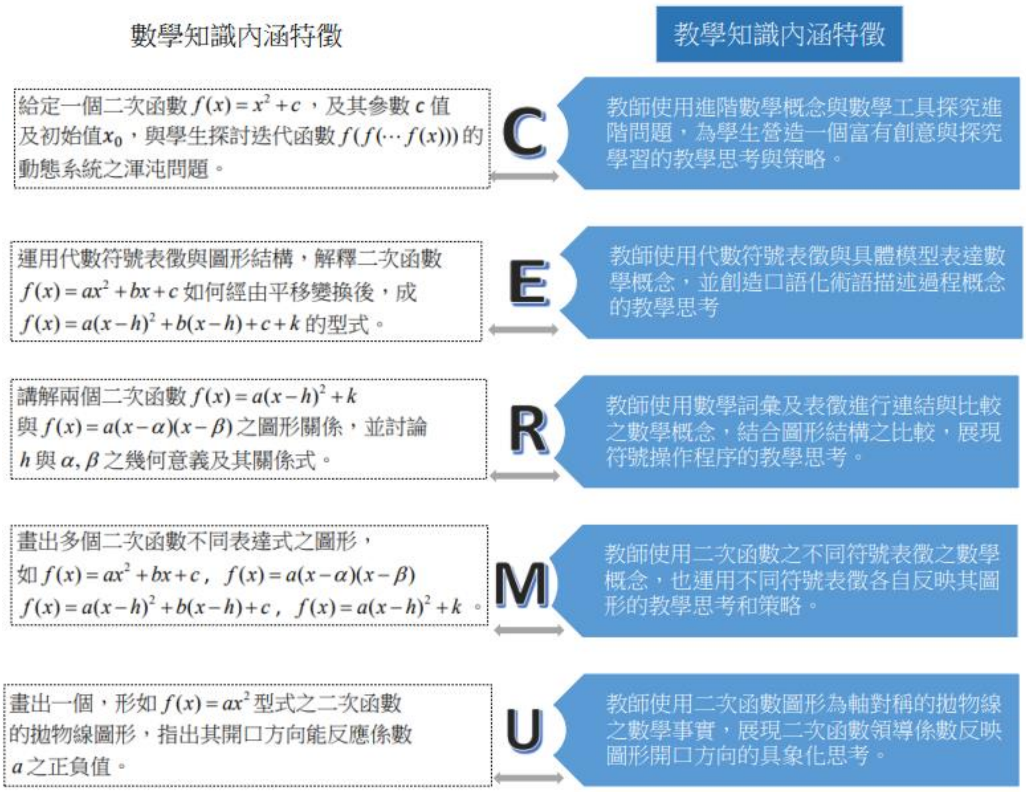


圖 15　教師 ST4 在單元 2 的數學教學知識之 SOTO 認知層次分析對照圖

綜合上述研究結果，本研究針對 SOTO 分類法之五種結構層次的內涵特徵進行清楚明確的定義，同時與 SOLO 分類法之五種結構層次內涵進行對照分析與比較，如表 5。根據研究結果

所整理的表 5 中兩種分類法之五種結構層次內涵特徵的意義描述，可見 SOTO 分類法之結構層次相對高於 SOLO 分類法一個層級，此現象與師者乃傳道、授業、解惑之角色的觀點雷同，顯示數學教師的數學教學知識之認知層次通常比學生的認知層次高，方能提供學生一個有感的學習機會。根據表 5 中「等價」結構層次之定義與闡述，可知其與「關聯」結構層次的共同特徵是能夠處理至少兩種以上不同表徵的數學教學知識內涵，而它們的差異主要在於達到「等價」結構層次的數學教師能夠針對學科內容與學科教學等兩種知識類別，建立一個關聯性的知識網絡，同時能夠有系統地整合其知識網絡的雙向等價結構關係。此外，根據評價結果亦發現，四位個案教師的某些教學行為除了能夠將等價層次的知識結構擴展至一種新的推理方式，並能概括出一些抽象特徵之外，又能夠運用心智連結與壓縮，發展成一個多面向結構的知識理論體系，顯示四位高中數學教師之某些數學教學知識，不僅已達到擴展抽象層級，同時也反映其數學教學知識具有能統籌更高階思維之數學視野的「結晶」結構層次。此「結晶」詞彙，乃引用 Tall（2013）之 TWM 理論中的結晶概念內涵，用以反映教師教學知識的數學思考能達到統籌更高階思維的結晶知識體系。

表 5

SOTO與SOLO分類法的五種結構層次內涵特徵之分析對照表

SOTO 分類法	內涵特徵	SOLO 分類法	內涵特徵
單一結構（U）	教師知道單一數學概念，反映一個教學知識內涵。	前結構（P）	學生缺乏解決問題的簡單知識，或回答問題時邏輯混亂或語意反覆。
多重結構（M）	教師知道多個孤立數學概念，反應其相應的教學知識內涵，但未形成聯繫的教學知識網絡。	單一結構（U）	學生有快速回答問題的慾望，只關注單一主題或問題的線索，一找到線索就立即跳到結論。
關聯結構（R）	教師知道多個數學概念，連結相應的教學知識內涵，並聯繫成一個教學知識網絡。	多重結構（M）	學生會使用兩個或多個線索，卻不能覺察到這些線索之間的聯繫，也不能對線索進行整合。
等價結構（E）	教師能針對至少兩種以上不同表徵的教學知識內涵，形成關聯性的教學知識網絡後，亦能揭示其系統性結構的雙向等價關係。	關聯結構（R）	學生能夠使用所有可獲得的線索，將問題的一些相關資訊整合成有結構性的體系。
結晶結構（C）	教師能將一些具有等價結構的教學知識網絡，運用心智連結與壓縮，發展成一個具有結晶結構的知識理論體系。	擴展抽象結構（EA）	學生能夠將關聯層次的結構擴展至一種新的推理方式，並能概括出一些抽象特徵。

（二）四位個案教師之數學教學知識所達到的 SOTO 層次

研究者透過本研究所整合的 MTK 編碼系統，針對四位個案教師在多項式主題內容的四個教學單元之整體教學影片，依據教學影片時間進行教學影集與事件的切割，再利用 SOTO 分類法的五種認知層次之編碼為 1~5 進行評價編碼，並依照教學時間比例統計各單元與整體的 SOTO 認知層次之加權平均數，最後得到四位個案教師在多項式四個主題單元的數學教學知識在 SOTO 分類法的認知層次統計表，如表 6。

根據表 6 之數據分析結果，發現以下幾個現象：

1.針對教師 ST1 在多項式主題內容之第 1 至 4 個單元之數學教學知識，其 SOTO 認知層次分別已達到等價、等價、等價和等價結構層次。

2.針對教師 ST2 在多項式主題內容之第 1 至 4 個單元之數學教學知識，其 SOTO 認知層次分別已達到結晶、結晶、等價和結晶結構層次。

3.針對教師 ST3 在多項式主題內容之第 1 至 4 個單元之數學教學知識，其 SOTO 認知層次分別已達到等價、等價、等價和等價結構層次。

4.針對教師 ST4 在多項式主題內容之第 1 至 4 個單元之數學教學知識，其 SOTO 認知層次分別已達到結晶、結晶、等價和結晶結構層次。

5.整體而言，四位個案教師在多項式四個主題單元之整體數學教學知識的 SOTO 認知層次，其中教師 ST1 與 ST3 達到等價結構層次，而另二位教師 ST2 與 ST4 則達到結晶結構層次。

表 6

四位個案教師在多項式四個單元之數學教學知識SOTO認知層次統計表

個案教師	教師 ST1		教師 ST2		教師 ST3		教師 ST4	
SOTO 層次\時間比例	SOTO 層次	教學時間佔比%	SOTO 層次	教學時間佔比%	SOTO 層次	教學時間佔比%	SOTO 層次	教學時間佔比%
單元 1	4.23	35.7	4.63	43.5	4.27	36.4	4.70	34.2
單元 2	4.20	38.9	4.67	31.7	4.27	37.6	4.72	45.3
單元 3	3.90	13.3	4.43	16.2	3.93	13.2	4.40	8.4
單元 4	4.00	12.1	4.57	8.6	4.00	12.7	4.53	12.1
加權平均	4.15	100	4.61	100	4.19	100	4.67	100

總而言之，研究者透過本研究的 MTK 編碼系統表，和 SOTO 認知層次分析對照圖持續進行比較與分析，存在具體證據顯示四位個案教師所展現的數學教學知識，確實出現了 SOTO 分類法之 U、M、R、E 和 C 等五種不同認知層次與知識類別。同時根據表 6 的統計結果，顯示個

案教師 ST1~ST4 在整個多項式主題之教學情境所展現的數學教學知識，分別達到 SOTO 分類法之等價、結晶、等價和結晶結構之認知層次。由此可見，以 MTK 編碼系統作為評價工具，並繪製 SOTO 認知層次分析對照圖，能夠質性描述高中數學教師之數學教學知識的認知層次，及其所展現的數學知識和教學知識類別。

（三）四位個案教師之數學教學知識的 SOTO 認知層次發展的主要特徵

本研究根據四位個案教師之數學教學知識所展現的 SOTO 五種不同認知層次，再結合其 SOTO 分析對照圖進行比對與分析，發現四位個案教師的數學教學知識在 MTK 編碼系統之三個知識面向中，不論是在同一個知識面向，或者是不同知識面向之間，都存在一些具有循環性的教學行為轉變之迴圈或路徑，我們稱之為教學通路（teaching path）。為了深入理解四位個案教師的教學通路，探討其數學教學知識的 SOTO 認知層次發展之主要特徵，本研究選取四位個案教師的四個教學影集為例，將這四個約 15 分鐘左右的教學影集切割成三個教學事件，再根據 MTK 編碼系統，分析每個教學事件所涉及的數學教學知識面向，以及其所反應的結構層次，轉譯資料如下。

1.教師 ST1 的教學通路之可能樣態

（1）針對教師 ST1 單元 1 的教學影集 E2 進行分析與評價

第一個事件如下，教師 ST1 敘述並證明餘式定理：$f(x)$ 除以 $ax-b$ $(a \neq 0)$ 之餘式為 $f(\frac{b}{a})$。首先教師說明這個定理是針對除式是一次式，而所得的餘式必為常數（M_{13}-*CCPM* 主類目-U 結構），另外代 $\frac{b}{a}$ 是怎麼來的呢？就是令除式 $ax-b$ 等於 0，得到 $x=\frac{b}{a}$（M_3, M_5-*RRM* 主類目-M 結構）。證明的關鍵在於除法原理。

pf：由除法關係式知，$f(x)=(ax-b)(商式)+r$，常數 r 是餘式（M_3, M_5, M_7-*RRM* 主類目-R 結構）。師問：從這個式子，商式會不會影響 $f(x)$ 的值（M_1-*RS* 主類目-U 結構）；生答：絕對會。師應：但我們並不知道商式長什麼樣，所以只要令除式 $ax-b$ 等於 0，這樣就可以看出商式並不重要（M_2-*RS* 主類目-M 結構）。故只要將 $x=\frac{b}{a}$ 代入上述，可推得 $f(\frac{b}{a})=(a\cdot\frac{b}{a}-b)(商式)+r=0+r=r$，即 $f(\frac{b}{a})$，得證（M_5, M_7-*RRM* 主類目-R 結構）。

第二個事件如下，舉例說明，已知 $f(x)=64x^6-4x+5$，求 $f(x)$ 除以 $x+1$ 的餘式，及 $f(x)$ 除以 $2x-1$ 的餘式。

Sol：求 $f(x)$ 除以 $x+1$ 的餘式，根據餘式定理，就是令除式為 0（M_7-*RRM* 主類目-U 結構），可得餘式為 $f(-1)=64(-1)^6-4(-1)+5=73$，求 $f(x)$ 除以 $2x-1$ 的餘式，根據餘式定理，就是令除式為 0，可得餘式為 $f(\frac{1}{2})=64(\frac{1}{2})^6-4(\frac{1}{2})+5=4$（$M_5$, M_7-*RRM* 主類目-M 結構）。除了

利用餘式定理，當然也可以利用除法原理中的長除法和綜合除法，只是計算時間比較久而言（M_1, M_5, M_7-*RRM* 主類目-R 結構）。

第三個事件如下，教師 ST1 補充一題較困難的，已知 $f(x)=123x^4-389x^3+68x^2-32x-19$，求 $f(3)$。

Sol：這個題目的解法有三種（M_{14}-*CCPM* 主類目-U 結構），同學可以比較一下這三種的解決差異及特色（M_4,M_5-*RRM* 主類目-M 結構）。

法 1.直接 x 用 3 代入 $f(x)$，所求為 $f(3)=123\cdot 3^4-389\cdot 3^3+68\cdot 3^2-32\cdot 3-19=-43$

法 2.f 括號幾，代表是餘式，這是餘式定理的應用，所以 $f(3)$ 是 $f(x)$ 除以 $x-3$ 的餘式。再利用長除法或綜合除法，求餘式。

故所求的餘式為 -43（M_3, M_4, M_5-*RRM* 主類目-R 結構）。

法 3.　$f(3)=123\cdot 3^4-389\cdot 3^3+68\cdot 3^2-32\cdot 3-19$

將上式中兩項兩項併在一起，可得 $3^3(369-389)+68\cdot 3^2-32\cdot 3-19$

$=3^3(-20)+68\cdot 3^2-32\cdot 3-19=3^2(-60+68)-32\cdot 3-19$

$=3^2\cdot 8-32\cdot 3-19=72-96-19=-43$（$M_3$, M_5, M_6-*RRM* 主類目-E 結構）

接下來師生互動時間，師問：那個方法比較複雜，生答：法 1；

師問：法 2 與法 3 的特色是什麼?；生答：法 2 是綜合除法，法 3 是提出公因數；師說：雖然法 3 也很快，但容易算錯，建議使用法 2 來解比較穩定（M_1, M_2-*RS* 主類目-E 結構）。

（2）教學通路之 SOTO 認知層次發展漸進圖

根據 MTK 編碼系統與 SOTO 分類法之認知層次進行分析與評價，研究者繪製教師 ST1 在單元 1 教學通路之 SOTO 認知層次發展漸進圖，如圖 16。此圖出現不同知識面向的 U-M-R 路徑與同一個知識面向的 U-M-R 迴圈，其具體證據為教師 ST1 透過餘式定理的證明過程中使用一般語言、數學符號及具體模型來描述一些數學概念的關聯結構，展現二個 U-M-R 路徑，再透過補充例題的三種不同解法中同在 RRM 知識面向，如數學詞彙及符號的使用，甚至數學概念之程序知識的等價結構，展現第三個 U-M-R 迴圈，最後在第四個 U-M-R 路徑統整成一個求餘式問題的等價結構之知識體系，故出現四次 U-M-R 路徑與迴圈後漸進至等價結構層次。

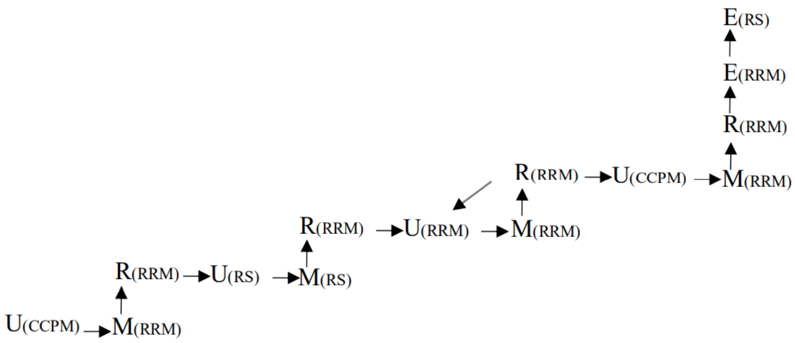


圖 16　教師 ST1 在單元 1 教學通路之 SOTO 認知層次發展漸進圖

2.教師 ST2 的教學通路之樣態

（1）針對教師 ST2 單元 1 的教學影集 E10 進行分析與評價

第一個事件如下，教師 ST2 講解補充題，已知 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，若 $f(1)=7, f(3)=1, f(4)=10$，求 $f(x)$。

Sol：法 1.直接代進去就好（M$_{13}$-CCPM 主類目-U 結構），得 $a+b+c=7$，$9a+3b+c=1$，$16a+4b+c=10$，利用消去法，得 $8a+2b=-6$，$7a+b=9$，求得 $a=4, b=-19$（M$_3$, M$_5$-RRM 主類目-M 結構），代回得 $c=22$。故 $f(x)=4x^2-19x+22$（M$_3$, M$_5$-RRM 主類目-R 結構）。

未來在高二 3A 你還會學到一種消去法，叫高斯消去法（M$_{14}$-CCPM 主類目-U 結構），它比較有系統架構，那還有一種方法，叫克拉瑪公式，它雖然是高階的方法，不過到時候你還是會覺得消去法比較好用（M$_{12}$, M$_{13}$-*CCPM* 主類目-M 結構）。

第二個事件如下，教師 ST3 講解法 2.牛頓插值法，教師先對題意解讀，$f(1)=7$ 代表 $f(x)$ 除以 $(x-1)$ 的餘式；$f(3)=1$ 代表 $f(x)$ 除以 $(x-3)$ 的餘式；$f(4)=10$ 代表 $f(x)$ 除以 $(x-4)$ 的餘式。

令 $f(x)=a(x-1)(x-3)+b(x-1)+c$，代值得 $7=f(1)=c$，得 $c=7$；

$1=f(3)=2b+c$，得 $b=-3$；$10=f(4)=3a+3b+c$，得 $a=4$。

故可求得 $f(x)=4(x-1)(x-3)-3(x-1)+7$（M$_3$, M$_4$, M$_5$-RRM 主類目-R 結構），

化簡即得 $f(x)=4x^2-19x+22$。

其實牛頓不是這樣算，因為這樣做法很花時間，可見牛頓插值法通常不是用來求 $f(x)$，而是求多項式的值（M$_8$, M$_{11}$-RRM 主類目-E 結構）。

第三個事件如下，教師 ST2 講解法 3.我們來看牛頓的真實算法，牛頓是三大數學家之一，還有阿基米德、另外一位是高斯，是 1777~1855 的十八世紀至十九世紀的人…，我個人覺得尤拉比這些人還偉大，但可能有人認為尤拉的貢獻沒有他們多（M$_{11}$-RRM 主類目-U 結構）。…，那我們來介紹牛頓怎麼解這個問題?已知 $f(1)=7, f(3)=1, f(4)=10$，作一個圖表，在圖表中算

斜率，求得一次斜率 $\frac{1-7}{3-1}=-3$ ，$\frac{10-1}{4-3}=9$（M_3, M_7-RRM 主類目-M 結構），…，再求二次斜率（不是真正的斜率）$\frac{9-(-3)}{4-1}=4$（M_3, M_5, M_{10}-RRM 主類目-R 結構），這裡要注意分母要用最右邊減掉最左邊，最後得到 $4,-3,7$（圈起來），…，你看結果跟 $f(x)=4(x-1)(x-3)-3(x-1)+7$ 中的係數 $4,-3,7$ 是一致（M_3, M_5, M_{10}-RRM 主類目-E 結構）。師問：同學試著去了解這個算法背後的想法與原理，如果能夠將這些東西理解後，寫出自己個人的感想與心得形成自己的學習歷程檔案，尤其你們未來要讀理工科的同學，這方面的能力培養跟累積是很需要的。同時，教師推薦並鼓勵學生上網搜尋一篇文章【牛頓插值多項式：拉格朗日怎麼說？】來閱讀，甚至寫一些心得放到學習歷程檔案（M_1, M_2-RS 主類目-C 結構）。

（2）教學通路之 SOTO 認知層次發展漸進圖

根據 MTK 編碼系統與 SOTO 分類法之認知層次進行分析與評價，研究者繪製教師 ST2 在單元 1 教學通路之 SOTO 認知層次發展漸進圖，如圖 17。此圖出現不同知識面向的 U-M-R 路徑，其具體證據為教師 ST2 透過不同數學教學知識面向，補充例題的三種不同解法，幫助學生提昇解題技巧能力，展現三個 U-M-R 路徑，運用不同知識面向達到等價結構，最後統整成一個多項式值與其表達式之間的轉換關係具有多面向的知識體系，進而臻至結晶結構層次。

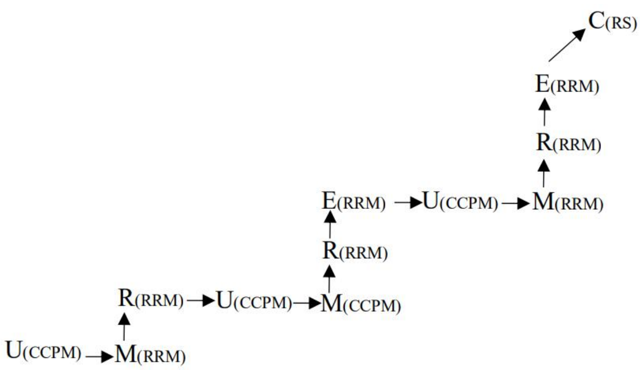


圖 17　教師 ST2 在單元 1 教學通路之 SOTO 認知層次發展漸進圖

3.教師 ST3 的教學通路之樣態

（1）針對教師 ST3 單元 4 的教學影集 E5 進行分析與評價

第一個事件如下，教師 ST3 講解例題“已知 $x\in R$ ，則 $f(x)=\frac{x^4+2x^3+x^2+1}{x^2+x+1}$ 之最小值為何？”之解法。一開始教師對題意先進行解讀，說明分子的多項式次數大於分母的次數且領導係數是正的（M_3-RRM 主類目-U 結構），所以當 x 值跑到無窮大時，這個函數就沒有最大值（M_{12}, M_{13}-CCPM 主類目-M 結構）。又這裡有高次的多項式，可以利用微分求極值，這會牽連一些微分公式，不見得比較快解出來，所以教你們一些基礎又有技巧的解法（M_1, M_2-RS 主類目

-R 結構）。解法：因為 $f(x)=\dfrac{x^4+2x^3+x^2+1}{x^2+x+1}$，分子被分母除，可利用綜合除法（M3-RRM 主類目-U 結構），接著教師在黑板上操作綜合除法，得到商式為 x^2+x-1，餘式為 2（M3, M5-RRM 主類目-M 結構），可將原式變形為 $f(x)=x^2+x-1+\dfrac{2}{x^2+x+1}$（M3, M5-RRM 主類目-R 結構）。

第二個事件如下，接著師生互動對話，教師問：為什麼要變成這個型式，你們觀察到了什麼?學生沒有回應（M2-RS 主類目-U 結構）。教師再問：分母 x^2+x+1 的值，重點在分母的二次式，首項為正，判別式小於 0，所以這個式子一定恆大於 0，所以發現這個重要的訊息，分母恆正，左邊的式子也弄成恆正，就可以利用算幾不等式，因為相乘就會損掉成為定值（M12, M13-CCPM 主類目-M 結構）。此時有位學生發現並提出疑問，x^2+x+1 與左邊的 x^2+x-1 式子相乘並沒有定值，教師回應：沒有關係，我再變形一下就可以了（M12, M13-CCPM 主類目-R 結構）。

第三個事件如下，教師再繼續講解，將原式再變形為 $f(x)=x^2+x+1+\dfrac{2}{x^2+x+1}-2$（M15-RRM 主類目-U 結構），這是為了牽就分母而變形的，又分母 $x^2+x+1>0$ 恆成立（M12, M13-CCPM 主類目-M 結構）。所以，前兩個式子由算幾不等式知，可推得 $f(x)=x^2+x+1+\dfrac{2}{x^2+x+1}-2$ $\geq 2\sqrt{(x^2+x+1)\times(\dfrac{2}{x^2+x+1})}-2=2\sqrt{2}-2$（M5, M7-RRM 主類目-R 結構），故 $f(x)$ 的最小值為 $2\sqrt{2}-2$，注意等號成立的條件為 $x^2+x+1=\dfrac{2}{x^2+x+1}$，就可以得到產生最小值的 x 值（M3, M5, M7-RRM 主類目-E 結構）。」

（2）教學通路之 SOTO 認知層次發展漸進圖

根據 MTK 編碼系統與 SOTO 分類法之認知層次進行分析與評價，研究者繪製教師 ST3 在單元 4 教學通路之 SOTO 認知層次發展漸進圖，如圖 18。此圖出現不同知識面向的 U-M-R 路徑，其具體證據為教師 ST3 利用多項式除法原理，將一個分式型數學式轉代成除法關係式的型態，再變換成算幾不等式的模型，進而求得原式的最小值，展現三個 U-M-R 路徑，達到運用數學符號表徵知識的等價結構，最後在第四個 U-M-R 路徑經由算幾不等式之一系列的過程概念（Tall, 2013），統整成一個符號表徵之間的變換關係之等價結構層次。

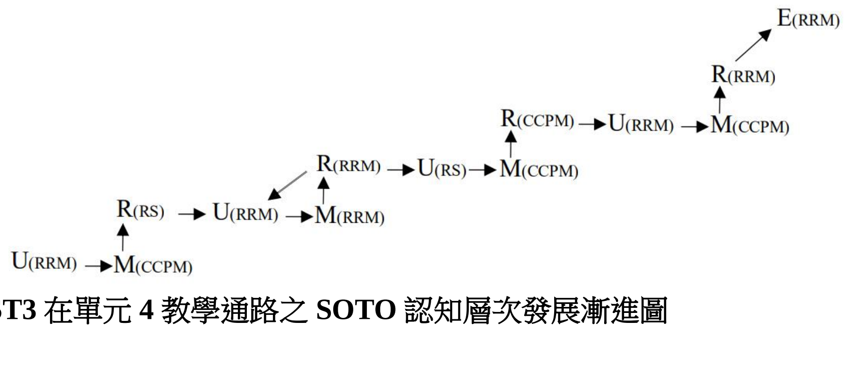


圖 18 教師 ST3 在單元 4 教學通路之 SOTO 認知層次發展漸進圖

4.教師 ST4 的教學通路之樣態

（1）針對教師 ST4 單元 1 的教學影集 E3 進行分析與評價

第一個事件如下，多項式的除法運算在國中是長除法（M_{13}-CCPM 主類目-U 結構），到高中是用綜合除法，而它的運算基礎是除法原理，分別在整數系及多項式都有其數學敘述（M_{12}, M_{14}-CCPM 主類目-M 結構）。

(1) $\mathbb{Z}$ ： $a,b \in Z, b \neq 0$ ，存在 $q,r \in Z$ ，使得 $a = bq + r$ ， $0 \leq r < |b|$ 。

(2) $R[x]$ ： $f(x), g(x) \in R[x], g(x) \neq 0$ ，存在 $q(x), r(x) \in R[x]$ ，使得 $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ ，其中 $r(x) = 0$ 或 $\deg r(x) < \deg g(x)$ （M_3, M_5, M_6-RRM 主類目-R 結構）。

舉例說明，ex.求 25 除以 9 的商數及餘數。

教師利用長除法，求得商數為 2，餘數為 7。（M_{13}-RRM 主類目-U 結構）

ex.求 $\frac{25}{9}$ 的十進位表達式。教師利用長除法，求得 $2.777... = 2.\bar{7}$ （M_{12}, M_{13}-RRM 主類目-M 結構）。

第二個事件如下，師問：同樣都是利用長除法求出這兩題的解答，請問它們的差異在那裡（M_1, M_2-RS 主類目-R 結構）？生答：一個求商和餘數，另一個是循環小數。師問：還有嗎?生無回應。此時教師點出除法原理的兩個重要特色與機制，一是 ending 機制（M_1-RS 主類目-U 結構），如第一題算到餘數 7 時，運算就結束，而第二題則一直算下去（M_3, M_5-RRM 主類目-M 結構）；另一是等量關係，如 $25 = 9 \times 2 + 7$ 。

再舉例說明，ex.求 $3x^3 + x^2 - 6x + 8 \div x^2 + x - 2$ 的商式及餘式。

教師利用長除法，求得商式為 $3x - 2$ ，餘式為 $2x + 4$ ，

並得 $3x^3 + x^2 - 6x + 8 = (x^2 + x - 2)(3x - 2) + 2x + 4$ 。

教師講解不遵守除法原理的機制，可得到一個表達式

$\frac{3x^3 + x^2 - 6x + 8}{x^2 - 6x + 8} = 3x - 2 + 2x^{-1} + 2x^{-2} + 2x^{-3} + ...$ （M_3, M_5, M_7-RRM 主類目-R 結構），

雖然它不遵守 ending 機制，但它仍有等量機制。而這個等量的表達式未來在微積分領域，就稱為一種無窮級數，名稱是馬克勞林級數（M_{14}-CCPM 主類目-U 結構）。

第三個事件如下，生問：原來的餘數（式）呢?師答：餘數在 $\frac{25}{9}$ 的十進位表達式之小數點後的數值（M_{12}, M_{13}-CCPM 主類目-M 結構）；同樣的，餘式在 $\frac{3x^3 + x^2 - 6x + 8}{x^2 - 6x + 8}$ 表達式的後面無窮級數（M_3, M_5, M_{10}-RRM 主類目-R 結構）。上式中的 x 用 10 代，就是十進位的表達式。教師帶學生一起思考，在做除法運算時，所用到的除法原理它的內涵其實是很有特色及意義的（M_{12}, M_{13}-CCPM 主類目-R 結構），它的兩個機制也很重要，它有不遵守 ending 機制的發展領域，它也有遵守 ending 機制的發展領域，這些都可以從現在的內容延伸到未來要學習或會應用到的概

念（M_{12}, M_{13}, M_{15}-CCPM 主類目-C 結構）。

（2）教學通路之 SOTO 認知層次發展漸進圖

根據 MTK 編碼系統與 SOTO 分類法之認知層次進行分析與評價，研究者繪製教師 ST4 在單元 1 教學通路之 SOTO 認知層次發展漸進圖，如圖 19。此圖出現不同知識面向的 U-M-R 路徑，其具體證據為教師 ST4 補充進階數學概念的無窮級數表達式引入當前數學內容，協助教師使用多重模型或觀點融入教學策略，幫助學生進行數學高階思考，展現三個 U-M-R 路徑，運用不同知識面向達到等價結構，最後在第四個 U-M-R 路徑將除法原理、長除法、商式與餘式、十進位表示法以及無窮級數統整成一個具有多面向的知識體系，進而臻至結晶結構層次。

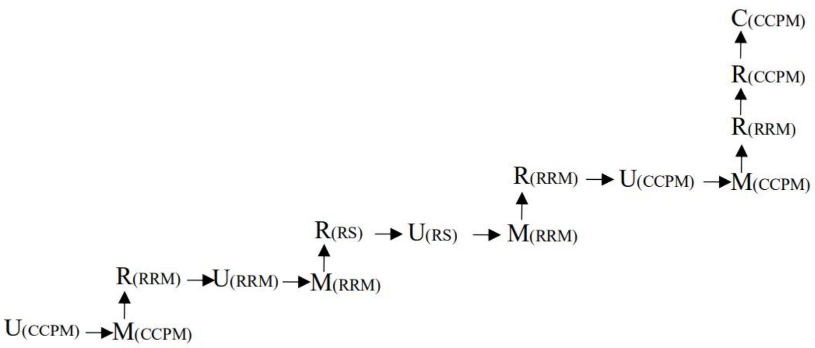


圖 19　教師 ST4 在單元 1 教學通路之 SOTO 認知層次發展漸進圖

綜合上述，根據四位個案的 SOTO 認知層次發展漸進圖，如圖 16~19，發現他們的教學通路裡都有個數不一的 U-M-R 迴圈或路徑。由此可見，教學通路的 U-M-R 路徑或迴圈，不僅是數學教師的數學教學知識之認知層次發展的主要特徵，亦能用以描述數學教師在教學情境中的數學知識認知層次轉化的漸進途徑，及其轉化所獲得的知識類別。此外，低階認知層次的數學教學知識通常用來促進高階層次的漸進提昇與發展，這個現象與 Piaget（1972）所提的同化與適應之觀點相仿，認為當個體以既有知識結構面對問題時，將新遇見的事物納入既有的知識結構內（Harlow, Cummings, & Aberasturi, 2006），作為下一階段之認知行動的基礎。而漸進現象也與李坤崇（2004）的看法類似，認為認知歷程具有漸增複雜性階層之特性。因此，四位個案教師的數學教學知識之認知層次發展的主要特徵是存在個數不一的 U-M-R 路徑或迴圈，同時具有飽和度與複雜漸進性之特性。

進一步分析發現，在 U-M-R 迴圈或路徑中的 U 結構層次可能是上一個迴圈的 R 結構，或者 R 結構層次可能是下一個迴圈的 U 結構。例如，在教師 ST2 單元 1 的教學影集 E10 之 SOTO 認知層次發展漸進圖中，教師 ST2 補充當前數學知識之進階概念高斯消去法，以及牛頓插值法，講解第二種解法，說明其教學通路承襲上一個迴圈的 R 結構，形成一個重要的教學知識解認知結構，故而展現出「M_{14}-CCPM 主類目-U 結構」之層次；接著，利用牛頓插值法，經過多重觀

點的教學知識，展現其數學知識的認知層次達到「M_3, M_4, M_5-RRM 主類目-R 結構」之狀態，再補充數學家牛頓的另一種解法，運用多元思考模型，和引入超出當前數學內容的數學定義，說明所求得的三個數值，跟牛頓插值多項式之表達式 $f(x)=4(x-1)(x-3)-3(x-1)+7$ 中的係數 $4,-3,7$ 之間的等價關係，顯示其數學教學知識已漸進至「M_3, M_5, M_{10}-RRM 主類目-E 結構」層次，並透過數學條件與結果的判斷，決定利用推理證明方式論述多項式表達式之多面向表現的數學知識體系，進而臻至「M_1, M_2-RS 主類目-C 結構」層次，最後繪製出圖 17 中含有三個 U-M-R 迴圈之 SOTO 認知層次漸進途徑。因此，本研究認為個案教師 ST2 在圖 17 之 SOTO 層次漸進路徑最後能夠達到結晶結構層次，可能的關鍵因素在於他運用自我覺察與監控能力的後設認知知識，幫助教師監控、調整和決擇使用有效的教學策略與知識，將自己所理解的數學知識轉換為學生可理解的型式。此分析結果可從 Veenman（2011）的觀點獲得支持，認為高層次的後設認知會監控並調整低層次的認知歷程，例如進行推論是認知行為，但決定啟動推論則是後設認知。

另外，根據圖 16 至圖 19 的四位個案教師在四個教學影集之教學通路的 SOTO 認知層次漸進路徑圖，發現這四位個案教師之數學教學知識的認知發展路徑，呈現出漸進上升趨勢的型態。此結果顯示四位個案教師之數學教學知識品質與其在 SOTO 分類法的認知層次之高低之間存在正向的關聯性，說明了四位個案教師之教學認知發展漸進圖之 SOTO 結構層次愈高，其所展現的數學教學知識品質也愈高階。也就是說，四位個案教師皆能運用歸納與整合之教學知識，將關聯性的數學問題延拓其本身的意義，或運用邏輯演繹的數學知識，推理數學概念的等價關係，則顯示其數學教學知識已漸進到等價認知層次；而個案教師 ST2 與 ST4 常運用多個等價的數學概念，展現出有系統脈絡化的教學知識，或透過數學知識的形式化證明與探究式教學，將當前學校與未來數學內容組成一個具有內部結構的多面向知識體，故而顯示其數學教學知識已達到飽和度而漸進到結晶認知層次。這些現象與 Tall（2013）所提的心智連結之觀點雷同，認為數學知識一旦形成可思考概念，可透過教學覺察與反思幫助教師進行統整與連結，建立具有對偶結構性質的數學知識，進而發展更寬廣視野的數學思考與教學思考。因此，透過 SOTO 認知層次發展漸進圖進行分析與評價，可闡明不同數學教學知識的認知層次會反應不同面向與特徵的數學知識與教學知識。

總言之，透過 SOTO 認知層次漸進圖分析四位個案教師之數學教學知識，發現他們的教學知識之認知層次在教學過程中會出現動態整合的現象。此個現象和 Biggs 與 Collis（1991）的觀點相似，認為不論是在同一個知識類型，或者是不同知識類型之間，都存在一些具有循環性的 U-M-R 學習轉化迴圈或路徑。也就是說，四位個案教師之教學行為所呈現的教學知識類別與思維方式，在 SOTO 分類法之五種不同層次中，會出現同一知識類型或不同類型之間會出現推移

整合現象。同時，亦與陳彥廷（2015）以及 Park 與 Chen（2012）的觀點相仿，認為在教學過程中有一些知識面向之間會出現整合現象，易言之，教師的 PCK 在教學過程中是處於一個動態流動的狀態，且其各成分間是彼此交互作用與影響。由此可見，透過 SOTO 認知層次的漸進路徑之分析與評價，可幫助四位高中數學教師在教學情境中自我覺察與監控其教學思考與策略，再經由數學運思認知模式，在不斷循環的教學認知轉化的 U-M-R 迴圈中更精緻化，將有助於教師在每個教學認知階段之策略思考的改變，以提升教師的教學知能與覺察力，專注每個教學事件並對所注意的知識賦予新的意義（Sherin, Jacobs, & Philipp, 2011），進而促進數學教師之數學教學知識的 SOTO 認知層次之漸進發展，故而顯示 SOTO 認知層次愈高，其所展現的數學教學知識也愈好。

二、四位個案教師數學教學知識的認知層次之差異性

從第一個研究結果瞭解，針對整個多項式之數學教學知識，四位個案教師中有兩位教師 ST1 與 ST3 的 SOTO 光譜圖達到等價結構，另兩位教師 ST2 與 ST4 則達到結晶結構層次；同時，研究者進一步根據圖 18~21 的四位個案教師之 SOTO 認知層次漸進圖進行分析與比較，發現他們的教學通路所含的 U-M-R 路徑與迴圈之個數不盡相同，故四位個案教師之數學教學知識的認知層次確實存在一些差異性。以下針對四位個案教師之數學教學知識的認知層次之差異情形，和產生差異之可能因素，加以分析與論述。

（一）四位個案教師之數學教學知識的認知層次之差異情形

根據四位個案教師之 SOTO 認知層次漸進圖進行分析與比較，顯示教師 ST1 經由三個 U-M-R 路徑與一個 U-M-R 迴圈後，漸進至等價認知層次；教師 ST2 經由三個 U-M-R 路徑後，臻至結晶認知層次；教師 ST3 經由三個 U-M-R 路徑與一個 U-M-R 迴圈後，漸進至等價認知層次；教師 ST4 經由四個 U-M-R 路徑後，臻至結晶認知層次。由此可見，四位個案教師在教學通路的漸進過程，其 SOTO 認知層次之差異特徵之一是，四位個案教師在不同教學情境的教學通路所展現的 U-M-R 路徑與迴圈數各有不同；同時，四位個案教師只有教師 ST1 與 ST3 在教學通路的漸進過程，在相同知識面向中出現一個 U-M-R 迴圈，例如，圖 16 與圖 18 中均出現有關數學的嚴謹性與豐富性之主類目 RRM 的 U-M-R 迴圈。這個現象也和 Pegg 與 Tall（2010）對於學生學習之認知發展的觀點類似，認為在具體符號方式下至少存在兩個 U-M-R 迴圈或路徑，若在第二個迴圈或路徑後的反應仍沒有發生形式推理方式的質變，則可能存在第三個或更多迴圈或路徑；倘若後續的學習表現發生形式運思特徵上的質變，則其學習反應有機會產生遷移而漸進至擴展抽象層次。

另外，四位個案教師在教學通路的漸進過程，關於數學教學知識之三個知識面向所運用的次數頻率各有不同，展現迥然不同的教學行為風格。例如，關於「回應學生」知識面向，教師 ST1 使用頻率比其他三位教師較高；關於「數學的嚴謹性與豐富性」知識面向，教師 ST1 與 ST3 使用頻率顯著高於其他二位教師；關於「連結課室實務的數學」知識面向，教師 ST4 使用頻率顯著高於其他三位教師。研究者進一步分析，產生這個現象的原因有可能是教學單元內容的主題性、或是教師教學策略的選擇性，抑或是學生學習脈絡的需求性，因而影響四位個案教師在不同的課程主題、教學情境和教學經驗中的數學教學知識，進而展現他們與眾不同的教學風格，這現象與 Cohen 與 Amidon（2004）的觀點一致，認為教學風格與個人背景經驗有顯著的關聯。

綜合上述，顯示四位高中數學個案教師之數學教學知識在 SOTO 認知層次的發展脈絡中，確實存在一些差異性，例如，在教學通路中出現個數不一的 U-M-R 迴圈或路徑，以及關於 MTK 編碼系統中的數學教學知識之三個知識面向的運用狀況，因而展現出四位個案教師迥然不同、各具特色的教學知識。又根據第一個研究結果瞭解，這些教學風格迥異的四位高中數學個案教師所表現的數學教學知識，以 SOTO 分類法作為分析工具，不但可評價出其認知層次的不同，亦能質性描述出其數學教學知識的類別之差異。也就是說，這些差異性，除了會顯現在 MTK 編碼系統的內涵特徵中，也會展現在 SOTO 分類法的認知層次之質性描述裡。由此可見，以 SOTO 分類法作為評價工具，針對四位高中數學個案教師之數學教學知識進行質性分析發現，四位個案教師數學教學知識的 SOTO 認知層次與知識類別之差異性，的確會反應出不同風格的教學知識；同時亦發現四位個案教師之數學教學知識在 SOTO 分類法之認知層次愈高，其所展現的教學知識也愈好。此結果似乎亦呼應 Krauss 等人（2008）的教師專業發展觀點，認為教師個人專業程度，取決於其所擁有的學科內容知識與學科教學知識的連結程度。

（二）四位個案教師教學知識之認知層次出現差異之可能因素

根據前面結果，可以瞭解四位個案教師之數學教學知識在 SOTO 光譜中的認知層次及其知識類別確實存在一些差異性。以下針對四位個案教師的教學背景資料與特殊教學經驗等可能造成這個差異性的相關因素，加以分析與探討。

1.教學背景資料

根據表 1 的個案教師背景資料分析，在教學年資方面，四位個案教師 ST1~ST4 分別為 17、15、20、27，平均年資約為 20 年，再參照四位個案教師的 SOTO 分類法評價結果，發現兩位達到結晶結構的個案教師，其教學年資分別是四位個案教師中一位最資淺，一位最資深，顯示四位個案教師的教學年資差異與其在 SOTO 認知層次高低之間並沒有明顯的正向關聯性。不過，這四位個案教師的教學年資確實屬於資深層級，一般而言，他們的教學知識與思考策略應比資淺教師來得完整與精熟，或許此資深等級的教學年資，可能是致使此四位個案教師之數學教學

知識均達到較高等級的等價結構層次的因素之一。此現象也符應 Chinnappan 與 Lawson（2005）的研究結果，認為資深教師的知識比新手教師更有結構性與連通性，也具有較流暢性的教學知識與策略。

2.特殊教學經驗

根據表 1 的個案教師背景資料分析，在教育程度方面，四位個案教師 ST1~ST4 分別為碩士、學士、學士及碩士，再參照四位個案教師的 SOTO 分類法評價結果，發現兩位教育程度是學士學位的個案教師，其數學教學知識在 SOTO 認知層次分別達到等價與結晶結構層次，顯示四位個案教師的教育程度差異與其在 SOTO 認知層次高低之間並沒有明顯的正向關聯性。在開設課程方面，雖然四位個案教師都曾開設過多元選修課程，但無具體證據顯示開設課程的教學經驗，與其 SOTO 結構層次高低有關聯性，故無法證實開設課程經驗對結構層次高低的影響。

另外，在特殊教學經驗方面，達到等價結構層次的兩位個案教師 ST1 與 ST3 分別曾任教過數資班與語資班，而達到結晶結構層次的兩位個案教師 ST2 與 ST4 則都曾任教過科學班。再針對數資班與科學班的資優課程內容做深入瞭解與分析，發現數資班與科學班都有數學領域課程與個別研究專題課程，顯示其課程規劃大致相同，不過有一個差異性是在於科學班的數學領域課程是以加深、加廣及加速為主軸的課程設計導向，而數資班只有加深和加廣。據此，就教師經驗而言，科學班的加速之教學取向，不僅對高中數學教師之教學能力的要求較高，尤其針對學生學習的需求與課程設計的需要，常額外需要教師自我學習以提昇個人專業能力。因此，可合理解釋兩位具有科學班教學經驗的個案教師 ST2 與 ST4 的數學教學知識，比沒有此經驗的另兩位個案教師，在 SOTO 分類法的評價會達到較高等級的結晶結構層次。

總言之，雖然四位個案教師之整體多項式的數學教學知識，在 SOTO 分類法之結構層次的漸進發展途徑各有所不同，但至少都達到等價結構，顯示他們的教學行為展現出多個不同表徵的數學知識與教學知識內涵，並在認知發展過程中關聯成一個更大的教學知識、結構與原理原則，又能整合成一些具有雙向等價關係的系統性知識網絡。同時，透過表 5 中有關 SOTO 分類法之結晶結構之內涵特徵描述進行內容分析，發現兩位達到結晶結構之個案教師 ST2 與 ST4 的數學教學知識，都具有將數學概念透過心智連結與壓縮成多面向之特質的知識體系，亦具備能分析與論證不同知識結構間之等價關係的數學推理與教學思考。這個現象與 Tall（2013）所提的數學結晶概念之觀點一致，認為將知識結構進行心智壓縮成可思考概念後，即在可思考概念間進行連結、擴充、解構和重構，形成一個多面向的知識理論體系（陳冠州、劉致演、尤詩憶、秦爾聰，2015）。

伍、結論與建議

一、結論

本研究以 MTK 編碼系統作為高中數學教師之課室觀察系統，經過分析、編碼與評價，顯示四位個案教師在多項式四個主題單元之整體數學教學知識，會展現出 SOTO 分類法之單一（U）、多重（M）、關聯（R）、等價（E）以及結晶（C）等五種不同的認知層次與知識類別，進而發展成 SOTO 分類法之評價工具，用以質性描述四位高中數學教師之數學教學知識的認知層次及其發展樣貌。再經由編碼量化統計結果後，發現個案教師 ST1 與 ST3 的數學教學知識之認知層到達到等價結構層次，而另二位教師 ST2 與 ST4 則達到結晶結構層次。這樣的結果說明了這四位個案教師在整個多項式單元的教學過程中，皆能針對至少兩種以上不同表徵的教學知識內涵，形成關聯性的教學知識網絡後，亦能揭示其系統性結構的雙向等價關係；而另兩位教師 ST2 與 ST4 之教學行為亦已臻至能將一些具有等價結構的教學知識網絡，運用心智連結與壓縮，發展成一個具有結晶結構的知識理論體系。

再者，以四位個案教師的四個教學影集為例，根據本研究的 MTK 編碼系統，分析每個教學事件所涉及的數學教學知識面向，以及其所反應的 SOTO 認知層次，經過質性分析與編碼並繪製它們的 SOTO 認知層次之發展漸進圖，不僅發現四位個案教師之數學教學知識的 SOTO 認知層次之漸進路徑，皆至少存在兩個 U-M-R 迴圈或路徑，且第一個迴圈的關聯認知層次之數學教學知識，在第二迴圈中成為單一反應；會出現個數不一之迴圈或路徑之教學通路；學情境的教學通路所展現的 U-M-R 路徑與迴圈數各有不同；同時，亦發現第一個 U-M-R 迴圈的關聯層次之數學教學知識，在第二 U-M-R 迴圈中成為單一認知層次的教學基底，若在第二個迴圈或路徑後的教學知識仍沒有發生知識類別與思維方式的質變，則可能存在第三個或更多迴圈或路徑；倘若後續的教學行為產生了 SOTO 認知層次內涵特徵的質變，則其教學通路有機會產生遷移而漸進至更高階級的層次，形成不同樣貌的 SOTO 認知層次之發展途徑。因此，本研究認為 U-M-R 迴圈或路徑是高中數學教師在教學實作中發展其學科內容知識與學科教學知識的一個重要的認知發展途徑。此發展途徑的主要特徵和 Biggs 與 Collis（1991）之 SOLO 分類理論的觀點相似，亦認為 SOLO 分類法中的 U-M-R 迴圈或路徑是學生透過學習發展認知的理想途徑，而且在此途徑中至少存在兩個 U-M-R 迴圈，且第一個迴圈的關聯反應，在第二迴圈中成為單一反應；同時，亦認為若在第二個 U-M-R 迴圈後的學習反應思路發生心智特徵的質性變化，則其學習認知發展會產生遷移而漸進至擴展抽象結構。

臺灣高中階段的數學教學特色著重於課程主題的教學跟其他領域之學習和生活的連結與應用，其教學實作無論在數學知識與思維的深度、廣度與抽象度方面，都比前一階段的教學內容更具有挑戰性。因此，本研究透過所建立的 MTK 評價規準，來評價高中數學教師之教學知識品

質在 SOTO 的結構層次，以幫助教師進行教學反思並提供有用的教學回饋，進而提升其教學的數學品質。雖然本研究發現高中數學教師之數學教學知識在 SOTO 分類法的認知層次愈高，其所展現的教學知識品質也愈好，然而，教學年資的多寡，與教師的數學教學知識在 SOTO 認知層次的高低是否有顯著的正相關，這是本研究尚未確切證實的結果，故仍需再納入一些年資低於 15 年以下的高中數學個案教師，方能進一步實徵研究探討其關聯性。

整體而言，本研究探討過去相關文獻（Ball & Bass, 2009; Biggs & Collis, 1982; Tall, 2013）的理論架構及其相關研究結果，整合為 SOTO 分類法之理論架構及其內涵特徵的理論基礎，再以此分類法作為判斷高中數學教師數學教學知識之質性等級的分析工具，評價教師之知識特徵與思考方式在 SOTO 的結構層次，幫助教師自我覺察與進行教學反思，並提供教師一個具有質性層級描述的教學回饋，進而提升其教學知識品質，促進其教師專業成長的發展。

二、研究建議

本研究以高中數學資深教師為研究對象，以所建立的 MTK 編碼系統作為評價工具，對其數學教學知識進行質性等級描述，發現所評價的認知層次與其所展現的教學知識品質雖然有正向的關聯性，然而，本研究的主要分析資料來自四位個案教師之課室教學影片，且僅就一個多項式主題進行分析，故所得的研究結果仍其侷限性。因此，對於未來研究要運用 SOTO 分類法之五種不同認知層次與內涵特徵，探討有關數學教師之教學知識的成長，甚至應用於教師專業知能與發展等相關議題時，必須要理解本研究的研究設計、方法與資料收集之侷限性，對於研究結果可能產生的嚴謹度與類比性等問題。冀望未來再針對實習、初任、中階年資與資深的數學教師，甚至涵蓋小學數學至大學微積分等四種教學進程的數學教師，藉由 SOTO 分類理論及其特徵，探討這四類數學教師數學教學知識所展現的知識類別與認知層次，為這四類數學教師自我覺察，或是師資培育課程規劃，甚至教師專業發展方面，提供一個嶄新研究方向的參考。因此，本研究建議，若能建立「符合臺灣四種教學進程的數學教師數學教學知識的相關編碼系統」，則將有助於進一步探討這四類數學教師的教學知識，與其在 SOTO 分類法之認知層次之間的關聯性。

雖然 SOTO 分類法之質性評價工具的建構發想於數學領域，然而，數學乃科學之母，數學是一門演繹科學，也是一門實驗科學，能廣泛地跨越其他學科領域。因此，本研究亦冀望未來更進一步探討所建立的 MTK 編碼系統，用於其他領域學科教師之教學知識的評價，透過教師數學教學知識之 SOTO 認知層次的質性評價，深入理解各領域學科教師所展現的教學知識之認知層次，協助教師自我覺察與自我提昇個人教師專業成長的發展。

誌謝

感謝科技部的經費補助，讓本研究能順利進行並完成論文發表。（專題研究計畫編號 MOST110-2511-H-018-002）

參考文獻

李源順（2004）。數學專家教師的專業發展可複製性分析。**科學教育研究與發展季刊，2004 專刊**，95–118。【Li, Yuan-Shun (2004). The can be copied analysis of mathematics teacher professional development process. *Research and Development in Science Education Quarterly*, *2004 Special Issue*, 95–118. (in Chinese)】

卓益安、金鈐（2012)。高中數學教室教學實作知識之教室觀察系統的建立。**中等教育，63**（3），8–29。doi: 10.6249/SE.2012.63.3.02【Cho, Yi-An, & Chin, Chien (2012). Building classroom observation system of high school mathematics teachers' practiced-based knowledge. *Secondary Education*, *63*(3), 8–29. doi: 10.6249/SE.2012.63.3.02 (in Chinese)】

林碧珍（2001）。**發展國小教師之學生數學認知知識－理論結合實務研究取向的教師專業發展**。臺北：師大書苑。【Lin, Pi-Jen (2001). *To develop the students' cognitive knowledge of mathematics of elementary school teachers - The professional development of teachers with a theoretical and practical research orientation*. Taipei: National Taiwan Normal University Publishing House. (in Chinese)】

陳冠州、劉致演、尤詩憶、秦爾聰（2015）。「數學的三個世界」的運作模式及其對數學思考教學的啟示(I)。**科學教育月刊，379**，19–30。doi: 10.6216/SEM.201506_(379).0002【Chen, Kuan-Khou, Liu, Chih-Yen, Yu, Shih-I, & Chin, Erh-Tsung (2015). The operational model of the “Three Worlds of Mathematics” and its implication for the teaching of mathemaitcal thinking (I). *Science Education Monthly*, *379*, 19–30. doi: 10.6216/SEM.201506_(379).0002 (in Chinese)】

陳彥廷（2015）。國小教師數學教學知識之個案研究。**科學教育學刊，23**（3），213–239. doi: 10.6173/CJSE.2015.2303.01【Chen, Yen-Ting (2015). Mapping out the integration of Mathematics Pedagogical Content Knowledge (MPCK) from two elementary school teachers. *Chinese Journal of Science Education*, *23*(3), 213–239. doi: 10.6173/CJSE.2015.2303.01 (in Chinese)】

蔡文榮、張鈞淇、劉柏宏（2019）。臺灣學術界數學史研究之現況分析與建議：以 1992 年至 2017 年學位論文為例。**臺灣數學教育期刊，6**（1），27–51。doi: 10.6278/tjme.201904_6(1).003【Tsai, Wen-Jung, Chang, Chun-Chi, & Liu, Pai-Hung (2019). Analysis of current state and recommendations for HPM research in Taiwan: The case of theses and dissertations from 1992 to 2017. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, *6*(1), 27–51. doi: 10.6278/tjme.201904_6(1).003 (in Chinese)】

鍾靜、張淑怡、陳幸玫、陸昱任、戴坤邦（2012）。國小數學教師專業標準之建構。**科學教育學刊，20**（3），217–239。doi: 10.6173/CJSE.2012.2003.04【Chung, Jing, Chang, Shu-I, Chen, Hsing-Me, Lu, Yu-Jen, & Tai, Kun-Pang (2012). The development of professional standards for elementary mathematics teachers. *Chinese Journal of Science Education*, *20*(3), 217–239. doi: 10.6173/CJSE.2012.2003.04 (in Chinese)】

Abell, S. K. (2008). Twenty years later: Does pedagogical content knowledge remain a useful idea? *International Journal of Science Education, 30*(10), 1405–1416. doi: 10.1080/09500690802187041

Ball, D. L., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 83–104). London, UK: Ablex Publishing.

Ball, D. L., & Bass, H. (2009). *With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching learners' mathematical futures*. Paper presented at the 43rd Jahrestagung der Gesellschaft fur Didaktik der Mathematik, Oldenburg, Germany.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407. doi: 10.1177/0022487108324554

Biggs, J. B., & Collis, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy*. New York, NY: Academic Press. doi: 10.1016/B978-0-12-097552-5.50002-8

Cheang, W. K., Yeo, J. K. K., Chan, E. C. M., & Lim-Teo, S. K. (2007). Development of mathematics pedagogical content knowledge in student teachers. *The Mathematics Educator*, *10*(2), 27–54.

Chinnappan, M., & Lawson, M. J. (2005). A framework for analysis of teachers' geometric content knowledge and geometric knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(3), 197–221. doi: 10.1007/s10857-005-0852-6

Cochran, K. F., DeRuiter, J. A., & King, R. A. (1993). Pedagogical content knowing: An integrative model for teacher preparation. *Journal of Teacher Education*, *44*(4), 263–272. doi: 10.1177/0022487193044004004

Cohen, J. (1960). A coefficient of agreement for nominal scale. *Educational and Psychological Measurement*, *20*(1), 37–46. doi: 10.1177/001316446002000104

Cohen, J. H., & Amidon, E. J. (2004). Reward and punishment histories: A way of predicting teaching style? *The Journal of Educational Research*, *97*(5), 269–280. doi: 10.3200/JOER.97.5.269-280

Creswell, J. W. (1998). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five traditions*. London, UK: Sage Publications.

Fennema, E., & Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147–164). New York, NY: MacMillan.

Frick, T., & Semmel, M. I. (1978). Observer agreement and reliabilities of classroom observational measures. *Review of Educational Research*, *48*(1), 157–184. doi: 10.3102/00346543048001157

Fusch, P. I., Fusch, G. E., & Ness, L. R. (2018). Denzin's paradigm shift: Revisiting triangulation in qualitative research. *Journal of Social Change*, *10*(1), 19–32. doi: 10.5590/JOSC.2018.10.1.02

Gray, E., & Tall, D. (2007). Abstraction as a natural process of mental compression. *Mathematics Education Research Journal*, *19*(2), 23–40. doi: 10.1007/BF03217454

Grossman, P. L. (1990). *The making of a Teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York, NY: Teachers College Press. doi: 10.5860/CHOICE.29-0440

Harlow, S., Cummings, R., & Aberasturi, S. M. (2006). Karl Popper and Jean Piaget: A rationale for constructivism. *The Educational Forum*, *71*(1), 41–48. doi: 10.1080/00131720608984566

Hashweh, M. Z. (2005). Teacher pedagogical constructions: A reconfiguration of pedagogical content knowledge. *Teachers and Teaching: Theory and Practice*, *11*(3), 273–292. doi: 10.1080/13450600500105502

Heidegger, M. (1993). *Basic writings: From being and time (1927) to the task of thinking (1964)*. New York, NY: Harper Collins.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372–400.

Hill, H. C., Umland, K., Litke, E., & Kapitula, L. R. (2012). Teacher quality and quality teaching: Examining the relationship of a teacher assessment to practice. *American Journal of Education*, *118*(4), 489–519. doi: 10.1086/666380

Jacobs, J. K., Hollingsworth, H., & Givvin, K. B. (2007). Video-based research made "easy": Methodological lessons learned from the TIMSS video studies. *Field Methods*, *19*(3), 284–299. doi: 10.1177/1525822X07302106

Jimoyiannis, A. (2011). Using SOLO taxonomy to explore students' mental models of the programming variable and the assignment statement. *Themes in Science and Technology Education*, *4*(2), 53–74.

Krauss, S., Brunner, M., Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., & Jordan, A. (2008). Pedagogical content knowledge and content knowledge of secondary mathematics teachers. *Journal of Educational Psychology*, *100*(3), 716–725. doi: 10.1037/0022-0663.100.3.716

Learning Mathematics for Teaching (LMT) Project. (2000). Retrieved from http://websites.umich.edu/~lmtweb/about.html

Lerman, S. (2001). A review of research perspectives on mathematics teacher education. In F. L. Lin & T. J. Cooney (Eds.). *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 33–52.). Dordrecht, The Netherlands: Springer. doi: 10.1007/978-94-010-0828-0_2

Mitchell, R. N., & Marin, K. A. (2015). Examining the use of a structured analysis framework to support prospective teacher noticing. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *18*(6), 551–575. doi: 10.1007/s10857-014-9294-3

Noddings, N. (1992). *The challenge to care in schools: An alternative approach to education*. New York, NY: Teacher College Press.

Park, S., & Chen, Y. C. (2012). Mapping out the integration of the components of pedagogical content knowledge (PCK): Examples from high school biology classrooms. *Journal of Research in Science Teaching*, *49*(7), 922–941. doi: 10.1002/tea.21022

Pegg, J., & Tall, D. (2010). The fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical frameworks. *ZDM Mathematics Education*, *37*(6), 468–475. doi: 10.1007/BF02655855

Piaget, J. (1972). *The principles of genetic epistemology* (W. Mays, Trans.) London, UK: Routledge.

Schoenfeld, A. H. (2011). Noticing matters. A lot. Now what? In M. G. Sherin, V. R. Jacobs & R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 223–238). New York, NY: Routledge.

Sherin, M. G., Jacobs, V. R., & Philipp, R. A. (2011). Situating the study of teacher noticing. In M. G. Sherin, V. R. Jacobs & R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 3–13). New York, NY: Taylor and Francis.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1–22. doi: 10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

Strauss, A., & Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory*. Newbury Park, CA: Sage.

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics*. New York, NY: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9781139565202

van Driel, J. H., Verloop, N., & de Vos, W. (1998). Developing science teachers' pedagogical content knowledge. *Journal of Research in Science Teaching*, *35*(6), 673–695. doi: 10.1002/(SICI)1098-2736(199808)35:6%3C673::AID-TEA5%3E3.0.CO;2-J

Veenman, M. V. J. (2011). Alternative assessment of strategy use with self-report instruments: A discussion. *Metacognition and Learning*, *6*, 205–211. doi: 10.1007/s11409-011-9080-x

Yin, R. K. (2017). *Case study research and applications: Design and methods*. Thousand Oaks, CA: Sage.

張子貴（2021）。
數學系學生對函數極限的錯誤認知與解題困境。
臺灣數學教育期刊，8（2），43-76。
doi: 10.6278/tjme.202110_8(2).002

數學系學生對函數極限的錯誤認知與解題困境

張子貴
國立東華大學應用數學系

本研究的主要目的為探討數學系學生在微積分中對函數極限的錯誤認知與解題困境，以提供微積分教師在教學設計上的參考。本研究採用調查研究法，以自編的「函數極限測驗卷」為研究工具，對兩所國立大學修讀應用數學系微積分（一）的 111 位學生進行調查，分析學生的解題類型、錯誤認知與解題困境。研究結果發現：一、一半的學生無法正確描述函數極限的直觀意義與精確定義；二、學生未能理解函數極限的運算符號及使用極限計算法則的前提；三、學生無法釐清極限值、函數值與連續之間的關係；四、當函數含有根式、絕對值或有界的週期函數時，學生對計算函數的極限有困難。五、多數學生無法利用極限的精確定義證明線型函數的極限。最後依據研究結果，對微積分教學與研究提出一些建議。

關鍵詞：函數極限、微積分、解題困境、解題類型、錯誤認知

通訊作者：張子貴，e-mail：tzu@gms.ndhu.edu.tw
收稿：2021 年 2 月 1 日；
接受刊登：2021 年 10 月 15 日。

Chang, T. K. (2021).
Math students' misunderstandings and obstacles in learning limits of functions.
Taiwan Journal of Mathematics Education, *8*(2), 43-76.
doi: 10.6278/tjme.202110_8(2).002

Math Students' Misunderstandings and Obstacles in Learning Limits of Functions

Tzu-Kuei Chang
Department of Applied Mathematics, National Dong Hwa University

This study investigated math students' misunderstandings and obstacles in learning limits of functions to enable calculus teachers to design their teaching plan accordingly. A self-designed test about the limits of functions was used as a tool in a survey to collect data from 111 students who were taking Calculus (I) at two public universities. The analysis of the students' problem-solving styles, misunderstandings, and difficulties pertaining to problem solving revealed the following findings: 1) Approximately half of the students could not correctly provide the intuitive and precise definitions of a limit; 2) the students could not understand the operational symbols of function limits and the basis for applying limit-related laws; 3) the students could not explain the relationship among limit, function value, and continuity; 4) the students experienced difficulties calculating the limit of a function when it contains radicals, absolute values, or bounded periodic functions; 5) most students could not apply the precise definition of a limit to prove the limit of a linear function. On the basis of these findings, we developed several recommendations for improving calculus teaching and research.

Keywords: limit of function, calculus, problem-solving obstacles, problem-solving styles, misunderstandings

Corresponding author：Tzu-Kuei Chang，e-mail：tzu@gms.ndhu.edu.tw
Received：1 February 2021;
Accepted：15 October 2021.

壹、研究動機與目的

微積分包含微分與積分兩大分支，函數微分的結果稱為導數，即是將割線斜率取極限而得到的，而函數的定積分即是將黎曼和（Riemann Sum）取極限而得到的。因此，微積分的主要內容即探討極限、微分與積分及其應用，且函數極限的概念是微積分的內容當中許多重要概念的基礎，如果學生不能理解極限的概念，那他們就不容易理解導數與積分等重要概念（Juter, 2005）。甚至，在初等數學無法解決的問題，諸如：計算曲線的斜率、找出一般曲線的切線、計算曲線的弧長、計算以曲線為邊界的區域之面積、計算瞬間變化率、計算無窮多項的級數和等，正因為採用了極限的概念，才得以在微積分中解決。

學生在學習微積分的過程中，會遇到許多概念理解、程序執行及問題解決等方面的困難，尤其對極限存在許多認知與計算程序上的錯誤，進而影響對微積分的學習。大多數的微積分教師都能體認到極限在微積分所扮演的角色之重要性（Denbel, 2014；Odafe, 2012），但事實上，極限的本質是相當複雜的，數學家對極限的認識即是一個曲折且漸近的過程，因此，許多學生會覺得難以理解極限的概念，不知道極限概念與微積分的其他概念有何關係，便無法理解在大學微積分當中極限所扮演的角色之重要性（Denbel, 2014）。

雖然微積分的書上都有給定並解釋極限的直觀意義與精確定義，教師在教學時也會做詳盡的講解，但即使是用同一本課本、上同一門課，學生還是可能會產生不同的想法，因此，在微積分的學習過程中，仍有不少學生對極限的概念感到困難或存在一些錯誤認知（謝哲仁、李慶志，2012; Denbel, 2014; Fernández, 2004; Güçler, 2013; Juter, 2005; Keene, Hall, & Duca, 2014; Odafe, 2012; Swinyard & Larsen, 2012; Szydlik, 2000; Tall, 1992）。

如果教師能事先了解學生的錯誤認知與解題困境，及這些錯誤的想法是如何形成的，那教師就可以在教學設計上做更好的準備，提供給學生更適合的學習環境（Juter, 2005），以提升學生的學習成效。例如：教師可以針對學生經常發生的錯誤概念設計教材、教學活動與習題演練，以釐清學生的錯誤認知及克服解題困境。

函數極限是大學應用數學系的微積分課程及後續相關課程的重要基礎概念，雖然目前國際間關於微積分中極限概念的研究很多，國內也有些許相關研究，但探究主修數學的學生在函數極限的錯誤認知與解題困境的研究並不多。因此，本研究的目的乃分析應用數學系學生在微積分中對函數極限的理解與計算之解題類型，並探討學生對函數極限的錯誤認知與解題困境，以提供大學微積分教師深入認識學生的學習表現及在教學設計上的參考。雖然數學的學習認知除了概念理解與程序執行之外還包括問題解決，由於應用數學系的課程設計仍較偏重理論基礎的訓練，故本研究聚焦於探討學生對函數極限在概念理解與程序執行的表現，並將「錯誤認知」

界定為「在解決概念理解與程序執行的相關問題過程中所呈現的錯誤認知」，將「解題困境」界定為「在解決概念理解與程序執行的相關問題過程中所遇到的困難」。

依據研究目的，本研究之研究問題如下。

一、應用數學系學生在理解函數極限概念的表現之解題類型為何？存在哪些錯誤認知與解題困境？

二、應用數學系學生在計算函數極限的表現之解題類型為何？存在哪些錯誤認知與解題困境？

貳、文獻探討

茲將「微積分課程中的學習困境」、「函數極限的錯誤認知與學習困境」與「函數極限的教材內容分析」等相關文獻之探討與評析分述如下。

一、微積分課程中的學習困境

學生在學習微積分時經常會遇到一些困境，Tall（1992）表示，無論以何種方式學習微積分，似乎都會存在一些困難的概念，而使得無論教師如何教導微積分，幾乎都會產生一些問題。這些困境包括：對極限概念存在許多認知困難、在量化的定義（如：極限的精確定義）中難以掌握其中的量詞（如：ε、δ）、較偏愛程序性的計算甚於概念性的理解、對某些函數的微分與積分有困難、將實務上的問題轉換成微積分的公式有困難等。

在微分方面，劉湘川等人（2010）發現科技大學學生在記憶微分公式時，常誤用基礎公式來記憶新的微分公式，例如：誤用「和的微分公式」來記憶「積的微分公式」，產生$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x) + g'(x)$之錯誤；誤用「積的微分公式」來記憶「合成函數的微分公式（連鎖律（Chain Rule））」，產生$\big[f\big(g(x)\big)\big]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$之錯誤；誤用「冪函數的微分公式」來對指數函數微分，例如，$(5^3)' = 3 \cdot 5^2$。Muzangwa 與 Chifamba（2012）也發現受測的 10 位數學系學生全都誤用冪函數的微分公式來進行其他非冪函數的微分運算，例如：$\frac{d}{dx}x^x = xx^{x-1}$。此外，在教學現場也常發現學生容易產生「$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g'(x)$」之錯誤。

在積分方面，Seah（2005）發現在積分問題當中學生比較有困難的題目類型包括三角函數的積分與應用積分來計算區域面積。學生在概念方面的錯誤包括：將定積分當作函數圖形所圍出的區域面積，未理解函數圖形所圍出的區域與積分範圍；當函數圖形在x軸下方時，學生無法正確求出函數圖形所圍出的區域面積；學生不能理解「積分是微分的逆運算」可以透過積分來找反導函數。學生在程序執行上的錯誤包括：不定積分的結果沒有加上常數 C；將微分與積分兩種運算混淆。學生在技能方面的錯誤是因為缺乏幾何、代數與三角學等數學知識所造成的。整體而言，學生較著重於積分的運算程序甚於積分的概念，他們通常未能同時具備對積分的概念與計算程序的理解。Muzangwa 與 Chifamba（2012）發現數學系學生在進行二重積分的運算時，

學生無法正確畫出積分的範圍，也有少數學生不了解「在對x積分時要將y視為常數」。造成這些錯誤認知的原因是，學生將微積分的概念糾纏在一起，而缺乏對數學的進一步思考。

在問題解題方面，Klymchuk、Zverkova、Gruenwald 與 Sauerbier（2010）發現學生無法運用他們所學到的知識在熟悉的脈絡中建構簡單的函數，例如：在解應用題時，學生難以列出總成本函數的算式，其中，學生對理解題目有困難，包括：語言的理解、已知條件的使用及變數的確定等，學生對於該使用哪個公式也有困難。學生認為他們需要更多解應用題的練習，並希望教師能指導更多解應用題的解題步驟與細節。

綜觀相關文獻，學生在學習微積分的過程中，會遇到許多概念理解、程序執行及問題解決等方面的困境。在概念理解方面的困境包括：對函數極限的概念與精確定義之認知困難、對微分與積分的運算概念錯誤、誤以為定積分就是區域面積、未能理解函數圖形所圍出的區域與積分範圍及「積分是微分的逆運算」等。在程序執行方面的困境包括：在未符合極限律的前提下誤用極限律、誤用冪函數的微分公式來進行其他非冪函數的微分運算、微分公式與積分公式的誤用，對三角函數的積分較不熟悉，不定積分的結果沒有加上常數 C，將微分與積分兩種運算混淆。在問題解決方面的困境包括：對應用積分來計算區域面積有困難，對應用問題的理解有困難、無法將實務問題轉換成微積分的公式或算式。在學生學習微積分所遇到的困境當中，又以極限的概念最令學生困惑及難以理解（Tall, 1992）。

二、函數極限的錯誤認知與學習困境

（一）函數極限的錯誤認知

由於函數極限的概念較抽象，學生在學習過程中容易受到外界不完整及不恰當的資訊影響，使他們對極限定義產生錯誤認知，誤以為極限是邊界或不可達到的值或是圖形很靠近但永遠無法到達的直線，導致他們在計算極限時遇到困難（Keene, et al., 2014; Szydlik, 2000）。Odafe（2012）及 Güçler（2013）均發現美國學生對函數極限存在六種錯誤認知，包括：極限是描述當x移向特定點時函數如何移動；極限是函數無法通過的值或點；極限是當限制x值時函數的y值可以任意靠近的值；極限是函數很靠近但無法到達的值或點；極限是一個足夠精確的近似值；極限的求法是透過插入一些很靠近某個數的值直到達到極限為止。經過一個學期的改善教學，Odafe 在學期末的會談中發現，仍有些學生認為函數在未定義的點之極限不存在，而且函數在某個點的極限一定會等於函數在該點的函數值。Denbel（2014）發現 Dilla 大學的學生也有類似的錯誤認知，學生把極限視為不可到達的、近似值、邊界，把極限看成一個動態的過程，而不是一個靜態的物件，在這種感覺下，認為函數在每一個點一定存在極限。學生誤認為：函數在每個點都必須被定義成有極限；一個函數若在某一點沒有定義，則沒有極限；當一個函數在某個點有極限，

則此函數在這個點必須連續；極限等於函數在該點的函數值。Güçler 也發現有些學生會誤以為「只有連續函數才有極限」。

（二）函數極限概念的學習困境

相關文獻顯示學生在學習函數極限概念時存在一些困境。Tall（1992）發現學生的認知困難包括：1.包含在語言中的困難，如「極限」、「趨向於」、「接近」、「儘可能小」等這類的術語在口語上的意義會與正式的概念產生衝突；2.由於得出極限的過程不容易用簡單的算術、代數或無窮的概念來呈現，而使得此概念變得很抽象；3.「一個變數ε可以取成任意小」的過程常被誤解成「一個非常小的變量」；4.「N可以取成任意大」會被誤以為N是無窮大的數；5.學生經常對「極限是否可以精確地達到」感到困難；6.學生對於從「有限」到「無限」及「無限是怎麼一回事」感到混淆。而 Juter（2005）的調查研究結果則顯示：1.許多學生只有片段的概念，概念沒有融會貫通，尤其在所訪談的問題中特別地明顯，但是他們自己並沒有發現此問題；2.許多學生可以簡要地說明什麼是極限，但當要解釋ε與δ對調的差異時，就出現嚴重的問題；3.學生在學習極限時似乎非常自以為是，他們只聚焦於解決問題，而不太管理論的概念，整個學期只有極少數的學生能解釋極限的定義在說什麼，對解題結果所用到的理論含糊不清，卻幾乎對自己在概念理解的能力很有自信；4.有些學生很難很快地放棄他們原先的錯誤認知，例如：有些學生無視於一些反例的存在，而整個學期都堅持「函數的極限是不可達到」的見解。

由於學生對極限的定義存在錯誤的認知，經常對函數的「極限」與「連續」之定義產生混淆，當他們使用其中一個定義時函數是連續的，而使用另一個定義時函數卻變成不連續的，結果產生一個函數同時是連續也是不連續的矛盾（Shipman, 2012）。在國內也發現，許多學生由於極限概念支離破碎而無法與連續、微分、積分等其他概念做連結，而在計算函數極限時，縱使能利用帶入數值的方式求得正確的極限值，卻無法解釋極限的意義（謝哲仁、李慶志，2012）。

學生在微積分課程中學過函數在某個點的極限$\lim_{x\to a} f(x)$、函數在無窮大的極限$\lim_{x\to\infty} f(x)$及數列的極限$\lim_{n\to\infty} a_n$，雖然三者的極限符號類似，但 Fernández-Plaza 與 Simpson（2016）發現很少學生能理解他們之間的關聯性，有些學生將他們視為三種單獨的極限，有些學生縱使能看出不同型式極限之間的關聯性，例如：$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to 0} f\left(\frac{1}{x}\right)$，卻無法使用正式的數學語言來呈現。

學生對於函數極限的精確定義更是覺得抽象與困難。Fernández（2004）的分析結果發現，學生對於「$\lim_{x\to a} f(x) = L$ means that $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ such that if $0 < |x-a| < \delta$ then $|f(x) - L| < \varepsilon$」之精確定義有一些困惑，例如：學生不清楚定義中的ε與δ之意義為何？ε與δ是怎麼來的？學生無法理解如何解釋不等式$0 < |x-a| < \delta$與$|f(x) - L| < \varepsilon$的代數與幾何意義。大部分學生對於在利用極限的精確定義來證明極限時，對「所給定的ε如何求出δ」感到困惑，

甚至也有部分學生困惑著「在教師給定的例題$\lim_{x\to 2}(3x-2)=4$中，都已經知道極限值了，為何還要利用定義去證明極限值？」。

Cottrill 等人（1996）為了幫助學生理解極限的精確定義而提出一個七步驟的極限生成分解（genetic decomposition）之架構，前三個步驟透過代入x值求函數值$f(x)$的方式逐漸理解「當x充分靠近a則$f(x)$會充分靠近L」，但是 Swinyard 與 Larsen（2012）認為這是在找出極限候選人的過程，然而精確定義是描述「驗證」函數在某個點的極限候選人之過程，因學生通常難以區別「尋找」和「驗證」極限候選人的差異，便習慣於從x的觀點切入來理解極限的精確定義，為了讓學生改變從y的觀點切入以理解精確定義中「$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0$」的概念，Swinyard 與 Larsen 修訂 Cottrill 等人所提的極限生成分解之架構，試圖透過圖形視覺化的方式幫助學生建構函數極限的精確定義。經過二次實驗教學發現學生出現兩個主要困境：1.在考慮極限的精確定義時，學生傾向於先從x的觀點切入，而不喜歡從y的觀點切入；2.學生致力於將無限靠近某一個點的意義具體化。

（三）計算函數極限的錯誤

Muzangwa 與 Chifamba（2012）發現數學系學生在計算函數極限時會誤用有理函數約分的方式，例如：$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\sin 5=\sin 5$。華德林與邱進凌（2009）則發現學生在計算較進階的極限問題時常會因為思慮不週及誤用運算法則而計算錯誤，其錯誤類型如下。

1.學生在使用極限律計算極限時，常忽視極限運算的法則。

學生不清楚「必須在有限項的和取極限時，才可以使用和的極限律來計算極限、必須在兩個函數的極限都存在時，才可以使用積的極限律來計算極限」，因而產生錯誤的解法，例如：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=0+0+\cdots+0=0$$

及$\lim_{x\to 0}\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}x^2\cdot\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=0\cdot\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=0$。

其中$\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$並不存在，不符合極限律的使用前提。

2.學生常忽視等價無窮小量替代原理中的條件要求，而在計算極限過程中將函數的某一部分進行替代，而產生錯誤的解法。

例如：因為學生認為當$x\to 0$時，$\tan x\approx x$且$\sin x\approx x$，故寫成：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^3}=0。$$

又因為學生認為當$x\to 0$時，$x^2\sin\frac{1}{x}\to 0$，故$\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)\approx x^2\sin\frac{1}{x}$，而寫成：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0。$$

3.學生常忽略了當左極限與右極限的結果不同時，應該分開討論左極限與右極限。

例如：討論$f(x)=\begin{cases}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}, \text{if } x\neq 0\\ 1,\ \text{if } x=0\end{cases}$在$x=0$的連續性。當學生在計算$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$時，常寫成

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{2^t-1}{2^t+1}\underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\overset{H}{=}}\lim_{t\to\infty}\frac{2^t\ln 2}{2^t\ln 2}=1。$$

學生忽略了當$x\to 0$時，包含了$x\to 0^+$與$x\to 0^-$的情形，故當令$t=\frac{1}{x}$時，也應該包含$t\to+\infty$與$t\to-\infty$兩種情形。因此，正確解法應該是：

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{2^t-1}{2^t+1}\underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\overset{H}{=}}\lim_{t\to\infty}\frac{2^t\ln 2}{2^t\ln 2}=\lim_{t\to\infty}1=1 \text{ 且}$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\lim_{t\to-\infty}\frac{2^t-1}{2^t+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1。$$

故$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在。

綜觀相關文獻，極限對學生而言是一個既抽象又難以理解的概念，學生試圖透過個人的學習經驗與生活經驗來理解函數極限，卻經常對函數極限產生錯誤的認知，例如，極限是一個函數無法通過或達到的值或點；極限是一個精確的近似值；極限是函數的一個邊界點；極限是圖形很靠近但永遠無法到達的直線；極限是描述當x移向某個特定點時函數移動的動態過程；函數在未定義的點之極限值不存在；函數在有定義的點之極限值一定存在；函數在某個點的極限值等於函數在該點的函數值；若函數在某個點的極限值存在則函數在該點連續；只有連續函數才有極限。

學生對函數極限的精確定義更是困惑重重，難以理解，例如，定義中的ε與δ之意義為何？ε與δ是怎麼來的？$0<|x-a|<\delta$與$|f(x)-L|<\varepsilon$的代數與幾何意義為何？量詞「∀ε（無論多小）」在整個定義中的意義為何？證明極限時對所給定的ε如何求出δ？「ε可以取成任意小」的意義為何？「N可以取成任意大」的意義為何？

此外，學生在學習極限時，較著重於解題，而不太能理解解題所用到的概念，也不太在意這些概念的意義。

國內外關於「計算函數極限的解題錯誤分析」之文獻相當稀少，雖然華德林與邱進凌（2009）已經提出一些學生在計算極限時常出現的錯誤，此結果具有高度的參考價值，但以上題目較屬陷阱題，並未針對計算函數極限的所有題型進行分析，對測驗題的信度與效度亦未有嚴謹的交代。

關於學生對函數極限的錯誤認知之相關文獻，幾乎都是來自國外，反觀國內，雖然函數極限是大學應用數學系的微積分課程及後續相關課程的重要基礎概念，且學生在學習過程也存在許多錯誤認知與解題困境，卻少有研究針對數學相關學系的學生深入探討此問題。因此，本研究將著力於探討國內應用數學系學生在函數極限的錯誤認知與解題困境，期能提供大學微積分教師當作設計教材與教學活動之參考，以改善微積分的學習成效。故本研究將先建立函數極限的能力指標與概念圖，當作命題之架構，並參酌相關文獻中學生對函數極限的錯誤認知來設計測驗題，建立試題之內容效度，再邀請具有數學博士學位且教授微積分的應用數學系資深教授進行審題，建立試題之專家效度。在分析方法方面，研究者將設計解題類型分析表來分析及記錄學生的解題類型、錯誤認知與解題困境，並邀請研究助理共同分析資料確保分析結果之可信度。

三、函數極限的教材內容分析

（一）高中的函數極限教材內容

依據教育部（2013）所發布的普通高級中學課程綱要，數學領域在高中三年級標準課程的數學甲與數學乙之教材內容均已包括：連續函數、函數的極限、絕對值函數、根式函數、極限的性質、夾擠定理等主題。

（二）微積分的函數極限教材內容

由於 Stewart（2016）的《微積分》經常被當作數學系或應用數學系的微積分教科書，故分析該書第 1.5~1.8 節與 6.8 節關於函數極限的教材內容，其主要教材內容如下。

1.定義函數極限的直觀意義，並圖示說明函數在某個點的極限存不存在與該點有沒有定義或連不連續無關，再以數值列表與函數圖形舉例說明函數極限的直觀意義。
2.定義函數左極限與右極限的直觀意義，介紹定理「$\lim_{x\to a} f(x) = L$ if and only if $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ and $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$」，並舉例說明如何從函數圖形判斷函數在某個點的左極限、右極限與極限。
3.定義無窮極限的直觀意義，並以數值列表與函數圖形舉例說明無窮極限的直觀意義。
4.定義鉛直漸近線，並舉例說明如何找函數的鉛直漸近線。
5.介紹極限律，並舉例說明如何藉由極限律計算函數極限。
6.介紹在什麼條件下可以使用直接代入性質計算函數極限，即$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$。
7.舉例說明將原函數$f(x)$因式分解、約分或有理化根式後因式分解、約分成$g(x)$，再使用直接代入性質計算函數的極限，即$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = g(a)$，其中$f(x) = g(x), \forall x \neq a$。
8.舉例說明如何藉由計算左極限與右極限判斷函數的極限是否存在。
9.介紹夾擠定理並舉例說明如何使用夾擠定理計算函數的極限。

10.介紹函數極限、左極限、右極限與無窮極限的精確定義並舉例說明如何使用精確定義證明函數的極限。

11.定義連續、左連續、右連續與區間連續。

12.介紹羅必達法則（L'Hôpital's rule）並舉例說明如何使用羅必達法則來計算函數的極限，即當分子與分母的極限同時為0或同時為±∞時$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$。

由以上教材內容分析結果顯示，理論上學生在高中三年級已經學過大學微積分中學習函數極限的先備知識，在大學微積分課程中再對函數極限的定義、性質、運算方法、運算性質及證明方法做更深入詳盡的說明。為檢視學生對函數極限的錯誤認知與解題困境，本研究以微積分「函數極限」教材內容來建立能力指標，以做為命題的架構，建立試題之內容效度。

參、研究方法

本研究以自編的「函數極限測驗卷」為研究工具，採用調查研究法，所蒐集的研究資料為質性資料，藉以分析應用數學系學生在微積分中對函數極限的解題類型，並探討學生對函數極限的錯誤認知與解題困境。

一、研究對象

本研究以兩所國立大學修讀應用數學系微積分（一）的 3 個班共 111 位學生為研究樣本，並以 S1**、S2**、S3**分別當作第 1、2、3 班的學生代號，此三班的指考入學最低錄取分數之國文、英文、數學甲三科平均為三十幾分，第三班的學校地理位置比另兩班更偏遠。此三班微積分（一）均非由研究者所任課，三位任課教師均為本研究「函數極限測驗卷」的試題審查委員。三位任課教師均採用數學系傳統教學模式，在講臺上板書及講解教材內容，指定習題讓學生回家演練，三班所採用的微積分教科書不盡相同，但教材內容的概念、性質、方法相同，例題類似，對於本研究的測驗試題之解題概念與方法均在課堂上教授過。因此，三個班級的教材內容與教學模式大致相同。

二、研究歷程

（一）研擬研究內容

包括界定研究主題為「分析應用數學系學生對函數極限的錯誤認知與解題困境」、探討「微積分課程中的學習困境」、「函數極限的錯誤認知與解題困境」、「函數極限的教材內容分析」等相關文獻資料做為研究方法之理論基礎。

（二）建立「函數極限」主題的能力指標與概念圖

依據微積分課程目標及對 Stewart（2016）《微積分》中函數極限教材內容之分析結果，擬訂學生在「函數極限」主題需達成的能力指標，並統整函數極限的概念與各種計算方法，擬訂函數極限的概念圖，以做為命題之架構，建立試題之內容效度。

（三）命題、專家審題、修訂試題、進行預試

本研究將參酌相關文獻中學生對函數極限的錯誤認知，並依據函數極限的能力指標與概念圖來命題，編製「函數極限測驗卷」，再邀請 5 位具有數學博士學位且教授微積分的應用數學系資深教授進行四次專家會議審題，參酌審查意見修訂能力指標、概念圖與試題，建立試題之專家效度。考量教材內容與學生素質，修訂的內容包括：能力指標增列「能使用極限的精確定義證明極限」、第 1 題從函數圖形判斷極限的問題用文字描述得更詳盡、將「描述精確定義」修訂為「判斷精確定義是否正確」、增列使用精確定義證明極限的證明題、使用夾擠定理計算極限的題目增列第 1 小題證明函數的上下界以提示學生函數的上下界、是非題組增列正確的概念題並移到試卷後面及些微的文字修訂。試題編製完成後，選取一班應用數學系重修微積分（二）的 26 位學生進行預試，以檢視試題之適切性。

（四）再修訂試題成為正式試題、正式施測

參酌預試學生的答題狀況修訂試題，使學生能更加理解題意及答題的方向或方式，例如，將「請敘述$\lim_{x\to a} f(x) = L$的直觀意義」修訂為「請用文字敘述$\lim_{x\to a} f(x) = L$的直觀意義」，修訂後成為正式測驗試題，再進行正式施測，將此測驗當作期中考試前的小考，並由任課教師、助教或研究者共同監考，讓受試學生能以嚴謹的態度來作答，以確保測驗的信度。

（五）分析學生對函數極限的解題類型並撰寫研究報告

依據正式施測時學生的作答內容來彙整及記錄學生的解題類型，再分析學生對函數極限的錯誤認知與解題困境。最後將研究過程與分析結果撰寫成研究報告。

三、能力指標與概念圖

應用數學系學生在「函數極限」主題需達成的能力指標與概念圖經過專家審查後，修訂之結果如下。

（一）函數極限的能力指標

1.能理解函數極限的直觀意義。

2.能理解函數極限的精確定義。

3.能使用函數極限的精確定義證明函數的極限。

4.能理解函數極限的基本性質，包括：極限律、當函數在某個點的左極限與右極限均存在且相等時函數在該點的極限才存在、函數在某個點的極限存不存在與函數在該點是否有定義及是否連續無關。

5.能使用極限律計算函數的極限。

6.能使用直接代入性質計算函數的極限，即$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$。

7.能將原函數$f(x)$因式分解、約分，或有理化根式後因式分解、約分成$g(x)$，再使用直接代入性質來計算函數的極限，即$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = g(a)$，其中$f(x) = g(x), \forall x \neq a$。

8.能藉由計算左極限與右極限來判斷函數的極限是否存在。

9.能使用夾擠定理來計算函數的極限。

10.能使用羅必達法則來計算函數的極限。

（二）函數極限的概念圖

函數極限與計算函數極限的方法之概念圖如圖 1 與圖 2 所示。

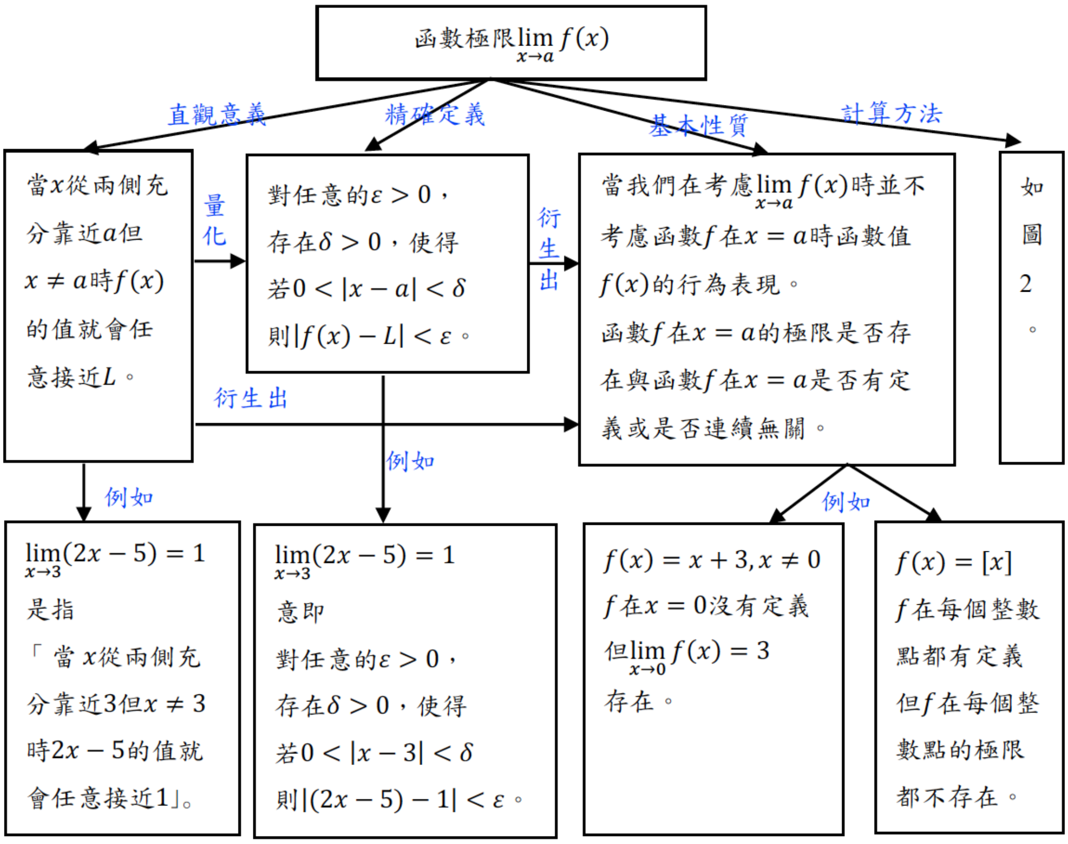


圖 1　函數極限的概念圖

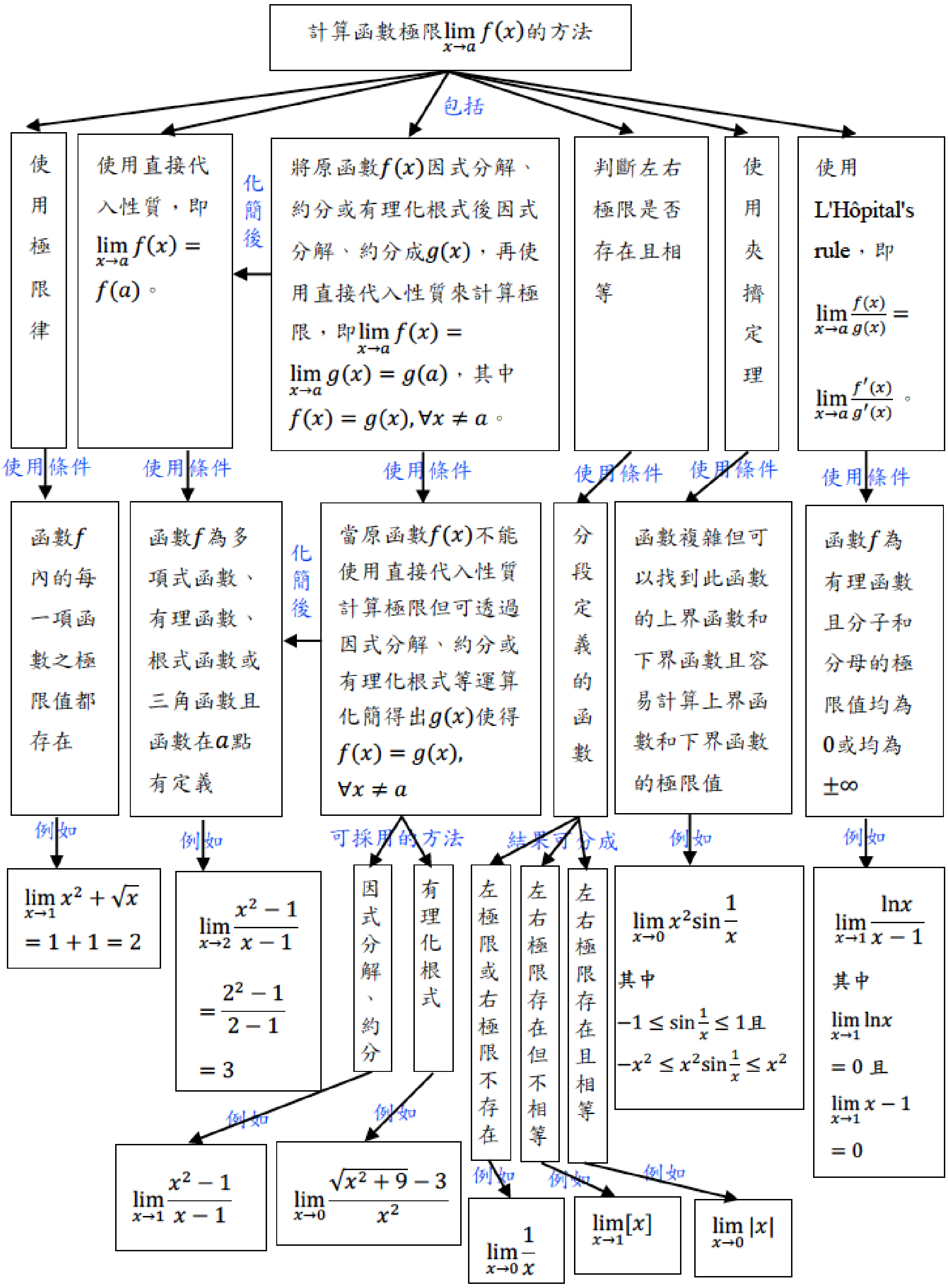


圖 2　計算函數極限$\lim_{x\to a} f(x)$的方法之概念圖

四、研究工具

本研究採用的研究工具為自編的「函數極限測驗卷」，依據學生在「函數極限」主題需達成的能力指標與概念圖設計試題，並經專家審查後修訂成正式試題。試題總共有 8 題，其中第 1、2、3、4、7 題為測驗學生對函數極限概念的表現，第 5、6、8 題則測驗學生在計算函數極限的

表現，其中第 7 題中的 8 個錯誤敘述都是相關文獻所發現學生對函數極限的錯誤認知，用以檢視國內學生是否亦具有此錯誤認知。由於在下一章報導各題的解題類型時已說明試題，故限於篇幅不在此詳列試題。測驗類別、能力指標編號與試題編號之對應表如表 1 所示。

表 1

測驗類別、能力指標編號與試題編號之對應表

測驗類別	概念				計算					
能力指標編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
試題編號	1、7	2	3	4、7	5	5	5	5	6	8

五、資料分析

本研究所蒐集到的資料為學生的解題內容，屬質性資料，故採用分析歸納法來分析研究資料，彙整學生對函數極限的解題類型，並探討學生對函數極限的錯誤認知與解題困境。

在進行資料分析之前，研究者先依各大題各小題逐題批閱試卷，並隨時記錄閱卷時所觀察到的解題類型。除了第 7 題計算各小題的答對率之外，對其他各題的解題狀況，研究者設計解題類型分析表來彙整及分析學生的解題類型。每一小題逐題分析，對有關聯的小題，在分析完後會互相比對分析結果，例如，第 8 題第 1、3 小題均使用羅必達法則計算函數極限但正確率差異懸殊，便再分析其差異。列舉第 8 題第 1 小題之部分分析記錄表如圖 3 所示。

解題類型分析表

<table>
<tr><td>題目8(1)</td><td colspan="3">8.請判斷下列極限是否存在，若存在，請計算其極限值；若不存在，請說明理由。(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$。</td></tr>
<tr><td>能力指標</td><td colspan="3">10.能利用 L'Hôpital's rule 來計算極限。
能正確判斷此極限為不確定型式⟹能正確使用 L'Hôpital's rule 來計算極限⟹計算過程正確⟹算出正確的極限值。</td></tr>
<tr><td>答題類型編號</td><td>解題(答題)
內容</td><td>答題反應所使用的概念</td><td>人數/
總人數/
百分比</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3
完全正確或幾乎正確

未化簡微分後的分式，而再使用一次 L'Hôpital's rule 來計算極限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x}$。</td><td>(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\overset{H}{\underset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x}$
$\overset{H}{\underset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$
(S106、S109、S124、S126、S131、S213、S214、S241、S243、S301、S319、S348、S353)</td><td>能正確判斷此極限為不確定型式，並能正確使用 L'Hôpital's rule來計算極限，但未化簡微分後的分式，而再使用一次L'Hôpital's rule來計算極限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x}$，求得正確的極限值。正確</td><td>13/111</td></tr>
<tr><td>(2)
(i) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{1}$
$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ (S127、S150、S153、S221)</td><td>能正確判斷此極限為不確定型式，並能正確使用 L'Hôpital's rule來計算極限，但未化簡微分後的分式，而再使用一次L'Hôpital's rule來計算極限，求得正確的極限值。但未註記使用L'Hôpital's rule及其條件，即未註記 $\overset{H}{\underset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}}$。</td><td>4/111</td></tr>
<tr><td>(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\overset{H}{\underset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\frac{2\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{1}=\frac{1}{\sqrt{x}}$
$=0$ (S341)</td><td>能正確判斷此極限為不確定型式，並能正確使用 L'Hôpital's rule來計算極限，但未化簡微分後的分式，而再使用一次L'Hôpital's rule來計算極限，求得正確的極限值。但在計算過程中遺漏極限的運算符號 $\lim\limits_{x\to\infty}$。</td><td>1/111</td></tr>
</table>

圖 3　第 8 題第 1 小題之部分分析記錄表

為確保分析結果之可信度，研究者與研究助理分別對每一小題進行解題類型分析，對於分類結果不同的內容再進行討論直到達成共識。對每一小題的解題類型之分析流程如下：

（一）研究者與研究助理閱讀學生的解題內容，將解題狀況類似或不易判別的試卷做初步的分類。

（二）再反覆檢視學生的解題內容，確認或調整解題內容的分類，並歸納其解題特性，直到確定各種不同的解題類型及其解題特性為止。

（三）將每一小題的分析結果記錄成一份解題類型分析表，包括：每一種解題類型的內容及其解題所使用的概念、學生代號、人數、所占的百分比及相關解題類型的合併人數與所占的百分比。

（四）統整每一小題當中學生所採用的各種不同解題類型，分析並記錄學生所出現的錯誤認知與解題困境。

（五）再統整、分析學生對函數極限在解決概念理解與程序執行的相關問題過程中所呈現的錯誤認知與解題困境。

肆、研究結果與討論

對於 111 位研究樣本在極限測驗中的表現，將分成「概念」與「計算」兩大類別來說明，每一類別分別呈現學生在每一測驗題的解題類型及學生在解決此類問題的過程中所產生的錯誤認知與解題困境。在各小題的解題類型中，以白底標示完全正確，淺灰底標示部分正確，略灰底標示完全錯誤。

一、學生在函數極限概念的表現

以下分別就第 1、2、3、4、7 題關於函數極限的直觀意義、精確定義、證明、性質、極限律之作答結果來分析受試學生的解題類型，並歸納學生在解決此類問題的過程中所呈現的錯誤認知與解題困境。

（一）各題之解題類型

1.函數極限的直觀意義

本研究透過學生以文字敘述及觀察函數圖形來判斷函數極限的方式來了解學生對函數極限的直觀意義之理解。

（1）用文字敘述「函數極限的直觀意義」

第 1 題的第(1)小題請學生用文字敘述$\lim_{x \to a} f(x) = L$的直觀意義，受試學生的解題類型如表 2 所示。

表 2
用文字敘述「函數極限$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$的直觀意義」之解題類型

類別	解題內容與說明	百分比（人數／總人數）
1	能描述「當x很靠近a時$f(x)$會很靠近L」，但幾乎未說明x是「從兩側」靠近a及「$x \neq a$」。	51%(57/111)
2	寫出函數極限的精確定義「$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ such that if $0 < \lvert x-a \rvert < \delta$ then $\lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$」或「左極限=右極限」，誤以為極限的精確定義或性質是極限的直觀意義。	12%(13/111)
3	表示「當x很靠近a時$f(x)$的值等於L」，誤以為極限值等於函數值。	25%(28/111)
4	內容完全錯誤或空白未作答，對函數極限的直觀意義完全沒有概念。	12%(13/111)

（2）從觀察函數圖形理解極限的直觀意義

第 1 題的第(2)小題我們提供一個函數f的圖形，如圖 4，希望透過具體的實例來檢視學生對函數極限的直觀意義之理解。

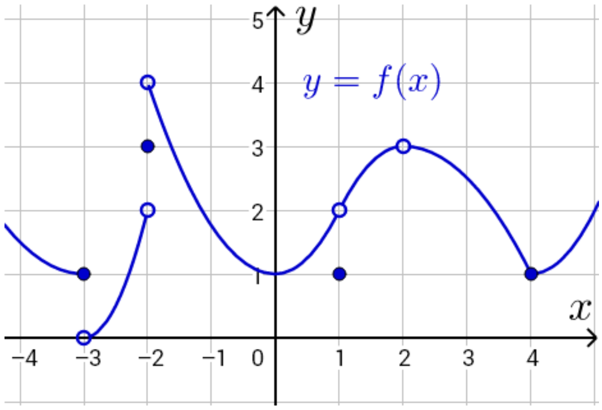


圖 4　第 1 題第(2)小題的函數圖形

在圖 4 中，函數f在$x = 2$沒有定義且不連續，我們引導學生從函數圖形中觀察當x分別從2的左邊與右邊充分靠近2時，$f(x)$的值會非常接近多少？$\lim\limits_{x \to 2} f(x)$是否存在？若存在，極限值為何？若不存在，請說明理由。受試學生的解題類型如表 3 所示。

表 3

從觀察函數圖形理解極限的直觀意義之解題類型（一）

類別	解題內容與說明	百分比（人數／總人數）
1	當x分別從2的左邊與右邊充分靠近2時，$f(x)$的值會非常接近3，$\lim_{x\to 2} f(x)$存在，且$\lim_{x\to 2} f(x) = 3$。正確解題。	75%(83/111)
2	能理解「當x分別從2的左邊與右邊充分靠近2時$f(x)$的值會非常接近3」，但誤以為「因為函數f在$x = 2$沒有定義或不連續，所以$\lim_{x\to 2} f(x)$不存在」。	22%(24/111)
3	使用一些奇怪的錯誤概念來判斷。	4%(4/111)

在圖 4 中，函數f在$x = -2$有定義但不連續、左極限與右極限均存在但不相等，我們引導學生從函數圖形中觀察當x分別從-2的左邊與右邊充分靠近-2時，$f(x)$的值會非常接近多少？$\lim_{x\to -2} f(x)$是否存在？若存在，極限值為何？若不存在，請說明理由。受試學生的解題類型如表 4 所示。

表 4

從觀察函數圖形理解極限的直觀意義之解題類型（二）

類別	解題內容與說明	百分比（人數／總人數）
1	當x從-2的左邊充分靠近-2時$f(x)$的值會非常接近2，當x從-2的右邊充分靠近-2時$f(x)$的值會非常接近4，因為當x分別從-2的左邊與右邊充分靠近-2時，$f(x)$的值不會接近相同的值，所以$\lim_{x\to -2} f(x)$不存在。正確解題。	63%(70/111)
2	能正確找出函數在$x = -2$的左極限與右極限，卻誤認為「因為函數圖形在$x = -2$不連續所以$\lim_{x\to -2} f(x)$不存在」。其實函數在不連續的點之極限值也可能存在，例如，此函數在$x = 1$及$x = 2$雖不連續但其極限值均存在。	4%(4/111)
3	能正確找出函數在$x = -2$的左極限與右極限，卻因為$f(-2) = 3$即認為$\lim_{x\to -2} f(x) = 3$，誤將函數值當作極限值。	10%(11/111)
4	無法從函數圖形觀察出當x分別從-2的左邊與右邊充分靠近-2時函數值$f(x)$會非常接近多少。	23%(26/111)

2.函數極限的精確定義

第 2 題的第(1)小題有 4 項關於函數極限精確定義的敘述，請學生逐一判斷每項敘述是否正確，有 50%（55/111）的學生完全判斷正確。有 33%（37/111）的學生未注意到$|x-a|$必須＞0，此結果與第 1 題第(1)小題描述極限的直觀意義時未說明「$x \neq a$」的結果呼應。

第 2 題的第(2)小題以一個基礎的實例來檢視學生對函數極限的精確定義之理解，希望學生能從極限的精確定義中找出ε與δ的關係，在已知$\lim_{x\to 3}(2x-5)=1$的條件下，請學生依照ε與δ的極限精確定義，在各給定的ε值之下計算並選取可行的δ值，受試學生的解題類型如表 5 所示。

表 5

在給定的ε值之下計算並選取可行的δ值之解題類型

類別	解題內容與說明	百分比（人數／總人數）
1	能正確由$|(2x-5)-1|<\varepsilon \Rightarrow 2|x-3|<\varepsilon \Rightarrow |x-3|<\frac{\varepsilon}{2}$，而推出可以選取$\delta=\frac{\varepsilon}{2}$，進而正確選取各項的$\delta$值。	58%(64/111)
2	能由$|(2x-5)-1|<\varepsilon$推導到$|x-3|<\frac{\varepsilon}{2}$，卻無法正確選取$\delta$，而取成$\delta=\frac{3}{2}\varepsilon$或$\delta=2\varepsilon$。	7%(8/111)
3	完全不了解函數極限的精確定義及ε與δ在定義中的意義，而試圖使用一些錯誤的方法來解題。	17%(19/111)
4	完全空白無法作答。	18%(20/111)

由以上的分析結果顯示，仍有超過 4 成的學生無法正確選取可行的δ值，甚至其中有 35%的學生完全不了解函數極限的精確定義及ε與δ在定義中的意義，有 12 位學生即使在第(1)小題已經完全正確判斷函數極限的精確定義，卻仍然不能理解其意義。

3.函數極限的證明

第 3 題的目的是為了檢視學生是否能理解「在實例中極限的精確定義」，請學生利用ε與δ的定義證明$\lim_{x\to 3}(2x-5)=1$，希望學生能經由分析$|(2x-5)-1|<\varepsilon$而找出適當的δ值，例如，取$\delta=\frac{\varepsilon}{2}$，再利用極限的精確定義證明$\lim_{x\to 3}(2x-5)=1$，受試學生的解題類型如表 6 所示。

表 6

證明函數極限$\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)=1$之解題類型

類別	解題內容與說明	百分比（人數／總人數）
1	能經由分析$\|(2x-5)-1\|=\|2x-6\|=2\|x-3\|<\varepsilon$ $\Rightarrow \|x-3\|<\frac{\varepsilon}{2}$，而取$\delta=\frac{\varepsilon}{2}$，再正確使用函數極限的精確定義證明$\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)=1$。	34%(38/111)
2	未經由分析$\|(2x-5)-1\|<\varepsilon$，而在證明的過程中直接取$\delta=\frac{\varepsilon}{2}$，再利用函數極限的精確定義證明$\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)=1$。	4%(4/111)
3	只能經由分析$\|(2x-5)-1\|=\|2x-6\|=2\|x-3\|<\varepsilon$ $\Rightarrow \|x-3\|<\frac{\varepsilon}{2}$，而正確選取$\delta=\frac{\varepsilon}{2}$，但無法使用函數極限的精確定義證明$\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)=1$。	20%(22/111)
4	只能寫出此極限的精確定義，無法找出合適的δ值。	6%(7/111)
5	不清楚函數極限的精確定義，無法找δ的值。	14%(16/111)
6	完全空白無法作答。	22%(24/111)

雖然此極限的證明是最簡單的基本題型，尚未使用到進一步的技巧，但 6 成以上的受試學生完全無法利用函數極限的精確定義來證明此線型函數的極限。

4.函數極限的性質

第 7 題是 10 小題是非題，請學生判斷每個敘述是否正確，若學生將錯誤的概念判斷成正確，則表示學生認同此錯誤認知，受試學生呈現的錯誤認知與所占的百分比彙整如表 7 所示，結果顯示仍有高比例的應用數學系學生仍無法釐清函數極限的直觀意義與極限值、函數值、連續之間的關係。

表 7

學生對極限的相關性質之錯誤認知及其百分比

錯誤認知	百分比
(1)極限是「描述當x移向某個特定點時函數移動的動態過程」。	71%
(2)極限是一個精確的近似值。	68%
(3)極限是函數的一個邊界點。	46%
(4)若函數在某個點的極限存在，則此極限就會等於函數在該點的函數值。	38%
(5)極限是一個函數無法達到的值或點。	31%
(6)若函數在某個點的極限存在，則函數在該點連續。	31%
(7)函數在未定義的點之極限不存在。	27%
(8)函數在每個有定義的點之極限一定會存在。	20%

5.對使用極限律計算函數極限的理解

大多數學生通常能使用極限律來計算函數極限，但對使用極限律的前提卻未必理解。第 4 題試題的目的在檢視學生是否能理解「使用積的極限律計算極限的前提必須是兩個函數各自的極限都存在，而且 0 與一個不存在的極限相乘未必會等於 0」及「使用商的極限律計算極限的前提必須是兩個函數各自的極限都存在且分母的極限值不等於 0」。

（1）判斷「$\lim\limits_{x\to 0}\left(x^4\cos\frac{\pi}{x}\right)=\left(\lim\limits_{x\to 0}x^4\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{\pi}{x}\right)=0\cdot\left(\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{\pi}{x}\right)=0$」的錯誤

$75\%(83/111)$的學生認為「$\lim\limits_{x\to 0}\left(x^4\cos\frac{\pi}{x}\right)=\left(\lim\limits_{x\to 0}x^4\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{\pi}{x}\right)$」並沒有錯，$7\%(8/111)$的學生覺得看起來有錯，但所回答的原因並不正確，只有 18%（20/111）的學生能表示「因為$\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{\pi}{x}$不存在，所以不可以使用極限律。」，顯示這些學生能理解「使用積的極限律計算極限的前提」。

$80\%(89/111)$的學生認為「$0\cdot\left(\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{\pi}{x}\right)=0$」並沒有錯，$5\%(5/111)$的學生覺得看起來有錯，但所回答的原因並不正確，只有$15\%(17/111)$的學生能表示「因為$\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{\pi}{x}$不存在，所以$0\cdot\left(\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{\pi}{x}\right)$＝0 不正確。」，顯示這些學生能理解「0與一個不存在的極限相乘未必會等於0。

竟然沒有任何一位受試學生同時了解這兩項錯誤。

（2）判斷「$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sin x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}3x}{\lim\limits_{x\to 0}\sin x}=\frac{0}{\lim\limits_{x\to 0}\sin x}=0$」的錯誤

$62\%(69/111)$的學生認為「$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sin x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}3x}{\lim\limits_{x\to 0}\sin x}$」並沒有錯，$28\%(31/111)$的學生覺得看起來有錯，但所回答的原因並不正確，其中有 22 位學生只利用$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$的性質正確計算出極限值應該是3，但並不清楚「$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sin x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}3x}{\lim\limits_{x\to 0}\sin x}$」錯誤的原因，只有$10\%(11/111)$的學生能表示「因為$\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$，所以不可以使用極限律。」，顯示這些學生能理解「使用商的極限律計算極限的前提」。

$68\%(76/111)$的學生認為「$\frac{0}{\lim\limits_{x\to 0}\sin x}=0$」並沒有錯，$11\%(12/111)$的學生覺得看起來有錯，但所回答的原因並不正確，其中有 5 位學生只利用$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$的性質正確計算出極限值應該是 3 不是 0，但並不清楚「$\frac{0}{\lim\limits_{x\to 0}\sin x}=0$」錯誤的原因，只有$21\%(23/111)$的學生能表示「$\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$，但是分母不可以為 0。」。

（二）對函數極限概念的錯誤認知

由以上各試題作答的分析結果顯示，受試學生對函數極限概念存在下列的錯誤認知。

1.有 71%的學生認為「極限是描述當x移向某個特定點時函數移動的動態過程」，把極限看成是動態的過程，而不是一個靜態的物件；有 68%的學生認為「極限是一個精確的近似值」；有 46%的學生認為「極限是函數的一個邊界點」；有 31%的學生認為「極限是一個函數無法達到的值或點」。這些對極限認知的錯誤與 Denbel（2014）、Güçler（2013）、Keene 等人（2014）、Odafe（2012）、Szydlik（2000）的研究結果雷同。

2.有一半的學生在描述函數極限的直觀意義時只敘述當x靠近a，但未說明「$x \neq a$」，且有 33%的學生在函數極限的精確定義中未注意到$|x-a|$必須＞0，顯示許多學生不太了解「當我們在考慮$\lim_{x \to a} f(x)$時並不考慮函數f在$x=a$時函數值$f(x)$的行為表現」，因而對極限值與函數值的關係產生混淆。此結果較少在文獻中發現。

3.在描述函數極限的直觀意義時有 25%的學生認為極限值等於函數值；也有 10%的學生縱使已經能由圖 4 的函數圖形觀察出函數在$x=-2$的左極限與右極限，卻還是將函數值當作極限值；有 38%的學生認為「若函數在某個點的極限存在則此極限就會等於函數在該點的函數值」。本研究的受試學生認為「函數在某個點的極限一定會等於函數在該點的函數值」之錯誤認知與 Denbel（2014）、Güçler（2013）、Odafe（2012）的研究結果雷同。

4.有 20%的學生認為「函數在每個有定義的點之極限一定會存在」；有22%的學生認為函數在沒有定義或不連續的點之極限不存在；而有 27%的學生認為「函數在未定義的點之極限不存在」。此錯誤認知與 Denbel（2014）、Güçler（2013）、Odafe（2012）的研究結果雷同。

5.有 31%的學生認為「若函數在某個點的極限存在則函數在該點連續」。此錯誤認知與 Denbel（2014）的研究結果雷同。

6.有 8 成以上的受試學生在使用積的極限律計算極限時，未能理解其使用前提；有 9 成的受試學生在使用商的極限律計算極限時，未能理解其使用前提。此結果與華德林與邱進凌（2009）之研究發現「學生在使用極限律計算極限時常忽視極限運算的法則」類似。

（三）在函數極限概念的解題困境

1.有一半的學生無法用文字正確描述函數極限的直觀意義。

2.有 23%的學生無法從函數圖形中觀察出當x分別從-2的左邊與右邊充分靠近-2時，$f(x)$的值會非常接近多少。

3.有一半的學生無法正確判斷函數極限的精確定義之敘述，甚至有 35%的學生完全不了解函數極限的精確定義及ε與δ在定義中的意義，無法對所給定的ε值求出適當的δ值；有 6 成以上的學生完全無法利用函數極限的精確定義來證明線型函數的極限。此結果與 Fernández（2004）、Tall（1992）的部分研究結果雷同。

二、學生在計算函數極限的表現

以下分別就第 5、6、8 題計算函數極限的作答結果來分析受試學生的解題類型，並歸納學生在解決此類問題的過程中所呈現的錯誤認知與解題困境。

（一）各題之解題類型

1.使用極限律計算函數的極限

第 5 題第(1)小題是請學生判斷極限$\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{2x^2+5x+7}{3x-2}}$是否存在，若存在，請計算其極限值，若不存在，請說明理由。試題的主要目的是要檢視學生是否能使用極限律來計算極限，由於試題較簡單，$93\%(103/111)$的學生均能正確解題，但其中只有 5 位學生是依照極限律逐步來解題，另外的 98 位學生都是採用直接代入性質，逐項將x代入2，計算出正確答案，但其中 10 位學生已經將x代入2之後，仍然保留極限的運算符號，即$\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{2x^2+5x+7}{3x-2}}=\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{8+10+7}{6-2}}$，甚至有 2 位學生竟然寫成$\sqrt{\frac{8+10+7}{6-2}}=\pm\frac{5}{2}$。另外$6\%(7/111)$的學生雖然了解計算的方法，但是計算錯誤，如$\lim_{x\to 2}(3x-2)=2$或忘記開平方根。更特別的是，學生 S341 竟然使用商的微分公式與連鎖律來計算此極限。

2.使用直接代入性質計算函數的極限

第 5 題第(2)小題是請學生判斷極限$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-4x-5}{x-1}$是否存在，若存在，請計算其極限值，若不存在，請說明理由。試題的主要目的是要檢視學生是否能使用直接代入性質來計算函數的極限，即$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$，由於試題較簡單，$95\%(105/111)$的學生均能正確使用直接代入性質來解題，由於此函數的分子部分恰可因式分解，故其中有$38\%(42/111)$的學生先將分子因式分解後再使用直接代入性質來解題，能正確解題的學生中有 5 人在將x代入5之後仍保留極限的運算符號，而有 3 人在因式分解過程中遺漏了極限的運算符號，另外有$3\%(3/111)$的學生由於因式分解錯誤而導致結果錯誤，學生 S341 還是如同第(1)小題，使用商的微分公式來計算此極限。

3.將原函數化簡、因式分解、約分再使用直接代入性質來計算函數的極限

第 5 題第(3)小題是請學生判斷極限$\lim_{h\to 0}\frac{(3-h)^2-9}{h}$是否存在，若存在，請計算其極限值，若不存在，請說明理由。試題的主要目的是要檢視學生是否能將原函數$f(x)$化簡、因式分解、約分成$g(x)$，再使用直接代入性質來計算極限，即$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=g(a)$，其中$f(x)=g(x),\forall x\neq a$。受試學生的解題類型如表 8 所示。

表 8

透過化簡、因式分解、約分計算極限$\lim_{h\to 0}\frac{(3-h)^2-9}{h}$之解題類型

類別	解題內容與說明	百分比（人數／總人數）
1	在計算極限過程中將原函數展開並化簡、因式分解、約分，再使用直接代入性質正確計算出極限值。	68%(75/111)
2	在計算極限過程中將原函數因式分解，再化簡、約分，再使用直接代入性質正確計算出極限。	23%(26/111)
3	使用羅必達法則正確解題。	3%(3/111)
4	知道解題的方法，但化簡函數的計算過程中錯誤而導致結果錯誤。例如，約分錯誤或平方項展開錯誤。	3%(3/111)
5	完全不知道如何解題。	4%(4/111)

由以上之分析結果顯示，由於試題較簡單，總共有94%(104/111)的學生能正確解題，但其中有 18 位學生在化簡函數的計算過程中遺漏了極限的運算符號，

即 $\lim_{h\to 0}\frac{(3-h)^2-9}{h}=\frac{(3-h-3)(3-h+3)}{h}=\frac{-h(6-h)}{h}=-6+h=-6$。

4.將原函數有理化根式、因式分解、約分再使用直接代入性質來計算函數的極限

第 5 題第(4)小題是請學生判斷極限$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$是否存在，若存在，請計算其極限值，若不存在，請說明理由。試題的主要目的是要檢視學生是否能察覺原函數無法使用直接代入性質來計算極限，且函數內含有根式，進而能將原函數有理化根式、因式分解、約分，再使用直接代入性質來計算極限。受試學生的解題類型如表 9 所示。

5.藉由計算左極限與右極限來判斷函數極限是否存在

第 5 題第(5)小題是請學生判斷極限$\lim_{x\to 3}\frac{|x-3|}{x-3}$是否存在，若存在，請計算其極限值，若不存在，請說明理由。試題的主要目的是要檢視學生是否能藉由計算左極限與右極限來解決絕對值的極限問題並判斷極限是否存在。受試學生的解題類型如表 10 所示。

表 9

透過有理化根式計算函數極限$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$之解題類型

類別	解題內容與說明	百分比（人數／總人數）
1	能將原函數有理化根式、因式分解、約分，再使用直接代入性質正確計算出極限值，但其中有 11 人在化簡函數的計算過程中遺漏了極限的運算符號。	52%(58/111)
2	知道要將原函數有理化根式，但在有理化根式的化簡過程計算錯誤，例如，$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+2}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$ 。	6%(7/111)
3	使用各種錯誤的概念來解題，例如，有 10 位學生認為左極限與右極限不相等，卻不會算左極限與右極限，只寫$\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}\neq\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$，故極限不存在；也有 6 位學生誤用商的極限律，寫成$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^2+5}-3}{\lim\limits_{x\to 2}(x-2)}=\frac{0}{0}=0$。	21%(23/111)
4	完全空白無法作答。	21%(23/111)

表 10

透過計算左極限與右極限來判斷函數極限$\lim\limits_{x\to 3}\frac{\|x-3\|}{x-3}$之解題類型

類別	解題內容與說明	百分比（人數／總人數）
1	能分別正確計算左極限與右極限，由左極限與右極限不相等而判斷此極限值不存在，但其中大部分學生計算左極限與右極限的過程太過簡略，例如，$\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{\|x-3\|}{x-3}=-1$ and $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{\|x-3\|}{x-3}=1$ $\because\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{\|x-3\|}{x-3}=-1\neq 1=\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{\|x-3\|}{x-3}$ $\therefore\lim\limits_{x\to 3}\frac{\|x-3\|}{x-3}$ does not exist	70%(78/111)
2	知道要分別計算左極限與右極限，由左極限與右極限不相等來判斷此極限值不存在，但無法正確計算左極限與右極限。	8%(9/111)
3	不知道要分別計算左極限與右極限，再由左極限與右極限不相等來判斷此極限值不存在，使用錯誤的方法去掉絕對值而得出$\|x-3\|=x-3$或$\|x-3\|=-(x-3)$，致使答案錯誤，甚至再將x用 3 代入得出$\frac{0}{0}=0$。	12%(13/111)
4	認為將x用 3 代入後分母為 0 或函數含有絕對值，故極限不存在。	5%(6/111)
5	完全空白無法作答。	5%(6/111)

6.使用夾擠定理來計算函數的極限

第 6 題是請學生判斷極限$\lim_{x\to 0} x^2\left[1+3\sin^2\left(\frac{2\pi}{x}\right)\right]$是否存在，若存在，請計算其極限值；若不存在，請說明理由。試題的主要目的是要檢視學生是否能察覺此函數具有週期性且有界並使用夾擠定理來計算極限，為了提示學生$1+3\sin^2\left(\frac{2\pi}{x}\right), \forall x \neq 0$是一個有界函數，故設計第(1)小題，請學生在已知$-1 \le \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right) \le 1, \forall x \neq 0$的條件下證明$1 \le 1+3\sin^2\left(\frac{2\pi}{x}\right) \le 4, \forall x \neq 0$，第(2)小題再請學生計算$\lim_{x\to 0} x^2\left[1+3\sin^2\left(\frac{2\pi}{x}\right)\right]$之值。

（1）已知$-1 \le \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right) \le 1, \forall x \neq 0$ 證明 $1 \le 1+3\sin^2\left(\frac{2\pi}{x}\right) \le 4, \forall x \neq 0$

受試學生對此小題的解題類型如表 11 所示。

表 11

證明$1 \le 1+3\sin^2\left(\frac{2\pi}{x}\right) \le 4, \forall x \neq 0$之解題類型

類別	解題內容與說明	百分比（人數／總人數）
1	能正確使用不等式的運算性質，由$-1 \le \sin\frac{2\pi}{x} \le 1, \forall x \neq 0$ 得出$0 \le \sin^2\left(\frac{2\pi}{x}\right) \le 1, \forall x \neq 0$， 進而證明出$1 \le 1+3\sin^2\left(\frac{2\pi}{x}\right) \le 4, \forall x \neq 0$的結果。	48%(53/111)
2	雖然能正確使用不等式的運算性質，卻由欲證明之結果 $1 \le 1+3\sin^2\left(\frac{2\pi}{x}\right) \le 4, \forall x \neq 0$倒回去證明已知條件 $-1 \le \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right) \le 1, \forall x \neq 0$或$0 \le \sin^2\left(\frac{2\pi}{x}\right) \le 1, \forall x \neq 0$。	14%(16/111)
3	由於$\sin\left(\frac{2\pi}{x}\right)$的上下界介於正負數之間， 而無法由$\sin\left(\frac{2\pi}{x}\right)$ 的上下界正確推出$\sin^2\left(\frac{2\pi}{x}\right)$的上下界， 得出$-1 \le \sin^2\left(\frac{2\pi}{x}\right) \le 1$、$1 \le \sin^2\left(\frac{2\pi}{x}\right) \le 1$ 之錯誤結果。	13%(14/111)
4	完全空白無法作答。	25%(28/111)

（2）使用夾擠定理來計算函數的極限

受試學生判斷或計算$\lim_{x\to 0} x^2\left[1+3\sin^2\left(\frac{2\pi}{x}\right)\right]$的解題類型如表 12 所示。

表 12

使用夾擠定理來計算函數極限$\lim\limits_{x\to 0} x^2\left[1+3\sin^2\left(\frac{2\pi}{x}\right)\right]$之解題類型

類別	解題內容與說明	百分比（人數／總人數）
1	能在已知$1 \le 1+3\sin^2\left(\frac{2\pi}{x}\right) \le 4, \forall x \ne 0$的條件下，使用夾擠定理正確計算極限$\lim\limits_{x\to 0} x^2\left[1+3\sin^2\left(\frac{2\pi}{x}\right)\right]$之值。	16%(18/111)
2	誤用極限律，且誤以為「0乘以任何極限都是0」，無視於此極限是否存在，寫成$\lim\limits_{x\to 0} x^2\left[1+3\sin^2\left(\frac{2\pi}{x}\right)\right] = \lim\limits_{x\to 0} x^2 \cdot \lim\limits_{x\to 0}\left[1+3\sin^2\left(\frac{2\pi}{x}\right)\right]$ $= 0 \cdot \lim\limits_{x\to 0}\left[1+3\sin^2\left(\frac{2\pi}{x}\right)\right] = 0$。	23%(26/111)
3	誤以為「$\lim\limits_{x\to 0}\sin^2\left(\frac{2\pi}{x}\right)$不存在則$\lim\limits_{x\to 0} x^2\left[1+3\sin^2\left(\frac{2\pi}{x}\right)\right]$就不存在」。	12%(13/111)
4	利用左極限與右極限是否相等來判斷此極限是否存在，卻未能算出左極限與右極限。	3%(3/111)
5	雖能使用夾擠定理來解題，但無視於第(1)小題的提示，因推出$\sin^2\left(\frac{2\pi}{x}\right)$錯誤的上下界，例如：$-1 \le \sin^2\left(\frac{2\pi}{x}\right) \le 1$、$1 \le \lim\limits_{x\to 0}\sin^2\left(\frac{2\pi}{x}\right) \le 1$，而導致其結果錯誤。	3%(3/111)
6	完全空白無法作答。	43%(48/111)

7.利用羅必達法則來計算函數極限

第 8 題的目的在檢視學生是否能正確判斷所求的極限為不確定型式（即函數的分子與分母之極限同時為 0 或同時為±∞）並能正確使用羅必達法則來計算極限，因此設計 3 個小題來測驗，第(1)小題與自然對數有關且為$\frac{\infty}{\infty}$之不確定型式，第(3)小題與自然指數有關且為$\frac{0}{0}$之不確定型式，第(2)小題並非不確定型式，檢視學生是否未經判斷就濫用羅必達法則來計算極限，學生在各小題的解題類型分別說明如下。

（1）判斷或計算$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

第(1)小題請學生判斷極限$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$是否存在，若存在，請計算其極限值；若不存在，請說明理由。此小題為$\frac{\infty}{\infty}$之不確定型式，可以使用羅必達法則計算極限值，受試學生對此小題的解題類型如表 13 所示。

（2）判斷或計算$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-2x+3}{x^2}$

第(2)小題請學生判斷極限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-2x+3}{x^2}$是否存在，若存在，請計算其極限值；若不存在，請說明理由。此小題的目的是要檢視學生是否能理解使用羅必達法則來計算極限的前提，因為此函

數的分母之極限為 0 但分子之極限為 4，並未符合其使用前提。受試學生對此小題的解題類型如表 14 所示。

（3）判斷或計算$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-3x-1}{x^2}$

第(3)小題請學生判斷極限$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-3x-1}{x^2}$是否存在，若存在，請計算其極限值；若不存在，請說明理由。此小題為$\frac{0}{0}$之不確定型式，可重複使用兩次羅必達法則來計算極限值，受試學生對此小題的解題類型如表 15 所示。

表 13

判斷或計算$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$之解題類型

類別	解題內容與說明	百分比（人數／總人數）
1	48 人能正確判斷此極限為不確定型式，並能正確使用羅必達法則計算出極限值，其中有 18 人未化簡微分後的分式，而再使用一次羅必達法則來計算極限$\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x}$，其中有 3 位學生在計算過程中遺漏了極限的運算符號。	43%(48/111)
2	能正確判斷此極限為不確定型式且能正確使用羅必達法則來計算極限，8 人寫到$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\overset{H}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x}$就不會再化簡而直接寫出正確或錯誤的答案，22 人寫到$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$就不會整理分式或分式整理錯誤。	27%(30/111)
3	能正確判斷此極限為不確定型式，並能正確使用羅必達法則來計算極限，但微分運算錯誤，例如，$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\ln x}\right)=\frac{1}{\frac{d}{dx}\ln x}$、$\frac{d}{dx}\sqrt{x}=\sqrt{x^{\frac{1}{2}}}$，導致結果錯誤。	4%(4/111)
4	能正確判斷此極限為不確定型式且可以使用羅必達法則，但使用方法不正確，例如，將整個分式微分，或將分子與分母各自微分後相乘。	3%(3/111)
5	未能判斷此極限為不確定型式，也不知道可以使用羅必達法則來計算極限，試圖使用一些奇怪的錯誤方法來解題，例如：變數變換成更複雜的不確定型式$0\cdot\infty$、有理化根式、誤以為「當分子小於分母時分式的極限為0」、畫圖判斷但是圖畫錯。	5%(6/111)
6	完全空白無法作答。	18%(20/111)

表 14

判斷或計算$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-2x+3}{x^2}$之解題類型

類別	解題內容與說明	百分比（人數／總人數）
1	能正確判斷分子的極限為 4 且分母的極限為 0，並正確判斷此極限不存在，並未濫用羅必達法則來計算極限。	44%(49/111)
2	能正確判斷分子的極限為 4 且分母的極限為 0，並未濫用羅必達法則來計算極限，但未能正確表示此極限之結果為∞不存在，例如，$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-2x+3}{x^2}=\frac{4}{0}$。	6%(7/111)
3	未判斷此極限是否為不確定形式，即濫用羅必達法則來計算極限，例如，$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-2x+3}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-2}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$。	13%(14/111)
4	使用一些錯誤的概念來判斷此極限不存在，例如，分子的極限≠分母的極限、左極限≠右極限、極限值≠函數值、只判斷分母的極限為 0 但未判斷分子的極限值等。	13%(14/111)
5	完全空白無法作答。	24%(27/111)

表 15

判斷或計算$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-3x-1}{x^2}$之解題類型

類別	解題內容與說明	百分比（人數／總人數）
1	能正確判斷此極限為不確定型式，並能正確重複使用羅必達法則來計算極限，求得正確的極限為$\frac{9}{2}$。	68%(76/111)
2	能正確判斷此極限為不確定型式，並能正確使用一次羅必達法則來計算極限，不了解可以再重覆使用一次羅必達法則來計算極限，接著就直接將x帶入 0，認為極限為 0 或不存在。	6%(7/111)
3	能正確判斷此極限為不確定型式，並能使用羅必達法則來計算極限，但微分運算錯誤，例如，誤用冪函數的微分公式來做自然指數函數的微分運算、微分時忘記使用連鎖律，或是最後將x帶入 0 時計算錯誤，導致結果錯誤。	9%(10/111)
4	完全空白無法作答。	16%(18/111)

綜觀第(1)與(3)小題的分析結果顯示，大約有 7 成的學生能使用羅必達法則來計算不確定型式的極限問題，但其中有將近 3 成的學生在計算極限的過程中遇到繁分式或含有根式的分式時便無法正確地整理化簡。

（二）對計算函數極限的錯誤認知

1.有 23%的學生只看到其中一個函數的極限為 0 便濫用積的極限律計算極限，認為 0 乘以任何極限都是 0，並不管另一個函數的極限是否存在；有 13%的學生在計算分式函數的極限時，會濫用羅必達法則來計算極限，而不管該題目是否為$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$之不確定型式。可見不少學生在使用極限計算法則時並未注意使用的前提。此結果與華德林與邱進淩（2009）之研究發現「學生在使用極限律計算極限時常忽視極限運算的法則」類似。

2.在計算極限的過程中，部分學生在代入各項的極限值後，卻仍然保留極限的運算符號；而另一部分學生則在化簡函數的過程中即遺漏了極限的運算符號。由此可見，部分學生未能充分理解極限的運算符號之意義及區別「函數取極限」與運算後的「極限值」之差異，此結果較少在文獻中發現。

（三）在計算函數極限的困境

1.在計算含有根式的函數之極限時，有 4 成的受試學生完全不了解必須有理化根式而無法解題，有少數學生雖然知道要有理化根式，卻容易在有理化根式的運算過程計算錯誤。

2.在計算含有絕對值的函數之極限時，有 22%的學生完全不了解為了去掉絕對值必須先分別考慮左極限與右極限，而無法解題，其中 12%的學生未考慮當$x \to 3$時x可能大於3也可能小於3，而去掉絕對值得出$|x-3| = x-3$或$|x-3| = -(x-3)$的錯誤結果。

3.有一半的受試學生未能正確使用不等式的運算性質，由$-1 \le \sin\frac{2\pi}{x} \le 1, \forall x \neq 0$得出$0 \le \sin^2\left(\frac{2\pi}{x}\right) \le 1, \forall x \neq 0$，進而證明出$1 \le 1 + 3\sin^2\left(\frac{2\pi}{x}\right) \le 4, \forall x \neq 0$的結果，其中甚至有許多學生無法由「$-1 \le \sin\frac{2\pi}{x} \le 1, \forall x \neq 0$」正確推出「$0 \le \sin^2\left(\frac{2\pi}{x}\right) \le 1,\ \forall x \neq 0$」，有人直接將不等式的每一項都取平方，忘記負數取平方後會大於或等於 0，也有人試圖使用一些方法，但仍然無法找出$\sin^2\left(\frac{2\pi}{x}\right)$的範圍；值得關注的是，竟然有 25%的學生完全空白無法作答。

4. 8 成以上的學生遇到$\lim_{x\to 0}\sin^2\left(\frac{2\pi}{x}\right)$不存在但$1 + 3\sin^2\left(\frac{2\pi}{x}\right), \forall x \neq 0$是有界函數時，縱使已經提示$1 \le 1 + 3\sin^2\left(\frac{2\pi}{x}\right) \le 4, \forall x \neq 0$，仍然無法察覺到此函數具有「有界函數」的特性而未了解可以使用夾擠定理來計算極限$\lim_{x\to 0} x^2\left[1 + 3\sin^2\left(\frac{2\pi}{x}\right)\right]$，甚至幾乎一半的學生對於計算此極限完全沒有任何想法或概念。

5.有$27\%(30/111)$的學生在計算極限的過程中遇到繁分式$\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$或含有根式的分式$\frac{2\sqrt{x}}{x}$時無法正確地整理化簡。

6.有將近 3 成的受試學生無法正確使用羅必達法則來計算不確定型式的極限。

7.有$50\%(55/111)$的受試學生無法先分別判斷分子與分母的極限再正確判斷極限$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-2x+3}{x^2}$為$\infty$不存在。

8.有少數學生會誤用冪函數的微分公式來做自然指數函數的微分運算、微分時忘記使用連鎖律，此結果與劉湘川等人（2010）、Muzangwa 與 Chifamba（2012）的研究結果雷同。

三、研究結果在教學上的應用

本研究依據學生在「函數極限」應達成的能力指標設計試題，詳細分析受試學生的解題類型，再歸納出學生在函數極限概念與計算函數極限的錯誤認知與解題困境，其中部分錯誤認知與相關文獻雷同，但許多解題困境則較少在文獻中發現。應用數學系的學生對函數極限存在許多錯誤認知與解題困境，其他非數學相關學系的學生可能也存在類似的問題，因此，建議微積分教師可以參酌本研究的調查分析結果設計教材、教學活動與習題演練，應用在實務教學上，以改善學習成效，具體做法建議如下。

（一）了解學生的錯誤認知與解題困境

參酌本研究的解題類型分析結果、錯誤認知與解題困境，了解學生在解決函數極限的概念理解與程序執行之相關問題過程中所呈現的錯誤認知與解題困境。

（二）課堂上加強釐清錯誤認知並統整相關概念

由於學生在學習過程中缺乏對概念進行統整，使得片段的概念容易產生錯誤認知，教師可以在課堂上加強講解本研究所發現的錯誤認知，並藉由提問與討論的方式，引導學生思考判斷這些容易產生錯誤的概念，幫助學生釐清及統整函數極限的各項概念。例如：詢問學生「若函數在a點沒有定義則此函數在a點的極限存不存在？」,教師視學生的回答狀況再舉出存在與不存在的例子來佐證，讓學生理解「若函數在a點沒有定義則此函數在a點的極限可能存在也可能不存在」及「函數在a點的極限存不存在與此函數在a點有沒有定義無關」。在教完函數極限的基本概念後，教師可以提供如本文圖 1 的概念圖給學生參閱，幫助學生釐清及統整函數極限的基本概念。

（三）課堂上多引導計算函數極限的思考並統整計算方法

本研究結果顯示，當函數含有根式、絕對值或有界的週期函數時，許多學生對計算函數的極限有困難，甚至完全沒有解題的想法。學生雖學過各種計算函數極限的方法，卻因為缺乏對計算方法的統整，而未能熟悉每一種計算方法的使用條件，致使看到題目時不容易想到計算的方法。教師在課堂講解例題時，可以多引導學生解題的思考，統整各種計算函數極限的方法。尤其在講解計算含有根式、絕對值或有界週期的函數極限例題前先詢問學生前面學過哪些計算極限的方法？引導學生觀察函數的特性，判斷可不可以使用以前學過的方法？會有什麼問題？如何解決？例如：計算$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$時，詢問學生：此題可不可以使用直接代入性質？為什麼？什

麼條件下才可使用直接代入性質？怎麼辦？函數有何特色？如何有理化根式？在教完各種計算函數極限的方法後，教師可以提供如本文圖 2 的概念圖給學生參閱，幫助學生統整各種計算函數極限的方法。

（四）設計習題與課後演練

教師可以針對本研究所發現的錯誤認知與解題困境設計習題給學生演練，以幫助學生釐清錯誤認知並克服解題困境。習題的型式不侷限於計算題與證明題，除了課本習題之外，還可以設計簡答題、填充題、是非題、改錯題等，以檢視並引導學生釐清錯誤認知。例如：學生對函數極限的直觀意義與精確意義不太了解，無法釐清極限值、函數值與連續之間的關係，教師可以參酌本研究的試題 1 設計一些實例引導學生透過文字描述或圖形觀察來理解函數極限的意義，以釐清學生的錯誤認知。此外，學生未能釐清使用極限計算法則的前提，而濫用極限律與羅必達法則來計算極限，教師可以參酌本研究的試題 4 設計一些學生常寫錯的算式或不符合使用某個極限計算法則的題目，讓學生來判斷其錯誤之處與原因，另參酌試題 8，將不同計算方法的題目安排在一起讓學生演練，以檢視學生是否能理解使用極限計算法則的前提。

伍、結論與建議

綜合各項研究資料之分析結果，提出下列之結論與建議。

一、結論

（一）學生對描述函數極限的定義與證明極限有困難

有一半的學生無法用文字正確描述函數極限的直觀意義，有 23%的學生無法從函數圖形中觀察出當x分別從a的左邊與右邊充分靠近a時，函數值$f(x)$的趨勢。也有一半的學生不了解函數極限的精確定義及ε與δ在定義中的意義，無法對所給定的ε值求出適當的δ值，甚至 6 成以上的學生無法利用極限的精確定義來證明線型函數的極限。

（二）學生未能理解函數極限的運算符號與使用極限計算法則的前提

部分學生在計算函數的極限時，經常會遺漏或多寫極限的運算符號，未能充分理解極限的運算符號之意義及區別「函數取極限」與運算後的「極限值」之差異。

雖然大部分的學生都能使用極限計算法則來計算極限，但學生在使用極限計算法則時，因未能理解「積的極限律、商的極限律與羅必達法則之使用前提」，而不會先確認該題目是否符合使用極限計算法則的前提，便濫用極限律與羅必達法則來計算極限。

（三）學生無法釐清極限值、函數值與連續之間的關係

由於學生並不了解「當我們考慮$\lim_{x\to a} f(x)$時並不考慮函數f在$x=a$時函數值$f(x)$的行為表現」，而誤認為函數在某個點的極限一定會等於函數在該點的函數值、函數在每個有定義的點之極限一定存在、函數在未定義的點之極限不存在、若函數在某個點的極限存在則函數在該點連續、函數在不連續的點之極限不存在，顯示學生無法釐清極限值、函數值與連續之間的關係。

（四）學生對計算含有根式、絕對值或有界週期的函數之極限有困難

學生在計算含有根式的函數之極限時，不了解必須有理化根式而無法解題；在計算含有絕對值的函數之極限時，不了解必須先分別考慮左極限與右極限而無法解題；縱使已經提示函數的範圍，仍然無法使用夾擠定理來計算有界函數的極限。這些結果顯示，學生無法統整不同特性函數的極限之計算方法。

學生無法由「$-1 \le \sin\frac{2\pi}{x} \le 1, \forall x \ne 0$」正確推出「$0 \le \sin^2\left(\frac{2\pi}{x}\right) \le 1, \forall x \ne 0$」；對繁分式$\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$或含有根式的分式$\frac{2\sqrt{x}}{x}$之化簡有困難；誤用冪函數的微分公式來做自然指數函數的微分運算、微分時忘記使用連鎖律。這些結果顯示，學生對高中數學及微分的基本運算不夠精熟。

二、建議

（一）在函數極限教學方面

建議微積分教師可以參酌本研究對函數極限的概念與計算之分析結果，了解學生的錯誤認知與解題困境，在課堂上加強釐清容易產生錯誤的概念並統整相關概念，在講解計算函數極限的例題時多引導學生觀察函數的特性、解題的思考並統整計算方法，教師可以善用本文的概念圖幫助學生統整相關概念與計算方法。除了勾選課本習題之外，可以針對學生的錯誤認知設計習題提供學生演練，習題的型式不侷限於計算題與證明題，可以設計簡答題、填充題、是非題、改錯題等，以檢視並引導學生釐清錯誤認知，具體的做法請參閱前節「研究結果在教學上的應用」。此外，在教授極限精確定義或極限證明時，可以參酌 Swinyard 與 Larsen（2012）所提出的極限生成分解之教學步驟，透過圖形視覺化的方式幫助學生從y的觀點切入以理解函數極限的精確定義。

（二）在函數極限教學研究方面

未來可以參酌本研究的分析結果與前節「研究結果在教學上的應用」規劃教材、教學活動、習題，設計函數極限教學行動方案，以行動研究的方式實踐於教學現場，蒐集各項回饋資料分析學生的學習成效。若能找到對照組，則可以再比較實驗組與對照組的考試成績是否具有顯著差異。也可以對重修班學生進行前測與後測，檢視教學行動方案的學習成效。

（三）在極限研究方面

本研究因限於測驗時間，試題未納入單邊極限與無窮極限的概念，未來的研究可以加入這部分試題，可以將概念與計算試題分兩次測驗。此外，未來可以將修訂後的試題對理工學院非數學系或管理學院的微積分學生進行測驗，探討非數學相關學系學生在函數極限的錯誤認知與解題困境，甚至比較不同背景學生的表現。

當我們在判斷無窮數列$\{a_n\}$及無窮級數$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$是否收斂時，必須藉由計算函數極限$\lim_{x\to\infty} f(x)$的舊經驗來計算數列極限$\lim_{n\to\infty} a_n$及級數的首n項和s_n之極限$\lim_{n\to\infty} s_n$是否存在，才能判斷無窮數列$\{a_n\}$及無窮級數$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收斂或發散。函數極限、數列極限與無窮數列收斂、首n項和的極限與無窮級數收斂之間的概念是息息相關的，由於學生對函數極限存在許多錯誤認知與解題困境，未來的研究可以再探討學生在判斷無窮數列收斂、無窮級數收斂及泰勒級數收斂到原函數的錯誤認知與解題困境。

誌謝

本研究為科技部專題研究計畫之成果，感謝科技部提供研究經費（計畫編號：MOST 106-2511-S-259-006 -）使得本研究得以順利完成，感謝三位施測班級的任課教師提供施測機會，並感謝審查委員及編輯委員提供寶貴的修訂建議。

參考文獻

教育部（2013）。**普通高級中學課程綱要**。臺北：作者。【Taiwan Ministry of Education. (2013). *Curriculum Guidelines of General Senior High School.* Taipei: Author. (in Chinese)】

華德林、邱進凌（2009）。極限問題錯解評析。**重慶科技學院學報（自然科學版）**，**11**（3），173–175。【Hua, De-Lin, & Qiu, Jin-Ling (2009). Comment on wrong answer to limit questions. *Journal of Chongqing University of Science and Technology (Natural Sciences Edition)*, *11*(3), 173–175. (in Chinese)】

劉湘川、白宗恩、鄭俊彥、黃玉臺、謝俊逸、陳建憲、…、劉育隆（2010）。微分基本公式之錯誤類型。**測驗統計年刊**，**18**（2），35–49。doi: 10.6773/JRMS.201012.0035【Liu, Hsiang-Chuan, Pai, Tsung-En, Cheng, Chun-Yen, Huang, Yu-Tai, Hsieh, Chun-Yi, Chen, Jhien-Shien, … Liu, Yu-Lung (2010). The error type of basic differential formula. *Journal of Educational Measurement and Statistics*, *18*(2), 35–49. doi: 10.6773/JRMS.201012.0035 (in Chinese)】

謝哲仁、李慶志（2012）。數學極限概念之動態表徵設計。**理工研究國際期刊**，**2**（3）7–17。doi: 10.6159/IJSE.2012.(2-3).02【Hsieh, Che-Jen, & Li, Ching-Chih (2012). The dynamic visualized computer design for learning the limit concept. *International Journal of Science and Engineering*, *2*(3), 7–17. doi: 10.6159/IJSE.2012.(2-3).02 (in Chinese)】

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*(2), 167–192. doi:10.1016/S0732-3123(96)90015-2

Denbel, D. G. (2014). Students' misconceptions of the limit concept in a first calculus course. *Journal of Education and Practice*, *5*(34), 24–40.

Fernández, E. (2004). The students' take on the epsilon-delta definition of a limit. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, *14*(1), 43–54. doi: 10.1080/10511970408984076

Fernández-Plaza, J. A., & Simpson, A. (2016). Three concepts or one? Students' understanding of basic limit concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *93*(3), 315–332. doi: 10.1007/s10649-016-9707-6

Güçler, B. (2013). Examining the discourse on the limit concept in a beginning-level calculus classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(3), 439–453. doi: 10.1007/s10649-012-9438-2

Juter, K. (2005). Limits of functions – How do students handle them? *Pythagoras*, *61*, 11–20. doi: 10.4102/pythagoras.v0i61.117

Keene, K. A., Hall, W. & Duca, A. (2014). Sequence limits in calculus: Using design research and building on intuition to support instruction. *ZDM Mathematics Education*, *46*(4), 561–574. doi: 10.1007/s11858-014-0597-8

Klymchuk, S., Zverkova, T., Gruenwald, N., & Sauerbier, G. (2010). University students' difficulties in solving application problems in calculus: Student perspectives. *Mathematics Education Research Journal*, *22*(1), 81–91. doi:10.1007/BF03217567

Muzangwa, J., & Chifamba, P. (2012). Analysis of errors and misconceptions in the learning of calculus by undergraduate students. *Acta Didactica Napocensia*, *5*(2), 1–10.

Odafe, V. U. (2012). Pushing the limit: A class project. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, *22*(3), 214–227. doi: 10.1080/10511970.2010.499560

Seah, E. K. (2005). Analysis of students' difficulties in solving integration. *The Mathematics Educator*, *9*(1), 39–59.

Shipman, B. A. (2012). A comparative study of definitions on limit and continuity of functions. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, *22*(8), 609–633. doi: 10.1080/10511970.2011.630714

Stewart, J. (2016). *Calculus* (8th ed.). Belmont, CA: Brooks Cole.

Swinyard, C., & Larsen, S. (2012). Coming to understand the formal definition of limit: Insights gained from engaging students in reinvention. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(4), 465–493. doi: 10.5951/jresematheduc.43.4.0465

Szydlik, J. E. (2000). Mathematical beliefs and conceptual understanding of the limit of a function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(3), 258–276. doi: 10.2307/749807

Tall, D. (1992). Students' difficulties in calculus. In C. Gaulin, B. R. Hodgson, D. H. Wheeler & J. Egsgard (Eds.), *Proceedings of Seventh International Congress on Mathematical Education* (pp. 114–119). Québec, Canada: Université Laval.

張凌嘉（2021）。
學習興趣和自信對中年級學生數學成就成長率的影響。
臺灣數學教育期刊，**8**（2），77-106。
doi: 10.6278/tjme.202110_8(2).003

學習興趣和自信對中年級學生數學成就成長率的影響

張凌嘉
國立臺灣師範大學教育心理與輔導學系

我國學生數學成就好卻沒興趣也沒自信，是從國小中年級就已存在的發展趨勢嗎？本研究追蹤三、四年級 672 位學生於一個學年期間的學習興趣、學習自信和數學成就，應用階層線性模式（Hierarchical Linear Model, HLM）成長模型分析，兩個研究問題的結果顯示：（1）學習興趣、學習自信和數學成就有不同的成長曲線。學習興趣和學習自信呈現下滑趨勢，學習興趣的降幅大於學習自信，三年級的起始水準高於四年級，男生的學習自信起始水準高於女生。數學成就呈現上升趨勢，三年級和男生的增幅大於四年級和女生。（2）學習興趣和學習自信對數學成就成長率有不同程度的影響。以學習興趣為預測變項，三年級和女生的數學成就增幅大於四年級和男生，無論年級或性別，提高學習興趣可增進數學成就。以學習自信為預測變項，三年級和男生的數學成就增幅大於四年級和女生，無論年級或性別，提高學習自信可增進數學成就。以學習興趣和學習自信為預測變項，三年級和女生的數學成就增幅大於四年級和男生，但除三年級女生外數學成就皆呈現下滑趨勢，惟當男生提高學習興趣或學習自信，女生提高學習自信，皆能增進數學成就。最後，說明本研究對相關橫斷和縱貫性研究之貢獻，並提出中年級數學教育宜關注的三個面向與研究建議。

關鍵詞：階層線性成長模式、數學成就、學習自信、學習興趣、縱貫性研究

通訊作者：張凌嘉，e-mail：alcc@ntnu.edu.tw
收稿：2021 年 8 月 4 日；
接受刊登：2021 年 10 月 15 日。

Chang, L. C. (2021).
Learning interests and confidence on mathematics achievement growth in intermediate grades.
Taiwan Journal of Mathematics Education, *8*(2), 77-106.
doi: 10.6278/tjme.202110_8(2).003

Learning Interests and Confidence on Mathematics Achievement Growth in Intermediate Grades

Ling-Chia Chang
Department of Educational Psychology and Counseling, National Taiwan Normal University

In the "Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS)" Taiwanese students performed exceptionally, although they exhibited a less positive attitude and self-confidence about their mathematics learning. The study assessed 672 students from the third and fourth grades for their learning interests, learning confidence, and mathematics achievement longitudinally across three time-points within a school year. Hierarchical linear growth models were utilized to examine two research questions. The results indicated that (1) learning interests, learning confidence, and mathematics achievement all had unique developmental trajectories. While learning interests and confidence declined over time, the slope of learning interests was steeper. The average intercepts of learning interests and confidence of third-graders were higher than those of fourth-graders. The average intercept of learning confidence of boys was higher than that of girls. While mathematics achievement improved over time, the improvements were greater for third-graders and boys than for fourth-graders and girls. (2) The longitudinal effects of learning interests and confidence in mathematics achievement growth were varied. With learning interests as predictors, the increases in mathematics achievement were greater for third-graders and girls than for fourth-graders and boys; growth in learning interests was positively associated with growth in mathematics achievement without significant differences in grades and gender. With learning confidence as predictors, the increases in mathematics achievement were greater for third-graders and boys than for fourth-graders and girls; growth in learning confidence was positively associated with growth in mathematics achievement without significant differences in grades and gender. With learning interests and confidence as predictors, mathematics achievement declined over time. For third-graders and girls, the improvement in mathematics achievement was greater than for fourth-graders and boys. Growth in learning interests and confidence among boys as well as growth in learning confidence among girls were positively associated with growth in mathematics achievement. Conclusions and implications are discussed.

Keywords: hierarchical linear growth model, mathematics achievement, learning confidence, learning interests, longitudinal study

Corresponding author：Ling-Chia Chang，e-mail：alcc@ntnu.edu.tw
Received：4 August 2021;
Accepted：15 October 2021.

壹、緒論

近年各國日益重視數學情意教育，了解我國小學生的數學情意與認知發展狀況，有助及早培養學生的數學情意與能力。我國以國小學生為對象且以數學成就為評量內容之大型長期調查，除了各縣市的國小基本學力檢測，主要有二：「臺灣學生學習成就評量資料庫」（Taiwan Assessment of Student Achievement, TASA）和「國際數學與科學教育成就趨勢調查」（TIMSS）。TASA 的評量對象包含國小四、六年級，每三年施行一次，最近一次可釋出的是 2015 年度調查資料。TIMSS 自 2003 年開始以四、八年級學生為評量對象，評量架構參照各國課程主題，著重於評量認知領域的知識、應用和推理，每四年施行一次，最近一次釋出的是 TIMSS 2019 調查報告（陳冠銘、任宗浩，2018；教育部，2020）。我國參與的歷屆 TIMSS 調查結果中，四、八年級學生的數學成就皆表現優異且穩定，但是對數學的學習有較大疏離感，持續表現出不喜歡、沒自信、和認為不重要的學習態度，顯示我國的數學教育重認知而輕情意，是當前亟需面對的問題（張俊彥等人，2018；教育部，2020）。然而，八年級學生不喜歡學數學、對數學沒自信的比例遠大於四年級學生（曹博盛，2018；Mullis, Martin, Foy, Kelly, & Fishbein, 2020），較四年級學生獲得更多學者專家的關注與探討（余民寧、韓珮華，2009；李君柔、王美娟，2013；張芳全，2010；陳敏瑜、游錦雲，2013；劉春初、王澤宇、陳威仁，2019）。臺灣四年級學生於 TIMSS 2019 再次展現高數學成就時，相較排名第一的新加坡學生，低學習興趣和學習自信的人數比例仍居高不下（Mullis et al., 2020）。

許多成就動機相關理論，如自我決定論（self-determination theory）（Ryan & Deci, 2020）、情境式期望價值論（situated expectancy-value theory）（Eccles & Wigfield, 2020）、和社會認知論（social cognitive theory）（Bandura, 1986; Schunk & DiBenedetto, 2020），與相關的實徵研究均指出學習興趣和學習自信對成就表現具有正向影響。另一方面，雖然我國學生數學成就在歷屆 TIMSS 無顯著性別差異（林碧珍，2018；Mullis et al., 2020），仍有研究顯示我國學生數理學科的學習動機存有男生優勢（余民寧、翁雅芸、張靜軒，2018；張芳全，2010；龔心怡、李靜儀；2016），可能因此影響女生的數理表現和未來生涯發展選擇（Degol, Wang, Zhang, & Allerton, 2018; Dweck, 2007; Gaspard, Lauermann, Rose, Wigfield, & Eccles, 2020）。我國學生數學情意偏低卻有優異數學成就，是異於理論的特例，抑或呼應理論？增進數學情意，是否能提升數學成就的學習效率？數學情意與數學成就的發展是否存有性別差異？值得更多的研究與探討。

一、學習興趣、學習自信與數學成就的理論基礎

本研究的「學習興趣」和「學習自信」名詞採用自「國際數學與科學教育成就趨勢調查 2015

國家報告」（林碧珍，2018；張俊彥等人，2018）。根據 TIMSS 2015 的背景問卷架構，「學習興趣」以內在動機為主要核心，構念包含學習數學時的興趣和樂趣，而「學習自信」以自覺能力為主要核心，構念包含完成數學相關任務的自我效能以及自我概念（Hooper, Mullis, & Martin, 2013）。以下從自我決定論、情境式期望價值論、和社會認知論，簡要說明學習興趣和學習自信的意涵、相關因素及其影響。

學習興趣，意指學生對所學科目感到有趣和樂趣。興趣可分為因環境事件引起的情境興趣，以及長期發展而成的個人興趣（Hidi & Renninger, 2006）。根據自我決定論，內在動機有如個人行為的發動機，是為了自己而非外在驅力（如讚美、報酬或壓力等）來完成相關活動，可預測學生的投入行為、學習表現、成績與職業選擇（Deci & Ryan, 1985; Ryan & Deci, 2000, 2020）。已有研究發現學生的內在動機隨著學齡增長而下滑，其中可能的原因是學校未能提供學生自主、能力與關係等心理需求足夠的支持（Gnambs & Hanfstingl, 2016; Ryan & Deci, 2020）。然而，若學生處於能激發與滿足其自主、能力與關係等心理需求的環境，學生亦能內化外在驅力從而增進其成就表現（Deci & Moller, 2005; Hooper et al., 2013; Ryan & Deci, 2000）。情境式期望價值論則指出個人有主觀的任務價值，其中內在價值（又稱興趣價值）是個人完成任務時的樂趣，或預期從所選擇的目標任務獲得的樂趣，會影響成就相關的選擇與表現（Eccles & Wigfield, 2020）。

學習自信，意指學生知覺自己在所學科目的能力或表現。根據社會認知論，自我效能是對於自己有能力完成相關任務的信心或信念，屬於跟自己能力與經驗的比較參照，較著眼於未來的潛能，可預測學習表現、成績、問題解決、興趣和職業選擇，而且學生個人的自我效能、與行為（如學習成就）和環境（如教師教學）三者之間會交互影響（Bandura, 1986; Marsh et al., 2019; Pajares & Usher, 2008; Schunk & DiBenedetto, 2020）。自我概念是根據自我經驗或同儕表現進行評估，形成對自己個人屬性或能力的知覺；學生會透過內在參照（自己在不同學科的能力表現）和外在參照（和同儕比較同一學科的能力表現）形成自己的學科自我概念，較著眼於過去表現和既有經驗，而且自我概念與學業成就兩者交互影響，對相同領域有促進效果，對相異領域則有弱抑制效果（Marsh et al., 2019）。情境式期望價值論則指出個人能力的自我概念、自我基模、長短期目標、個人和社會認同等會影響成功期望和任務價值，從而影響成就相關的選擇與表現（Eccles & Wigfield, 2020）。

雖然上述成就動機相關理論的完整架構較為龐大，但是部份變項的概念是類似、共通的（Anderman, 2020），因此，在本研究中，學習興趣涵蓋了相關文獻指涉之內在動機、內在價值、興趣和樂趣等意涵，而學習自信涵蓋了自我效能和自我概念等意涵，以利進行探討。例如，以 15 歲學生為研究對象的國際學生能力評量計畫（Programme for International Student Assessment, PISA），其數學領域背景問卷變項中的「內在動機」等同為學習興趣，而「數學自我效能」和「數

學自我概念」則等同學習自信（Anderman, 2020; Lee & Stankov, 2018; Organisation for Economic Co-operation and Development, 2013）。

二、我國四年級學生在 TIMSS 的學習興趣、學習自信與數學成就表現

臺灣與新加坡、香港、韓國和日本等東亞五個地區國家連續穩居 TIMSS 2011、2015、2019 三屆四年級學生數學成就的國際排名前五名（林碧珍，2018; Mullis et al., 2020）。臺灣和新加坡四年級學生在三屆 12 年期間的數學成就分數皆持續提高，國際排名則維持分列第四和第一名。

從數學成就的性別差異來看，TIMSS 2015、2019 兩屆有近半數參與調查的國家四年級男生平均數學成就高於女生，不過臺灣學生的數學成就在近十多年來並沒有穩定且顯著的性別差異（林碧珍，2018; Mullis et al., 2020）。從學習興趣來看，兩屆國際整體平均有 46%和 45%的四年級學生非常喜歡學數學，19%和 20%的學生不喜歡學數學，臺灣平均有 23%和 22%的學生非常喜歡學數學，38%和 41%的學生不喜歡學數學，排名從倒數第二名變成最後一名，而且不喜歡學數學的比例持續增加，較國際平均和新加坡學生的比例多了 15～21%（林碧珍，2018; Mullis et al., 2020）。從學習自信來看，兩屆國際整體平均有 32%的四年級學生對數學非常有自信，23%的學生對數學沒有自信，臺灣維持 15%的學生對數學非常有自信，46%和 44%的學生對數學沒有自信，雖然排名略有進步，但非常有自信的學生比例仍較 2007 年少了 10%，沒有自信的學生比例亦較 2011 年多了 6%（林碧珍，2018；Mullis et al., 2020）。

新加坡四年級學生的數學成就、學習興趣和學習自信連續兩屆皆優於臺灣、香港、韓國和日本等地區國家的學生表現。劉春初等人（2019）分析臺灣與其他 20 個國家八年級學生於 TIMSS 2003 至 2011 等三屆的數學學習效率，以數學學習興趣、學習自信和學習評價等因素，評估學生數學成就的相對績效表現、透過教學相關制度與技術的革新效率表現，以及提升學生數學成就規模的效率表現，結果顯示新加坡和以色列等國的相關政策與具體作為是臺灣可參酌的標竿。亦即參照新加坡的學習表現，增進學生的學習興趣和學習自信，有助提升數學成就的學習效率。

三、影響數學成就的學習興趣、學習自信與性別之橫斷與縱貫研究

（一）橫斷性研究

Lee 與 Stankov（2018）統整 TIMSS 2003、2007 和 2011，以及 PISA 2003 和 2012 的歷屆資料，在 65 個非認知變項中以自我信念相關的變項，如 TIMSS 的學習自信、PISA 的自我效能、和教育期望，最能預測學生的數學成就。臺灣多個研究則一致發現學習自信和學習興趣對數學成就皆有不同程度的影響（佘民寧、韓珮華，2009；李君柔、王美娟，2013；高若喬，2021；張芳全，2010；陳敏瑜、游錦雲，2013），且臺灣學生的數學表現有性別差異（佘民寧等人，2018；張芳全，2010；陳敏瑜、游錦雲，2013）。

高若喬（2021）將 PISA 的基本素養應用於臺灣國小六年級學生，以四所國小 367 位學生為對象，分析國小高年級平面幾何素養的表現與影響因素，結果學生的數學素養表現沒有性別差異，數學自我效能直接正向預測數學素養表現，標準化係數為 .50，數學學習興趣與閱讀自我效能經由數學自我效能間接正向預測數學素養表現，數學學習興趣對數學素養表現具有 .32 的標準化總效果。學習投入、後設認知和自我調節學習等對數學素養表現則無顯著影響。

余民寧與韓珮華（2009）透過 TIMSS 2003 臺灣資料，將八年級學生知覺的課室活動區分為建構式教學與教師中心式教學，結果建構式教學直接正向預測學生的學習自信和數學有效性（價值），間接正向預測數學學習興趣和數學成就，而教師中心式教學直接正向預測數學成就，並經由學習自信間接正向預測學習興趣和數學有效性；學習興趣和學習自信分別對數學成就具有 .34 和 .28 的標準化總效果。顯示學生感受教師不同的教學方式，會對學生的學習興趣、學習自信和數學成就產生不同路徑的影響和效果。

李君柔與王美娟（2013）以 TIMSS 2007 臺灣資料分析八年級學生數學成就之影響因素，結果個人特質（成就目標、學習自信、學習興趣和價值）的影響力最大，家庭環境（圖書、設備資源和父母學歷）的影響力次之，教師教學（教學策略、家庭作業）與學校背景（校園安全、學校環境）的影響力最小；個人特質和家庭環境皆直接預測數學成就，達到 .57 和 .54 的標準化總效果，而教師教學與學校背景需透過學生個人特質間接預測數學成就。就個人特質的結果來說，八年級學生的成就目標越強，對數學越有自信，喜歡學數學，覺得數學有用、有價值，數學成就越好。

張芳全（2010）以 HLM 模型分析 TIMSS 2007 臺灣八年級學生數學成就之影響因素，考量學校平均和學生個人之父母親教育程度、自我期望、文化資本、回家作業、學習興趣、學習自信和性別後，學生的自我期望、文化資本、回家作業、學習興趣、學習自信正向影響數學成就，若學習興趣和學習自信增加一個單位，可提高數學成就 .11 和 .39 分，此外，女生的數學成就較男生高 .12 分。再分別以學習興趣和學習自信為依變項，考量學校平均之父母親教育程度、自我期望、文化資本、回家作業、學習自信或學習興趣，以及學生個人之性別、父母親教育程度後，若學習自信增加一個單位，可提高學習興趣 .76，反之，若學習興趣增加一個單位，可提高學習自信 .59，此外，男生的學習興趣和學習自信皆顯著較女生高 .29 和 .33。顯示學習興趣和學習自信越好，數學成就越高，而且男女生在學習興趣、學習自信和數學成就有不同的差異。

陳敏瑜與游錦雲（2013）以 TIMSS 2007 臺灣資料檢視學習自信、學習興趣和內在價值、以及實用價值對八年級學生數學成就之影響，結果學習自信和實用價值對數學成就的標準化係數為 .60 和 .09 ，但學習興趣和內在價值對數學成就未達顯著；若排除學習自信，學習興趣和內在價值對數學成就的標準化係數為 .45 和 .11。結構模型的路徑係數無性別差異，但在平均數

上，男生的學習自信、學習興趣和內在價值、以及實用價值皆高於女生，當男女生的學習自信、學習興趣和內在價值、以及實用價值程度相當時，女生的數學成就較好。

余民寧等人（2018）後設分析臺灣 1993 年到 2013 年間發表的 72 篇論文，檢驗臺灣學生在數學、科學、和電腦資訊等學科的學習動機、學習興趣與學習態度是否存在性別差異。結果在研究年代以 2009 年到 2013 年之間男生優勢最為明顯；地區方面，南部地區的性別差異最大，北部次之，中部地區最小；學習階段方面，國小階段無顯著差異，高中職階段顯著大於國中和國小階段；學科方面，自然科學的差異小於電腦資訊；研究變項方面，學習動機、學習興趣與學習態度皆為男生優勢，又以學習興趣的差異大於學習動機與學習態度；變項組成因素中，自我效能、興趣、信心、學習價值與焦慮皆為男生優勢，又以自我效能的差異最大，另外，在成就目標和表現目標的效果量雖為女生優勢，但未達到顯著水準。顯示隨著學習階段發展，男生在數理學科的學習動機、學習興趣與學習態度越來越高於女生。

綜合上述橫斷性研究，雖然臺灣學生在 TIMSS 的表現為低情意而高成就，經由結構方程模型或 HLM 分析，結果仍支持成就動機相關理論的主張，亦即學習興趣和學習自信對數學成就具正向影響，惟存有性別差異，且學習興趣的影響力略低於學習自信。

（二）縱貫性研究

探究學習興趣與學習自信如何影響數學成就的縱貫性研究中，多數研究驗證學習自信、學習興趣與數學成就的互惠效果。龔心怡與李靜儀（2016）以臺灣北、中、南地區公立國中七年級學生共 1025 位為對象，追蹤三年共三波次，數學自我概念與數學成就相互效果模式獲得支持，也就是數學自我概念正向預測後期的數學成就，數學成就正向預測後期的數學自我概念；而且模式有性別和城鄉差異，男生的數學自我概念三波次平均皆高於女生，女生的數學成就三波次平均皆則高於男生，城市地區學生的數學自我概念與數學成就三波次皆高於鄉鎮地區學生。國外的研究如 Sewasew、Schroeders、Schiefer、Weirich 與 Artelt（2018），以德國 3288 位五年級學生為對象，追蹤三年至七年級，結果顯示數學自我概念和數學成就（學校成績、標準化測驗成績）交互正向影響，數學興趣僅在五至六年級時與數學學校成績交互負向影響，而男生的數學自我概念和數學興趣均顯著高於女生。Marsh 等人（2018）以德國 3450 位五年級學生為對象，追蹤五年至九年級，控制四年級的數學和語文成績，以及學校層級的脈絡效果後，數學自我概念、數學學校成績和數學標準化測驗成績均交互正向影響。Arens、Frenzel 與 Goetz（2020），以德國 3209 位六年級為對象，追蹤四年至九年級，控制性別與家庭社經地位的影響後，數學自我概念正向預測後期之數學學校成績，數學學校成績正向預測後期之數學自我概念與數學自我效能；數學自我效能正向預測後期之數學成就測驗，數學成就測驗正向預測後期之數學自我概念與數學自我效能。然而，上述研究侷限於五年級以上中學生，且交互模型分析雖然控制了投入

變項的自我迴歸和不同變項間的共變關係，卻無法呈現各變項可能有獨特且不同方向的成長曲線（Soland, 2019）。

Soland（2019）以美國 4158 位五年級學生為對象，進行四年的縱貫追蹤，首先檢視數學自我效能和數學成就確實有各自獨特的成長曲線，學生的數學成就逐年成長，數學自我效能卻呈現逐年下降，而潛在成長模型分析的結果顯示，數學成就進步較慢的學生其數學自我效能可能下降地更快，然而，當提升學生的數學自我效能成長率，可顯著增進數學成就的成長率。Gaspard 等人（2020）統整美國三個世代樣本共 1069 位學生，分析從一年級開始連續 12 年的班級自我概念與內在價值的發展變化，結果顯示班級學生在數學和語文領域的自我概念與內在價值有不同的成長曲線，且有性別差異。就自我概念來看，約七成班級為數學微幅下滑而語文維持平穩，三成班級為數學微幅下滑而語文大幅下滑等兩種型態，而後者有較高比例是男生、選修進階數學課、願意從事數理相關工作、或實際投入 STEMM 職涯。另一方面，就內在價值來看，各約三成班級為數學大幅下滑而語文相對平穩、數學微幅下滑而語文大幅下滑、以及數學和語文皆維持穩定等三種型態，其中又以第三種的男生比例較高，第一種則較少比例選修進階數學課、或願意從事數理相關工作。洪碧霞與林素微（2017）是國內少有以中年級學生為對象的數學成就縱貫性研究，採用 HLM 成長模型分析，參與攜手計畫的國小四年級低成就學生（ASAP）於一個學年期間進行三次數學成就測驗，結果 ASAP 學生每次進步相當於 T 分數 7 分，相較於一般學生前後兩次測驗結果進步 T 分數 3 分，未參與攜手計畫的低成就學生則退步 T 分數 4 分，顯示攜手計畫有助提升低成就學生的數學成就。此外，精熟、表現、中庸和放棄四種目標取向的 ASAP 學生有不同的數學成就表現，其中以精熟目標取向學生的起始能力和成長率最高，放棄目標取向學生的起始能力和成長率最低。雖然洪碧霞與林素微（2017）以單次的目標取向進行分類，可以呈現出學生不同類型的學習動機有不同的數學成就成長曲線，但是無法得知目標取向或學習動機是否也隨時間有其獨特的成長曲線。

Soland（2019）和 Gaspard 等人（2020）的研究，提供了縱貫性證據支持學習興趣和學習自信對數學成就具正向影響，雖然學習興趣和學習自信呈現逐年下滑趨勢，且有性別差異，若學習興趣或學習自信提升或下滑程度較小，會有較好的數學成就、投入相關課程或職業。但是我國學生學習興趣、學習自信和數學成就各自的發展變化、交互效果以及性別因素的影響，需要更多的縱貫性證據。

四、研究問題

我國學生數學成就優異卻沒有學習興趣和自信，以實徵資料檢驗成就動機相關理論的適用性，有助教育政策與實務工作者發展後續的因應對策。從橫斷性研究中，已知學習興趣和學習自信是影響數學成就的重要個人因素（余民寧、韓珮華，2009；李君柔、王美娟，2013；高若

喬，2021；張芳全，2010；陳敏瑜、游錦雲，2013；Lee & Stankov, 2018），而且可能存在性別差異（余民寧等人，2018；張芳全，2010；陳敏瑜、游錦雲，2013），而縱貫性研究更揭示了學習興趣、學習自信與數學成就隨著時間交互影響（龔心怡、李靜儀，2016; Arens et al., 2020; Marsh et al., 2018; Sewasew et al., 2018），三者亦有各自獨特的成長曲線（Gaspard et al., 2020; Soland, 2019）。儘管國內外的實徵研究支持了自我決定論、情境式期望價值論、和社會認知論，我們仍不清楚國小三、四年級學生的學習興趣、學習自信與數學成就是否也有各自的成長曲線？學習興趣和學習自信又如何隨時間影響數學成就？是否存有性別差異？本研究以臺灣學生的實徵資料探討兩個研究問題如下：

（一）國小三、四年級學生的學習興趣、學習自信和數學成就如何隨時間發展變化？有各自的成長曲線？其成長趨勢是否有年級或性別差異？

（二）國小三、四年級學生的學習興趣和學習自信如何隨時間影響數學成就的發展成長？提升學習興趣或學習自信的成長率，是否會提高數學成就成長率？是否有年級或性別差異？

貳、研究方法

一、研究對象

本研究取自研究者 108 學年度研究計畫之部分資料。研究對象來自 N 市不同行政區且非市中心之三所國小的三、四年級全體學生，刪除僅有一次數學成就能力值者 13 位，三年級共七個班 290 位學生，四年級共十個班 382 位學生，合計 672 位（女 299，45%）學生。三所國小規模不同，全校學生介於 500～1300 位，均實施常態分班。

二、研究程序

研究者首先取得國家教育研究院和國際教育成就評量學會（The International Association for the Evaluation of Educational Achievement, IEA）同意本研究使用 TIMSS 公開之中文版四年級數學試題和學生背景問卷，並經國家教育研究院同意使用縣市學生學力檢測之公開數學試題。為使研究工具符合三、四年級學生的閱讀理解程度和數學課程範圍，均經由資深數學教師與專家協助審查，給予「數學學習興趣和學習自信問卷」題目敘述修改以及「數學評量試卷」選題組卷之建議。

數學學習興趣和學習自信問卷先進行預試，取得三、四年級學生的作答反應，確認問卷具有信、效度。正式施測共進行三次，分別於 108 學年度 9 月第三週，以及 1 月和 7 月的其中一週，由學校行政人員協助進行各班級之問卷調查，採書面紙筆方式作答，沒有時間限制，至多 20 分鐘即可完成，全班學生填寫完畢即收回問卷。其中一所合作學校因故未能收回 9 月第一波之數學學習興趣和學習自信問卷資料，參照該校第一波數學評量試卷所回收的數量，相當於第

一波學習興趣和學習自信闕漏該校之樣本數三年級有 112 位學生、四年級有 116 位學生，佔全體樣本 672 人約 34%。雖然第一波次闕漏較多，但全體樣本中僅 26 位學生只有一次學習興趣和學習自信的作答反應，且 251 位學生有三次作答反應。

數學評量試卷共進行五次，第一次於 108 學年度 9 月開學第一週施測，作為評量學生的基準起始能力，第二至五次配合各校課程單元進度與段考時間，於 11 月、1 月、4 月和 7 月各次段考的前一週，由班級導師協助於課堂中進行施測，採書面紙筆方式作答，於一節課的時間內均能完成，施測完畢即收回試卷，班級導師無需批閱。由於配合單元進度分次評量且每次試卷題數不多，對應數學學習興趣和學習自信問卷一個學年期間調查三次，本研究將 672 位學生的五次卷的作答反應合併為三次（第二、三次卷合併，第四、五次卷合併），運用試題反應理論（Item Response Theory, IRT）同時估計法取得學生的三次能力值，每位學生至少有兩次能力值，且 544 位學生有三次能力值。

三、研究工具

（一）數學學習興趣和學習自信問卷

數學學習興趣和學習自信問卷取自 TIMSS 2015 中文版四年級學生背景問卷，各有九題，學習興趣的題目如「我很喜歡學數學」，學習自信的題目如「我在數學方面通常表現不錯」。我國四年級學生參加 TIMSS 2015 調查，有效樣本共 4291 人，學習自信和學習興趣的信度 Cronbach's α 係數分別為 .95 和 .86，顯示信度良好（陳冠銘、任宗浩，2018）。

為確認適用於三年級學生，經專家修題及審題後，數學學習自信和學習興趣問卷之題目如附錄一。採用 Likert 式五點量表，以「非常同意」到「非常不同意」代表對題項內容的同意程度，分別計以 5～1 分，反向題計分則相反。作答結果分別按學習興趣和學習自信之九題分數進行平均，取得題均分，得分愈高者，代表學生的學習興趣或學習自信越高。預試樣本以 Y 市國小三、四年級學生為對象，以校為單位進行便利取樣，有效樣本共 115 份，學習興趣和學習自信的信度 Cronbach's α 係數分別為 .90 和 .76。正式施測三次，最後一次的有效樣本共 665 份，學習自信和學習興趣的信度 Cronbach's α 係數分別為 .94 和 .87，顯示信度良好。

（二）數學評量試卷

數學評量試卷題目主要取自國教院縣市學生學力檢測之二至四年級和 TIMSS 四年級之公開題目。三、四年級的數學評量試卷各有五次卷，第一次卷涵蓋開學三週之共同單元及其前一學期相關的先備知識，後四次卷根據每次段考範圍之共同單元，經專家審題，選擇適合之題目編製成試卷，每卷約 12 至 25 題，包含選擇、計算和應用題。三、四年級五卷合計共有 147 題，其中 20 題為三、四年級共同題。

數學評量試卷的作答反應採用 IRT 之二元計分的三參數對數模式（Lord, 1980），答對計 1 分、答錯計 0 分，並將三、四年級全部試題的作答反應進行同時估計，刪除適配度不佳的試題 13 題後，最終取得 134 道試題之參數。數學評量試卷的 134 道試題具有高鑑別度（介於 1.61 至 6.25）、低猜測度（最大值 0.04），且各卷試題兼顧難易（介於−0.20 至 0.96），平均難度三年級卷自 0.32 逐次提升至 0.45，四年級卷自 0.30 逐次提升至 0.36。此外，三、四年級卷之古典測驗理論（classical test theory）難度整體平均分別為 .50、 .63，顯示難易適中，內部一致性 Cronbach's α 係數分別為 .96、.94，顯示信度良好。

四、資料分析

本研究針對 672 位學生進行追蹤測量與分析，雖然第一波的學習自信和學習興趣遺漏值較多，運用 HLM 成長模型並採用貝氏估計法時，第一階依變項最小樣本數僅需 90 人即可獲得穩定的固定參數估計及統計考驗力（曾明基，2017）。本研究使用 HLM 7.03 軟體進行成長模型分析，以經驗貝氏估計法估計第一階層參數及隨機效果，並報導基於強韌標準誤（robust standard errors）之參數估計值（Raudenbush & Bryk, 2002; Raudenbush, Bryk, Cheong, Congdon, & Du Toit, 2011）。分析程序先以零模型計算組內相關係數（Intraclass Correlation Coefficient, ICC），當 ICC 大於 .059，表示組間效果不能忽略，適合以 HLM 多層次模型進行分析（Heck & Thomas, 2020; Raudenbush & Bryk, 2002）。模型的第一階層依變項如有遺漏值，選擇執行分析時刪除，未再進行插補。於成長模型中，連續變數之自變項皆設定為總平減（自變項原始數值減去總平均數），即可不改變斜率係數，使調整後的截距項有意義、易於解釋，亦能避免共線性問題（Heck & Thomas, 2020; Raudenbush & Bryk, 2002）。此外，三波次資料運用 HLM 可進行包含一次成長與二次加速度的曲線成長模型分析，唯一限制是二次加速度斜率項不可設定具有隨機效果（Heck & Thomas, 2020），而本研究主要目的是檢視固定參數的效果，故後續分析無論是線性或曲線成長模型，採取保守設定，僅截距項設有隨機效果。描述性統計則以 IBM SPSS Statistics 25 版進行分析。

參、研究結果

一、描述統計

全體學生的學習興趣三次平均值（標準差）分別為 3.40（0.98）、3.37（0.95）、3.24（1.01），學習自信三次平均值（標準差）分別為 3.26（0.83）、3.21（0.87）、3.18（0.85），數學成就三次平均值（標準差）分別為 0.58（0.37）、0.56（0.36）、0.65（0.40），分別按年級和性別摘要如表 1 和表 2。無論全體學生、年級和性別，學習興趣和學習自信三次平均呈現下降趨勢，而數學成就則呈現上升趨勢。

表 1

研究變項按年級摘要

研究變項		三年級 人數	平均值	標準差	四年級 人數	平均值	標準差
學習興趣	(1)	86	3.48	0.90	183	3.37	1.01
	(2)	273	3.53	0.94	362	3.25	0.94
	(3)	286	3.33	1.02	379	3.17	0.99
學習自信	(1)	86	3.32	0.75	183	3.23	0.87
	(2)	274	3.37	0.85	361	3.08	0.87
	(3)	286	3.31	0.83	379	3.09	0.85
數學成就	(1)	199	0.58	0.40	348	0.59	0.35
	(2)	289	0.54	0.36	382	0.58	0.36
	(3)	288	0.68	0.42	382	0.63	0.38

表 2

研究變項按性別摘要

研究變項		男生 人數	平均值	標準差	女生 人數	平均值	標準差
學習興趣	(1)	158	3.45	1.02	111	3.34	0.92
	(2)	351	3.42	0.98	284	3.31	0.90
	(3)	368	3.29	1.04	297	3.16	0.96
學習自信	(1)	158	3.38	0.83	111	3.09	0.80
	(2)	351	3.34	0.88	284	3.04	0.83
	(3)	368	3.33	0.84	297	3.00	0.82
數學成就	(1)	305	0.58	0.38	242	0.59	0.35
	(2)	373	0.60	0.39	298	0.53	0.31
	(3)	371	0.66	0.42	299	0.64	0.37

二、零模型結果

分別以學習興趣、學習自信和數學成就為依變項，進行零模型分析結果如表 3，模型方程式參見附錄二。學習興趣、學習自信和數學成就在學生個人內重複測量之變異數分別為 0.34、0.25 和 0.08，個人間變異數分別為 0.61、0.47 和 0.06，據此計算 ICCs 分別為 0.64、0.65 和 0.44，表示學習興趣、學習自信和數學成就約有 44% ~ 65%的變異存在於學生個人間層次，隨時間變動的學生個人內變異約有 35%～56%，顯示具有高度組內相關，組間效果不能忽略，適合以 HLM 多層次模型進行分析。

表 3

零模型分析結果摘要

依變項	學習興趣	學習自信	數學成就
固定效果參數	係數（標準誤）	係數（標準誤）	係數（標準誤）
起始狀態 π_0			
截距 β_{00}	3.32（0.03）***	3.21（0.03）***	0.60（0.01）***
隨機效果參數	變異數	變異數	變異數
截距 γ_0	0.61^{***}	0.47^{***}	0.06^{***}
層一誤差 e	0.34	0.25	0.08
離異數(−2LL)	3867.02	3414.09	1372.35

*** $p < .001$.

三、個別之成長模型結果

根據研究問題一，分別以學習興趣、學習自信和數學成就為依變項，年級和性別為第二階層的自變項，進行線性與曲線兩種成長模型分析，經考驗後報導最適模型，其中學習興趣和學習自信為一次成長之線性成長模型，數學成就為包含一次成長與二次加速度之曲線成長模型，結果如表 4，模型方程式參見附錄三。

（一）學習興趣的成長趨勢

根據表 4 學習興趣一欄的結果顯示，學習興趣的調整平均起始值為 3.35（$SE = 0.07, p < .001$），三年級學生的學習興趣起始值較四年級高 0.27（$SE = 0.09, p = .001$），在性別方面則無顯著差異（$\beta_{02} = 0.04, SE = 0.08, p = .61$）。學習興趣的調整平均成長率呈現下降趨勢，每一個學期平均減少 0.13（$SE = 0.03, p < .001$），在年級和性別方面則無顯著差異（$\beta_{11} = -0.05, SE = 0.05, p = .28$; $\beta_{12} = 0.04, SE = 0.04, p = .36$）。亦即三年級學生的學習興趣從學年期初的 3.62 持續下滑至期末的 3.36，四年級學生的學習興趣自學年期初的 3.35 再持續下滑至期末的 3.09。簡言之，在一個學年的期初時，國小三年級學生的學習興趣起始值顯著高於四年級學生，然而在一個學年期間，全體學生無論三、四年級或男、女生皆一致地持續減少對數學的學習興趣，平均降幅達 0.26。

進一步檢視學習興趣的九個題項，將學年期末（第三波）的各題平均值與學年期初（第一波）的各題平均值兩者相減，降幅最多的五個題項依序為：「數學是我特別喜愛的科目之一」（−0.29）、「我喜歡數學」（−0.25）、「我期待、喜歡上數學課」（−0.25）、「我喜歡解決數學問題」（−0.20）和「我喜歡做任何和數字有關的學校作業」（−0.19）。顯示國小三、四年級學生在數學作為一個學科，以及對於數學相關的課程、問題和作業等方面的學習興趣已經持續下降。

表 4

成長模型分析結果摘要

依變項	學習興趣	學習自信	數學成就
固定效果參數	係數（標準誤）	係數（標準誤）	係數（標準誤）
起始狀態 π_0			
截距 β_{00}	3.35（0.07）***	3.05（0.06）***	0.58（0.02）***
年級（三）β_{01}	0.27（0.09）**	0.17（0.08）*	–0.01（0.03）
性別（男）β_{02}	0.04（0.08）	0.27（0.07）***	0.00（0.03）
成長率 π_1			
截距 β_{10}	–0.13（0.03）***	–0.07（0.03）**	–0.09（0.04）*
年級（三）β_{11}	–0.05（0.05）	0.02（0.04）	–0.09（0.06）
性別（男）β_{12}	0.04（0.04）	0.02（0.04）	0.13（0.05）*
成長加速度 π_2			
截距 β_{20}			0.05（0.02）**
年級（三）β_{21}			0.06（0.03）*
性別（男）β_{22}			–0.06（0.03）*
隨機效果參數	變異數	變異數	變異數
截距 γ_0	0.61***	0.44***	0.06***
層一誤差 e	0.33	0.25	0.08
離異數	3839.70	3385.09	1366.38

*** $p < .001$. ** $p < .01$. * $p < .05$.

（二）學習自信的成長趨勢

根據表 4 學習自信一欄的結果顯示，學習自信的調整平均起始值為 3.05（$SE = 0.06, p < .001$），三年級學生的學習自信起始值較四年級高 0.17（$SE = 0.08, p = .03$），男生的學習自信起始值較女生高 0.27（$SE = 0.07, p < .001$）。學習自信的調整平均成長率呈現下降趨勢，每一個學期平均減少 0.07（$SE = 0.03, p = .006$），在年級和性別方面則無顯著差異（$\beta_{11} = 0.02, SE = 0.04, p = .56; \beta_{12} = 0.02, SE = 0.04, p = .55$）。亦即三年級女生的學習自信從學年期初的 3.22 持續下滑至期末的 3.08，四年級女生則從學年期初的 3.05 再持續下滑至期末的 2.91；而三年級男生的學習自信從學年期初的 3.49 下滑至 3.35，四年級男生則從學年期初的 3.32 再持續下滑至期末的 3.18。簡言之，在一個學年的期初時，國小三年級的學習自信起始值顯著高於四年級，男生的學習自信起始值顯著高於女生，然而在一個學年期間，全體學生無論三、四年級或男、女生皆一致地持續減少對數學的學習自信，平均降幅達 0.14。

進一步檢視學習自信的九個題項，將學年期末（第三波）的各題平均值與學年期初（第一波）的各題平均值兩者相減，降幅最多的五個題項依序為：「老師說我的數學能力很好」（–0.20）、「與數學有關的事我學得很快」（–0.17）、「和其他科目比起來，我覺得數學比較難（反向題）」（–0.15，表示覺得數學比較難的程度增加）、「我很會解決困難的數學問題」（–0.14）和「數學讓我覺得頭痛、困惑、讀不懂（反向題）」（–0.10，表示對數學感到困惑的程度增加）。顯示國小三、四年級學生在學數學時，所感受到來自教師的肯定，以及對數學的難度、學習速度和解題能力等方面的學習自信已經持續下降。

（三）數學成就的成長趨勢

根據表 4 數學成就一欄的結果顯示，數學成就的調整平均起始值為 0.58 個邏輯斯（$SE = 0.02$, $p < .001$），在年級和性別方面則無顯著差異（$\beta_{01} = -0.01$, $SE = 0.03$, $p = .69$; $\beta_{02} = 0.00$, $SE = 0.03$, $p = .98$）。數學成就的調整平均成長率呈現先降後升的趨勢，於第一學期期末較起始值減少 0.04 個邏輯斯，第二學期期末則較起始值增加 0.02 個邏輯斯（$\beta_{10} = -0.09$, $SE = 0.04$, $p = .03$; $\beta_{20} = 0.05$, $SE = 0.02$, $p = .006$）。三年級學生的數學成就成長加速度較四年級高 0.06 個邏輯斯（$SE = 0.03$, $p = .02$），使得三年級學生的數學成就於第一學期期末較起始值增加 0.02 個邏輯斯，第二學期期末則較起始值增加 0.26 個邏輯斯。男生的數學成就成長率較女生高 0.13 個邏輯斯（$SE = 0.05$, $p = .01$），成長加速度則較女生低 0.06 個邏輯斯（$SE = 0.03$, $p = .02$），使得男生的數學成就於第一學期期末較起始值增加 0.03 個邏輯斯，第二學期期末則較起始值增加 0.04 個邏輯斯。亦即三年級女生的數學成就從學年期初的 0.58 個邏輯斯逐漸進步至期末的 0.84 個邏輯斯，而三年級男生的數學成就亦持續進步至期末達 0.86 個邏輯斯；四年級女生的數學成就從學年期初的 0.58 個邏輯斯先下降再略為進步至期末的 0.60 個邏輯斯，而四年級男生的數學成就則漸進至期末的 0.62 個邏輯斯。

簡言之，中年級學生的學習興趣、學習自信和數學成就有各自的成長曲線，且有年級或性別差異。全體學生無論三、四年級或男、女生的數學成就皆有相同的起始狀態，然而在一個學年期間，國小三年級的數學成就成長率顯著高於四年級，男生的數學成就成長率顯著高於女生。整體而言，未考量其他影響因素時，數學成就的增幅三年級男生 0.28 個邏輯斯＞三年級女生 0.26 個邏輯斯＞四年級男生 0.04 個邏輯斯＞四年級女生 0.02 個邏輯斯。數學成就呈現正成長的同一學年期間，學習興趣和學習自信卻是負成長，因此以研究問題二進一步探討，當考量學習興趣和學習自信對數學成就的影響，數學成就的成長趨勢會如何變化。

四、影響數學成就成長率之成長模型結果

根據研究問題二，以數學成就為依變項，再分別以學習興趣、學習自信、以及學習興趣和學習自信兩者同時為第一階層的自變項，年級和性別為第二階層的自變項，進行成長模型分析，結果如表 5，模型方程式參見附錄四。

（一）學習興趣對數學成就成長率之影響

根據表 5 學習興趣一欄的結果顯示，考量學習興趣對數學成就的影響，數學成就的調整平均起始值為 0.64 個邏輯斯（$SE = 0.04, p < .001$），在年級和性別方面則無顯著差異（$\beta_{01} = -0.03, SE = 0.05, p = .63; \beta_{02} = 0.05, SE = 0.05, p = .34$）。數學成就的調整平均成長率呈現先降略升的趨勢，於第一學期期末較起始值減少 0.10 個邏輯斯，第二學期期末較起始值減少 0.08 個邏輯斯（$\beta_{10} = -0.16, SE = 0.05, p = .003; \beta_{20} = 0.06, SE = 0.02, p = .01$）。三年級學生的數學成就成長加速度較四年級高 0.06 個邏輯斯（$SE = 0.03, p = .03$），使得三年級學生的數學成就於第一學期期末較起始值減少 0.04 個邏輯斯，第二學期期末則較起始值增加 0.16 個邏輯斯。男生的數學成就成長加速度較女生低 0.07 個邏輯斯（$SE = 0.03, p = .01$），使得男生的數學成就於第一學期期末較起始值減少 0.17 個邏輯斯，第二學期期末則較起始值減少 0.36 個邏輯斯。若學習興趣提升且最終高於全體平均 1 分，可使數學成就增加 0.02 個邏輯斯（$SE = 0.01, p = .05$），而且在年級和性別方面均無顯著差異（$\beta_{31} = 0.00, SE = 0.01, p = .79; \beta_{32} = 0.02, SE = 0.01, p = .24$）。

如圖 1 所示，當學習興趣為全體平均水準時，三年級女生的數學成就從學年期初的 0.64 個邏輯斯先略降再進步至期末的 0.80 個邏輯斯，而三年級男生的數學成就則緩降至期末的 0.52 個邏輯斯；四年級女生的數學成就從學年期初的 0.64 個邏輯斯先下降再略升至期末的 0.56 個邏輯斯，而四年級男生的數學成就則持續下降至期末的 0.28 個邏輯斯。當學習興趣高於全體平均 1 分，以四年級女生為例，可促使其期末的數學成就從 0.56 個邏輯斯提高至 0.58 個邏輯斯。

簡言之，考量學習興趣對數學成就的影響，全體學生無論三、四年級或男、女生的數學成就皆有相同的起始狀態，然而在一個學年期間，國小三年級的數學成就成長率顯著高於四年級，女生的數學成就成長率顯著高於男生。整體而言，數學成就的增幅三年級女生 0.16 個邏輯斯＞四年級女生–0.08 個邏輯斯＞三年級男生–0.12 個邏輯斯＞四年級男生–0.36 個邏輯斯。無論三、四年級或男、女生的學習興趣提升高於平均 1 分，皆能增加其數學成就 0.02 個邏輯斯。

表 5

影響數學成就成長率之成長模型分析結果摘要

影響模型	學習興趣	學習自信	學習興趣和學習自信
固定效果參數	係數（標準誤）	係數（標準誤）	係數（標準誤）
數學成就起始狀態 π_0			
截距 β_{00}	0.64（0.04）***	0.75（0.05）***	0.74（0.05）***
年級（三）β_{01}	–0.03（0.05）	–0.05（0.06）	–0.05（0.06）
性別（男）β_{02}	0.05（0.05）	–0.03（0.06）	0.01（0.06）
數學成就成長率 π_1			
截距 β_{10}	–0.16（0.05）**	–0.25（0.05）***	–0.23（0.06）***
年級（三）β_{11}	–0.07（0.07）	–0.05（0.07）	–0.06（0.08）
性別（男）β_{12}	0.09（0.07）	0.16（0.07）*	0.12（0.07）
數學成就加速度 π_2			
截距 β_{20}	0.06（0.02）**	0.06（0.02）**	0.05（0.02）**
年級（三）β_{21}	0.06（0.03）*	0.06（0.03）*	0.06（0.03）*
性別（男）β_{22}	–0.07（0.03）*	–0.07（0.03）*	–0.06（0.03）*
學習興趣成長率 π_3			
截距 β_{30}	0.02（0.01）#		–0.02（0.01）
年級（三）β_{31}	0.00（0.01）		0.01（0.02）
性別（男）β_{32}	0.02（0.01）		0.04（0.02）*
學習自信成長率 π_4			
截距 β_{40}		0.05（0.01）***	0.07（0.02）***
年級（三）β_{41}		–0.01（0.02）	–0.02（0.02）
性別（男）β_{42}		–0.01（0.02）	–0.04（0.02）*
隨機效果參數	變異數	變異數	變異數
截距 γ_0	0.06***	0.06***	0.06***
層一誤差 e	0.08	0.08	0.08
離異數	1350.81	1334.14	1347.23

*** $p < .001$. ** $p < .01$. * $p < .05$. # $p = .05$.

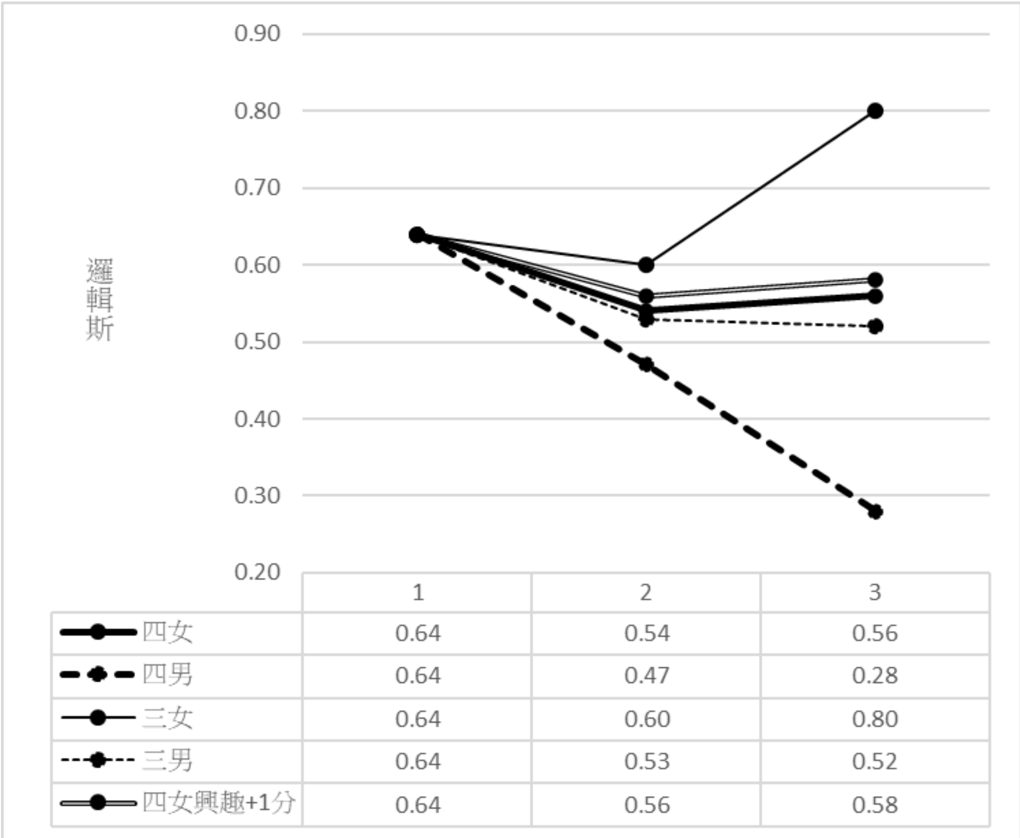


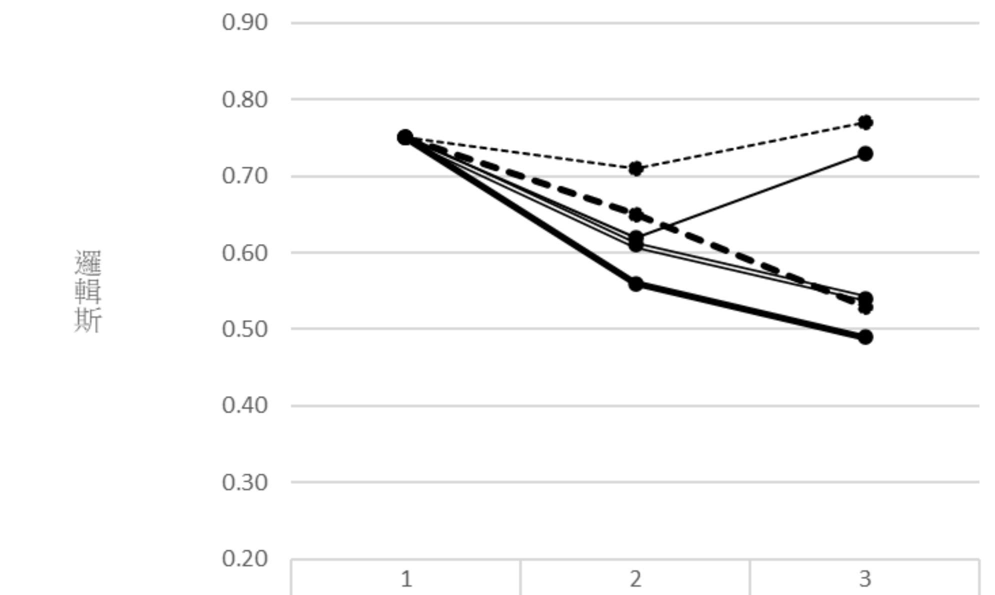
圖 1　學習興趣對數學成就成長率之影響

（二）學習自信對數學成就成長率之影響

根據表 5 學習自信一欄的結果顯示，考量學習自信對數學成就的影響後，數學成就的調整平均起始值為 0.75 個邏輯斯（$SE = 0.05, p < .001$），在年級和性別方面則無顯著差異（$\beta_{01} = -0.05, SE = 0.06, p = .38; \beta_{02} = -0.03, SE = 0.06, p = .63$）。數學成就的調整平均成長率呈現下降趨勢，於第一學期期末較起始值減少 0.19 個邏輯斯，第二學期期末較起始值減少 0.26 個邏輯斯（$\beta_{10} = -0.25, SE = 0.05, p < .001; \beta_{20} = 0.06, SE = 0.02, p = .01$）。三年級學生的數學成就成長加速度較四年級高 0.06 個邏輯斯（$SE = 0.03, p = .03$），使得三年級學生的數學成就於第一學期期末較起始值減少 0.13 個邏輯斯，第二學期期末則較起始值減少 0.02 個邏輯斯。男生的數學成就成長率較女生高 0.16 個邏輯斯（$SE = 0.07, p = .03$），成長加速度較女生低 0.07 個邏輯斯（$SE = 0.03, p = .01$），使得男生的數學成就於第一學期期末較起始值減少 0.10 個邏輯斯，第二學期期末則較起始值減少 0.22 個邏輯斯。若學習自信提升且最終高於全體平均 1 分，可使數學成就增加 0.05 個邏輯斯（$SE = 0.01, p < .001$），而且在年級和性別方面均無顯著差異（$\beta_{31} = -0.01, SE = 0.02, p = .46; \beta_{32} = -0.01, SE = 0.02, p = .59$）。

如圖 2 所示，當學習自信為全體平均水準時，三年級女生的數學成就從學年期初的 0.75 個邏輯斯先降後升至期末的 0.73 個邏輯斯，而三年級男生的數學成就則略降後升至期末的 0.77 個邏輯斯；四年級女生的數學成就從學年期初的 0.75 個邏輯斯持續下降至期末的 0.49 個邏輯斯，而四年級男生的數學成就亦持續下降至期末的 0.53 個邏輯斯。當學習自信高於全體平均 1 分，以四年級女生為例，可促使其期末的數學成就從 0.49 個邏輯斯提高至 0.54 個邏輯斯。

簡言之，考量學習自信對數學成就的影響，全體學生無論三、四年級或男、女生的數學成就皆有相同的起始狀態，然而在一個學年期間，國小三年級的數學成就成長率顯著高於四年級，男生的數學成就成長率顯著高於女生。整體而言，數學成就的增幅三年級男生 0.02 個邏輯斯＞三年級女生–0.02 個邏輯斯＞四年級男生–0.22 個邏輯斯＞四年級女生–0.26 個邏輯斯。無論三、四年級或男、女生的學習自信提升高於平均 1 分，皆能增加其數學成就 0.05 個邏輯斯。



	1	2	3
四女	0.75	0.56	0.49
四男	0.75	0.65	0.53
三女	0.75	0.62	0.73
三男	0.75	0.71	0.77
四女自信+1分	0.75	0.61	0.54

圖 2　學習自信對數學成就成長率之影響

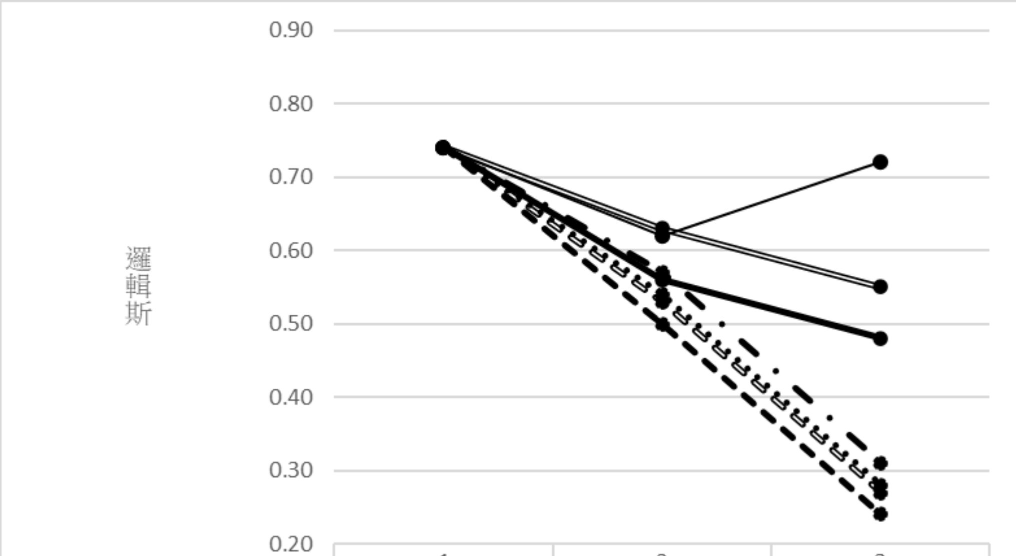
（三）學習興趣和學習自信對數學成就成長率之影響

根據表 5 學習興趣和學習自信一欄的結果顯示，考量學習興趣和學習自信對數學成就的影響後，數學成就的調整平均起始值為 0.74 個邏輯斯（$SE = 0.05, p < .001$），在年級和性別方面則無顯著差異（$\beta_{01} = –0.05, SE = 0.06, p = .45; \beta_{02} = 0.01, SE = 0.06, p = .93$）。數學成就的調整平均

成長率呈現下降趨勢，於第一學期期末較起始值減少 0.18 個邏輯斯，第二學期期末較起始值減少 0.26 個邏輯斯（$\beta_{10} = -0.23$, $SE = 0.06$, $p < .001$; $\beta_{20} = 0.05$, $SE = 0.02$, $p = .01$）。三年級學生的數學成就成長加速度較四年級高 0.06 個邏輯斯（$SE = 0.03$, $p = .03$），使得三年級學生的數學成就於第一學期期末較起始值減少 0.12 個邏輯斯，第二學期期末則較起始值減少 0.02 個邏輯斯。男生的數學成就成長加速度較女生低 0.06 個邏輯斯（$SE = 0.03$, $p = .02$），使得男生的數學成就於第一學期期末較起始值減少 0.24 個邏輯斯，第二學期期末則較起始值減少 0.50 個邏輯斯。若學習興趣提升且最終高於全體平均 1 分，可使男生的數學成就增加 0.04 個邏輯斯（$SE = 0.02$, $p = .01$），但在女生（$\beta_{30} = -0.02$, $SE = 0.01$, $p = .08$）和年級方面無顯著差異（$\beta_{31} = 0.01$, $SE = 0.02$, $p = .42$）。若學習自信提升且最終高於全體平均 1 分，可使女生的數學成就增加 0.07 個邏輯斯（$SE = 0.02$, $p < .001$），男生的數學成就增加 0.03 個邏輯斯（$\beta_{31} = -0.04$, $SE = 0.02$, $p = .045$），但在年級方面無顯著差異（$\beta_{31} = -0.02$, $SE = 0.02$, $p = .22$）。

如圖 3 所示，當學習興趣和學習自信為全體平均水準時，三年級女生的數學成就從學年期初的 0.74 個邏輯斯先降後升至期末的 0.72 個邏輯斯，而三年級男生的數學成就則下降至期末的 0.48 個邏輯斯；四年級女生的數學成就從學年期初的 0.74 個邏輯斯下降至期末的 0.48 個邏輯斯，而四年級男生的數學成就則持續下降至期末的 0.24 個邏輯斯。當女生的學習自信增加高於全體平均 1 分，以四年級女生為例，可促使其期末的數學成就從 0.48 個邏輯斯提高至 0.55 個邏輯斯。當男生的學習興趣、學習自信、或兩者皆增加高於全體平均 1 分，以四年級男生為例，可促使其期末的數學成就從 0.24 個邏輯斯分別提高至 0.28、0.27 和 0.31 個邏輯斯。

簡言之，考量學習興趣和學習自信隨時間對數學成就的影響，提升學習興趣或學習自信的成長率，會提高數學成就成長率，且有年級和性別差異。全體學生無論三、四年級或男、女生的數學成就皆有相同的起始狀態，且在一個學年期間呈現下降趨勢，惟國小三年級的數學成就成長率顯著高於四年級，女生的數學成就成長率顯著高於男生，最終數學成就的降幅三年級女生 –0.02 個邏輯斯＜三年級男生–0.26 個邏輯斯＝四年級女生–0.26 個邏輯斯＜四年級男生–0.50 個邏輯斯。無論三、四年級，女生的學習自信提升高於平均 1 分，可增加其數學成就 0.07 個邏輯斯，男生的學習興趣、學習自信提升高於平均 1 分，可分別增加其數學成就 0.04、0.03 個邏輯斯。



	1	2	3
四女, 三男	0.74	0.56	0.48
四男	0.74	0.50	0.24
三女	0.74	0.62	0.72
四男興趣+1分	0.74	0.54	0.28
四女自信+1分	0.74	0.63	0.55
四男自信+1分	0.74	0.53	0.27
四男興趣自信+1分	0.74	0.57	0.31

圖 3　學習興趣和學習自信對數學成就成長率之影響

肆、討論與建議

本研究於一個學年期間追蹤國小三、四年級 672 位學生的學習興趣、學習自信和數學成就，結果顯示：（1）學習興趣、學習自信和數學成就有各自獨特的成長曲線。學習興趣和學習自信均呈現下滑趨勢，學習興趣的降幅大於學習自信，三年級的起始水準均高於四年級，此外男生的學習自信起始水準又高於女生。數學成就呈現上升趨勢，在相同的起始水準，三年級和男生的增幅大於四年級和女生。（2）考量學習興趣和學習自信隨時間對數學成就的影響，提升學習興趣或學習自信的成長率會提高數學成就成長率。以學習興趣為預測變項時，三年級和女生的數學成就增幅大於四年級和男生，且僅三年級女生的數學成就為正成長；無論年級或性別，提高學習興趣皆能促進數學成就。以學習自信為預測變項時，三年級和男生的數學成就增幅大於四年級和女生，且僅三年級男生的數學成就為正成長；無論年級或性別，提高學習自信皆能促進數學成就。同時以學習興趣和學習自信為預測變項時，三年級和女生的數學成就增幅大於四年級和男生，但最終僅三年級女生的數學成就略為持平，其餘數學成就皆明顯下滑；當男生提

高學習興趣或學習自信，女生提高學習自信，皆能促進數學成就。

本研究為國內外少有同時探討中年級學生的學習興趣、學習自信與數學成就之縱貫性研究，結果顯示成就動機相關理論亦適用於高成就卻低情意的學習發展狀態。研究結果呼應 Gaspard 等人（2020）國中小階段的學習興趣（內在價值）和學習自信（自我概念）均呈現下滑趨勢，且學習興趣的降幅大於學習自信。亦呼應 Soland（2019）的縱貫分析，數學自我效能和數學成就有各自獨特的成長曲線，且台灣學生更從五年級提前至三年級開始，學習自信（自我效能）逐漸下降而數學成就漸次上升，然而，若提升學習自信則可增進數學成就的成長率。亦類似國內外五年級至中學期間的交互模型分析結果（龔心怡、李靜儀，2016; Arens et al., 2020; Marsh et al., 2018; Sewasew et al., 2018），本研究更延伸呈現了三、四年級的學習興趣和學習自信皆能正向預測數學成就之證據，且與臺灣中學生相同的是，當考量學習自信（自我概念）對數學成就的影響時，存有性別差異（龔心怡、李靜儀，2016）。洪碧霞與林素微（2017）呈現了不同目標取向的四年級學生有不同的數學成就成長趨勢，而本研究檢驗了三、四年級學習興趣和學習自信隨時間發展及其對數學成就有不同程度的增進效果，且有性別差異。

本研究結果為國內的橫斷性研究（余民寧等人，2018；余民寧、韓珮華，2009；李君柔、王美娟，2013；高若喬，2021；張芳全，2010；陳敏瑜、游錦雲，2013）提供更多縱貫證據。例如在高若喬（2021）的研究中，六年級學生數學素養表現沒有性別差異，此外，臺灣四年級學生歷屆 TIMSS 數學成就表現亦沒有顯著的性別差異（林碧珍，2018; Mullis et al., 2020），與本研究三、四年級男女學生的數學成就皆有相同的起始水準的橫斷狀態是一致的，然而，經由縱貫性資料成長模型分析，本研究顯示三年級和男生的數學成就成長率其實有別於四年級和女生。陳敏瑜與游錦雲（2013）同時分析學習自信、學習興趣（和內在價值）、以及實用價值對八年級學生數學成就的影響時，學習興趣（和內在價值）的直接效果未達顯著，而在張芳全（2010）的分析中，較高的學習興趣和學習自信會有較高的數學成就，女生的數學成就較男生高，男生的學習興趣和學習自信皆較女生高，本研究則進一步同時分析不同性別或年級之學習興趣和學習自信隨時間對中年級學生數學成就的影響，結果顯示學習興趣和學習自信皆能正向預測數學成就成長率。

根據本研究結果，建議我國中年級數學教育值得加以關注的三個面向：（1）中年級學生的學習自信和數學成就的個別發展已有男生優勢，與余民寧等人（2018）和林碧珍（2018）指出國小階段學習動機和數學成就無性別差異的結果不同。可從社會認知論的教學、家庭或社會環境（Bandura, 1986; Schunk & DiBenedetto, 2020），情境式期望價值論的任務價值、個人和社會認同（Eccles & Wigfield, 2020），或成長心態（Degol et al., 2018; Dweck, 2007）等面向，再探究是否有刻板印象或固定思維等因素或價值觀，侷限了學生數學情意與能力的發展，從而影響未來進

階課程、科系和職業的選擇（Gaspar et al., 2020）。（2）三、四年級學生的學習興趣和學習自信皆持續下滑，且學習興趣的降幅大於學習自信。可從自我決定論（Gnambs & Hanfstingl, 2016; Ryan & Deci, 2020）或情境式期望價值論的角度思考，是否因為學校或教師在學生學習數學時，未能給予學生足夠的心理需求支持或完成任務的樂趣，影響學生的內在動機和學習興趣。（3）同時考量學習興趣和學習自信的發展及其對數學成就成長率的影響時，三年級男生和四年級學生的數學成就呈現明顯下滑。可從自我決定論、情境式期望價值論、社會認知論、和成長心態等理論基礎，發展提升學習興趣和學習自信的有效策略，例如建立良好師生關係、給予適性的教學方式、多元的情境任務、鼓勵成長心態、突破刻板印象的學習環境（余民寧、韓珮華，2009；李君柔、王美娟，2013; Dweck, 2007; Eccles & Wigfield, 2020; Ryan & Deci, 2020; Schunk & DiBenedetto, 2020），或師法新加坡等國政策或方案（劉春初等人 2019），增進學生的數學情意與學習效率。

最後，本研究第一波次闕漏較多學習興趣和學習自信的樣本，雖然以 HLM 成長模型克服資料限制，未來研究可在足夠樣本時，增加第三個學校或班級階層，分析學校或班級變項（如學校規模、城鄉、班級平均學習成就）的影響，亦可以改採結構方程模式，檢驗三、四年級學習興趣、學習自信和數學成就的因果關係與互惠效果（Sewasew et al., 2018）。未來研究亦可調查合作學校教師的教學方式，或以準實驗方式進行教學介入方案，具體分析不同教學方式或教學方案對學生學習興趣、學習自信和數學成就的影響與成效。

誌謝

本文改寫自張凌嘉在吳昭容指導下完成的博士論文，感謝教育部高等教育深耕計畫下特色領域研究中心計畫之臺灣師範大學「學習科學跨國頂尖研究中心」，以及科技部「以眼動探討幾何閱讀歷程與發展閱讀技巧教學」（MOST 108-2511-H-003-014-MY3）的經費補助。感謝本期刊編輯委員與審查委員的見解與建議。

參考文獻

余民寧、翁雅芸、張靜軒（2018）。數理科學的學習動機有性別差異嗎？一個來自後設分析的證據。**當代教育研究季刊，26**（1），45–75。doi: 10.6151/CERQ.201803_26(1).0002【Yu, Min-Ning, Weng, Ya-Yun, & Chang, Ching-Hsuan (2018). Students' learning motivation to math and science: Using the mata-analysis to find the gender difference in Taiwan. *Contemporary Educational Research Quarterly*, *26*(1), 45–75. doi: 10.6151/CERQ.201803_26(1).0002 (in Chinese)】

余民寧、韓珮華（2009）。教學方式對數學學習興趣與數學成就之影響：以 TIMSS 2003 台灣資料爲例。**測驗學刊，56**（1），19–48。doi: 10.7108/PT.200903.0019【Yu, Min-Ning, & Han, Pei-

Hua (2009). The influence of teaching methods on the mathematics learning interests and achievement: The case of TIMSS 2003 Taiwan data. *Psychological Testing*, *56*(1), 19–48. doi: 10.7108/PT.200903.0019 (in Chinese)】

李君柔、王美娟（2013）。個人特質、家庭環境、教師教學與學校背景對八年級學生數學成就之影響。**臺北市立教育大學學報：教育類，44**（1），51–83。doi: 10.6336/JUTe/2013.44(1)3【Lee, Chun-Rou, & Wang, Mei-Chuan, (2013). Influential factors on mathematics achievement of Taiwanese 8th graders. *Journal of Taipei Municipal University of Education: Education*, *44*(1), 51–83. doi: 10.6336/JUTe/2013.44(1)3 (in Chinese)】

林碧珍（2018）。四年級學生數學成就及相關因素探討。載於張俊彥（主編），**國際數學與科學教育成就趨勢調查 2015 國家報告**（64–114 頁）。臺北：師大科教中心。檢自 http://www.sec.ntnu.edu.tw/timss2015/05-resault.aspx【Lin, Pi-Jen (2018). Mathematics achievement at grade four and its related factors. In C.-Y. Chang (Ed.), *Trends in International Mathematics and Science Study in 2015: National report in Taiwan* (pp. 64–114). Taipei: National Taiwan Normal University, Science Education Center. Retrieved from http://www.sec.ntnu.edu.tw/timss2015/05-resault.aspx (in Chinese)】

洪碧霞、林素微（2017）。認知本位電腦化學習評量系統的應用效益與拓展方向：以攜手計畫課後扶助方案科技化評量系統為例。**測驗學刊，64**（4），313–339。【Hung, Pi-Hsia, & Lin, Su-Wei (2017). A computerized cognitively based learning assessment system for the students of after school alternative program of Taiwan. *Psychological Testing*, *64*(4), 313–339. (in Chinese)】

高若喬（2021）。**國小六年級學生平面幾何素養表現與影響因素調查研究**（未出版之碩士論文）。國立臺中教育大學，臺中市。【Kao, Jo-Chiao (2021). *A study on the performance and influencing factors of plane geometry literacy of sixth graders in elementary schools* (Unpublished master's thesis). National Taichung University of Education, Taichung. (in Chinese)】

張芳全（2010）。**多層次模型在學習成就之研究**。臺北：心理。【Chang, Fang-Chung (2010). *A study of multilevel model in learning achievement*. Taipei: Psychological. (in Chinese)】

張俊彥、任宗浩、李哲迪、林碧珍、張美玉、曹博盛、楊文金（2018）。結論與建議。載於張俊彥（主編），**國際數學與科學教育成就趨勢調查 2015 國家報告**（470–485 頁）。臺北：師大科教中心。檢自 http://www.sec.ntnu.edu.tw/timss2015/05-resault.aspx【Chang, Chun-Yeng, Jen, Tsung-Hau, Lee, Che-Di, Lin, Pi-Jen, Chang, Mei-Yu, Tsao, Po-Son, & Yang, Wen-Jin (2018). Conclusion and suggestion. In C.-Y. Chang (Ed.), *Trends in International Mathematics and Science Study in 2015: National report in Taiwan* (pp. 470–485). Taipei: National Taiwan Normal University, Science Education Center. Retrieved from http://www.sec.ntnu.edu.tw/timss2015/05-resault.aspx (in Chinese)】

教育部（2020 年 12 月 8 日）。**臺灣參加國際數學與科學教育成就趨勢調查（TIMSS 2019）成果發表**。檢自 https://www.edu.tw/News_Content.aspx?n=9E7AC85F1954DDA8&s=B822E38553C1D561【Taiwan Ministry of Education. (2020, December 8). *Taiwan's mathematics and science education in the Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) in 2019: National report news conference*. Retrieved from https://www.edu.tw/News_Content.aspx?n=9E7AC85F1954DDA8&s=B822E38553C1D561 (in Chinese)】

曹博盛（2018）。八年級學生數學成就及相關因素探討。載於張俊彥（主編），**國際數學與科學教育成就趨勢調查 2015 國家報告**（206–280 頁）。臺北：師大科教中心。檢自 http://www.sec.ntnu.edu.tw/timss2015/05-resault.aspx【Tsao, Po-Son (2018). Mathematics achievement at grade eighth and its related factors. In C.-Y. Chang (Ed.), *Trends in International Mathematics and Science Study in 2015: National report in Taiwan* (pp. 206–280). Taipei: National Taiwan Normal University, Science Education Center. Retrieved from http://www.sec.ntnu.edu.tw/timss2015/05-resault.aspx (in Chinese)】

陳冠銘、任宗浩（2018）。TIMSS 2015 的評量架構。載於張俊彥（主編），**國際數學與科學教育成就趨勢調查 2015 國家報告**（14–42 頁）。臺北：師大科教中心。檢自 http://www.sec.ntnu.edu.tw/timss2015/05-resault.aspx【Chen, Kuan-Ming, & Jen, Tsung-Hau (2018). TIMSS 2015 assessment frameworks. In C.-Y. Chang (Ed.), *Trends in International Mathematics and Science Study in 2015: National report in Taiwan* (pp. 16–42). Taipei: National Taiwan Normal University, Science Education Center. Retrieved from http://www.sec.ntnu.edu.tw/timss2015/05-resault.aspx (in Chinese)】

陳敏瑜、游錦雲（2013）。以 TIMSS 資料檢視能力信念與任務價值對臺灣八年級學生數學成就之影響。**教育科學研究期刊，58**（3），153–186。doi: 10.6209/JORIES.2013.58(3).06【Chen, Min-Yu, & Yu, Ching-Yun. (2013). Using trends in mathematics and science study to investigate the effects of ability beliefs and task values on eighth-grader mathematics achievements in Taiwan. *Journal of Research in Education Sciences*, *58*(3), 153–186. doi:10.6209/JORIES.2013.58(3).06 (in Chinese)】

曾明基（2017）。進行多層次建模最小可行的樣本數建議：貝氏模擬取向。**教育研究與發展期刊，13**（4），1–26。doi: 10.3966/181665042017121304001【Tseng, Ming-Chi. (2017). Sample size requirements of using multilevel models: Bayesian Simulation Study. *Journal of Educational Research and Development*, *13*(4), 1–26. doi: 10.3966/181665042017121304001 (in Chinese)】

劉春初、王澤宇、陳威仁（2019）。國民中學學生數學成就表現之跨國比較：以 TIMSS 為例。**測驗學刊，66**（1），1–26。【Liu, Chun-Chu, Wang, Tse-Yu, & Chen, Wei-Jen (2019). The international comparison of achievement in mathematics of eight graders based on TIMSS data. *Psychological Testing*, *66*(1), 1–26. (in Chinese)】

龔心怡、李靜儀（2016）。國中學生數學自我概念與數學學業成就相互效果模式之縱貫研究─性別差異與城鄉差距之觀點。**科學教育學刊，24**（S），511–536。doi: 10.6173/CJSE.2016.24S.04【Kung, Hsin-Yi, & Lee, Ching-Yi (2016). The longitudinal reciprocal effects model of junior high school students' mathematics self-concept and mathematics achievement: The perspectives of gender and urban/rural differences. *Chinese Journal of Science Education*, *24*(S), 511–536. doi: 10.6173/CJSE.2016.24S.04 (in Chinese)】

Anderman, E. M. (2020). Achievement motivation theory: Balancing precision and utility. *Contemporary Educational Psychology*, *61*, 101864. doi: 10.1016/j.cedpsych.2020.101864

Arens, A. K., Frenzel, A. C., & Goetz, T. (2020). Self-concept and self-efficacy in math: Longitudinal interrelations and reciprocal linkages with achievement. *The Journal of Experimental Education*. Advanced online publication. doi: 10.1080/00220973.2020.1786347

Bandura, A. (1986). *Social foundations of thought and action: A social cognitive theory*. Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Deci, E. L., & Moller, A. C. (2005). The concept of competence: A starting place for understanding intrinsic motivation and self-determined extrinsic motivation. In A. J. Elliot & C. S. Dweck (Eds.), *Handbook of competence and motivation* (pp. 579–597). New York, NY: Guilford Publications.

Deci, E. L., & Ryan, R. M. (1985). *Intrinsic motivation and self-determination in human behavior*. New York, NY: Plenum Press. doi: 10.1007/978-1-4899-2271-7

Degol, J. L., Wang, M. T., Zhang, Y., & Allerton, J. (2018). Do growth mindsets in math benefit females? Identifying pathways between gender, mindset, and motivation. *Journal of Youth and Adolescence*, *47*(5), 976–990. doi: 10.1007/s10964-017-0739-8

Dweck, C. S. (2007). Is math a gift? Beliefs that put females at risk. In S. J. Ceci & W. M. Williams (Eds.), *Why aren't more women in science?: Top researchers debate the evidence* (pp. 47–55). American Psychological Association. doi: 10.1037/11546-004

Eccles, J. S., & Wigfield, A. (2020). From expectancy-value theory to situated expectancy-value theory: A developmental, social cognitive, and sociocultural perspective on motivation. *Contemporary Educational Psychology*, *61*, 101859. doi: 10.1016/j.cedpsych.2020.101859

Gaspard, H., Lauermann, F., Rose, N., Wigfield, A., & Eccles, J. S. (2020). Cross-domain trajectories of students’ ability self-concepts and intrinsic values in math and language arts. *Child Development*, *91*(5), 1800–1818. doi: 10.1111/cdev.13343

Gnambs, T., & Hanfstingl, B. (2016). The decline of academic motivation during adolescence: An accelerated longitudinal cohort analysis on the effect of psychological need satisfaction. *Educational Psychology*, *36*(9), 1691–1705. doi: 10.1080/01443410.2015.1113236

Heck, R. H., & Thomas, S. L. (2020). *An introduction to multilevel modeling techniques: MLM and SEM approaches* (4th ed.). New York, NY: Routledge. doi: 10.4324/9780429060274

Hidi, S., & Renninger, K. A. (2006). The four-phase model of interest development. *Educational Psychologist*, *41*(2), 111–127. doi: 10.1207/s15326985ep4102_4

Hooper, M., Mullis, I. V. S., & Martin, M. O. (2013). TIMSS 2015 context questionnaire framework. In I. V. S. Mullis, & M. O. Martin (Eds.), *TIMSS 2015 assessment frameworks* (pp. 61–82). Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.

Lee, J., & Stankov, L. (2018). Non-cognitive predictors of academic achievement: Evidence from TIMSS and PISA. *Learning and Individual Differences*, *65*, 50–64. doi: 10.1016/j.lindif.2018.05.009

Lord, F. M. (1980). *Applications of item response theory to practical testing problems*. New York, NY: Routledge. doi: 10.4324/9780203056615

Marsh, H. W., Pekrun, R., Murayama, K., Arens, A. K., Parker, P. D., Guo, J., & Dicke, T. (2018). An integrated model of academic self-concept development: Academic self-concept, grades, test scores, and tracking over 6 years. *Developmental Psychology*, *54*(2), 263–280. doi: 10.1037/dev0000393

Marsh, H. W., Pekrun, R., Parker, P. D., Murayama, K., Guo, J., Dicke, T., & Arens, A. K. (2019). The murky distinction between self-concept and self-efficacy: Beware of lurking jingle-jangle fallacies. *Journal of Educational Psychology*, *111*(2), 331–353. doi: 10.1037/edu0000281

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., Kelly, D. L., & Fishbein, B. (2020). *TIMSS 2019 international results in mathematics and science*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.

Organisation for Economic Co-operation and Development. (2013). *PISA 2012 assessment and analytical framework: Mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy*. Paris, France: OECD Publishing. doi: 10.1787/9789264190511-en

Pajares, F., & Usher, E. L. (2008). Self-efficacy, motivation, and achievement in school from the perspective of reciprocal determinism. *Advances in Motivation and Achievement*, 15, 391–423. doi: 10.1016/S0749-7423(08)15012-9

Raudenbush, S. W., Bryk, A., Cheong, Y. F., Congdon, R., & Du Toit, M. (2011). *HLM 7: Linear and nonlinear modeling*. Lincolnwood, IL: Scientific Software International.

Raudenbush, S.W., & Bryk, A.S. (2002). *Hierarchical linear models: Applications and data analysis methods* (2nd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Ryan, R. M., & Deci, E. L. (2000). Intrinsic and extrinsic motivations: Classic definitions and new directions. *Contemporary Educational Psychology*, *25*(1), 54–67. doi: 10.1006/ceps.1999.1020

Ryan, R. M., & Deci, E. L. (2020). Intrinsic and extrinsic motivation from a self-determination theory perspective: Definitions, theory, practices, and future directions. *Contemporary Educational Psychology*, *61*, 101860. doi: 10.1016/j.cedpsych.2020.101860

Schunk, D. H., & DiBenedetto, M. K. (2020). Motivation and social cognitive theory. *Contemporary Educational Psychology*, *60*, 101832. doi: 10.1016/j.cedpsych.2019.101832

Sewasew, D., Schroeders, U., Schiefer, I. M., Weirich, S., & Artelt, C. (2018). Development of sex differences in math achievement, self-concept, and interest from grade 5 to 7. *Contemporary Educational Psychology*, *54*, 55–65. doi: 10.1016/j.cedpsych.2018.05.003

Soland, J. (2019). Modeling academic achievement and self-efficacy as joint developmental processes: Evidence for education, counseling, and policy. *Journal of Applied Developmental Psychology*, *65*, 101076. doi: 10.1016/j.appdev.2019.101076

附錄一：數學學習興趣和學習自信問卷題目

	非常不同意	不同意	還好	同意	非常同意
1. 你同不同意下列關於**學習數學**的敘述？					
1) 我很喜歡學習數學	1	2	3	4	5
2) 我希望我不用學數學	1	2	3	4	5
3) 數學很無趣	1	2	3	4	5
4) 我在數學中學到許多有趣的事	1	2	3	4	5
5) 我喜歡數學	1	2	3	4	5
6) 我喜歡做任何和數字有關的學校作業	1	2	3	4	5
7) 我喜歡解決數學問題	1	2	3	4	5
8) 我期待、喜歡上數學課	1	2	3	4	5
9) 數學是我特別喜愛的科目之一	1	2	3	4	5
2. 你同不同意下列關於**數學**的敘述？					
1) 我在數學方面通常表現不錯	1	2	3	4	5
2) 和班上許多同學比起來，數學對我來說是比較困難的	1	2	3	4	5
3) 我只有數學不好	1	2	3	4	5
4) 與數學有關的事我學得很快	1	2	3	4	5
5) 數學讓我緊張或害怕	1	2	3	4	5
6) 我很會解決困難的數學問題	1	2	3	4	5
7) 老師說我的數學能力很好	1	2	3	4	5
8) 和其他科目比起來，我覺得數學比較難	1	2	3	4	5
9) 數學讓我覺得頭痛、困惑、讀不懂	1	2	3	4	5

附錄二：零模型方程式

（一）學習興趣為依變項

階層 1：隨時間變化

$學習興趣_{ti} = \pi_{0i} + e_{ti}$

階層 2：學生固定變項

$\pi_{0i} = \beta_{00} + \gamma_{0i}$

（二）學習自信為依變項

階層 1：隨時間變化

$學習自信_{ti} = \pi_{0i} + e_{ti}$

階層 2：學生固定變項

$\pi_{0i} = \beta_{00} + \gamma_{0i}$

（三）數學成就為依變項

階層 1：隨時間變化

$數學成就_{ti} = \pi_{0i} + e_{ti}$

階層 2：學生固定變項

$\pi_{0i} = \beta_{00} + \gamma_{0i}$

附錄三：個別之成長模型方程式

（一）學習興趣為依變項

階層 1：隨時間變化

$學習興趣_{ti} = \pi_{0i} + \pi_{1i} \times 時間_{ti} + e_{ti}$

階層 2：學生固定變項

$\pi_{0i} = \beta_{00} + \beta_{01} \times 年級_{i} + \beta_{02} \times 性別_{i} + \gamma_{0i}$

$\pi_{1i} = \beta_{10} + \beta_{11} \times 年級_{i} + \beta_{12} \times 性別_{i}$

（二）學習自信為依變項

階層 1：隨時間變化

$學習自信_{ti} = \pi_{0i} + \pi_{1i} \times 時間_{ti} + e_{ti}$

階層 2：學生固定變項

$\pi_{0i} = \beta_{00} + \beta_{01} \times 年級_{i} + \beta_{02} \times 性別_{i} + \gamma_{0i}$

$\pi_{1i} = \beta_{10} + \beta_{11} \times 年級_{i} + \beta_{12} \times 性別_{i}$

（三）數學成就為依變項

階層 1：隨時間變化

$數學成就_{ti} = \pi_{0i} + \pi_{1i} \times 時間_{ti} + \pi_{2i} \times 時間^{2}_{ti} + e_{ti}$

階層 2：學生固定變項

$\pi_{0i} = \beta_{00} + \beta_{01} \times 年級_{i} + \beta_{02} \times 性別_{i} + \gamma_{0i}$

$\pi_{1i} = \beta_{10} + \beta_{11} \times 年級_{i} + \beta_{12} \times 性別_{i}$

$\pi_{2i} = \beta_{20}$

附錄四：影響數學成就成長率之成長模型方程式

（一）學習興趣為自變項，數學成就為依變項

階層 1：隨時間變化

$$數學成就_{ti} = \pi_{0i} + \pi_{1i} \times 時間_{ti} + \pi_{2i} \times 時間^2_{ti} + \pi_{3i} \times 學習興趣_{ti} + e_{ti}$$

階層 2：學生固定變項

$$\pi_{0i} = \beta_{00} + \beta_{01} \times 年級_i + \beta_{02} \times 性別_i + \gamma_{0i}$$

$$\pi_{1i} = \beta_{10} + \beta_{11} \times 年級_i + \beta_{12} \times 性別_i$$

$$\pi_{2i} = \beta_{20} + \beta_{21} \times 年級_i + \beta_{22} \times 性別_i$$

$$\pi_{3i} = \beta_{30} + \beta_{31} \times 年級_i + \beta_{32} \times 性別_i$$

（二）學習自信為自變項，數學成就為依變項

階層 1：隨時間變化

$$數學成就_{ti} = \pi_{0i} + \pi_{1i} \times 時間_{ti} + \pi_{2i} \times 時間^2_{ti} + \pi_{3i} \times 學習自信_{ti} + e_{ti}$$

階層 2：學生固定變項

$$\pi_{0i} = \beta_{00} + \beta_{01} \times 年級_i + \beta_{02} \times 性別_i + \gamma_{0i}$$

$$\pi_{1i} = \beta_{10} + \beta_{11} \times 年級_i + \beta_{12} \times 性別_i$$

$$\pi_{2i} = \beta_{20} + \beta_{21} \times 年級_i + \beta_{22} \times 性別_i$$

$$\pi_{3i} = \beta_{30} + \beta_{31} \times 年級_i + \beta_{32} \times 性別_i$$

（三）學習興趣和學習自信為自變項，數學成就為依變項

階層 1：隨時間變化

$$數學成就_{ti} = \pi_{0i} + \pi_{1i} \times 時間_{ti} + \pi_{2i} \times 時間^2_{ti} + \pi_{3i} \times 學習興趣_{ti} + \pi_{4i} \times 學習自信_{ti} + e_{ti}$$

階層 2：學生固定變項

$$\pi_{0i} = \beta_{00} + \beta_{01} \times 年級_i + \beta_{02} \times 性別_i + \gamma_{0i}$$

$$\pi_{1i} = \beta_{10} + \beta_{11} \times 年級_i + \beta_{12} \times 性別_i$$

$$\pi_{2i} = \beta_{20} + \beta_{21} \times 年級_i + \beta_{22} \times 性別_i$$

$$\pi_{3i} = \beta_{30} + \beta_{31} \times 年級_i + \beta_{32} \times 性別_i$$

$$\pi_{4i} = \beta_{40} + \beta_{41} \times 年級_i + \beta_{42} \times 性別_i$$

《臺灣數學教育期刊》稿約

2013.04.03 編審委員會會議通過
2013.09.27 編審委員會會議修訂通過
2014.09.04 編審委員會會議修訂通過
2017.03.17 編審委員會會議修訂通過
2021.04.09 編審委員會會議修訂通過

壹、《臺灣數學教育期刊》（*Taiwan Journal of Mathematics Education*）（以下簡稱本刊）是國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同發行之期刊，內容以出版數學教育領域相關議題的原創性論文為宗旨。

貳、本刊歡迎符合宗旨的多元型態學術論文，類型如下：

一、實徵性論文（research article）：透過資料收集與分析來探究理論或檢驗假設。

二、回顧性論文（review article）：整合相關之實徵研究，並提出批判性或創發思考的評析。

三、學術瞭望（academy observatory）：針對國內外數學教育理論、議題、新知、研究成果、實務發展、改革趨勢，進行說明、分析、評論、反思或建議。

四、書評（book review）：以導讀、討論、分析、闡釋，或比較，來介紹並評論數學教育領域新出版的重要書籍。

參、撰寫文別及字數如下：

一、實徵性論文與回顧性論文：可以中文或英文撰寫，中文稿件字數以20,000字、英文10,000字為上限（包含論文全文、中英文摘要、圖表、附註、參考文獻、附錄等），並需經正式審查流程（請參見第捌項之說明）。

二、學術瞭望與書評：以中文5,000字為原則，由編輯室邀稿。不經正式審查，但需通過編輯委員會議。

肆、本刊每年發行兩期，分別於四月、十月出刊，並採電子和紙本方式發行。全年徵稿，隨到隨審。

伍、本刊所刊之文稿須為原創性的學術論文之文稿，即未曾投遞或以全論文形式刊登於其他期刊、研討會彙編或書籍。若文稿在送審後自行撤稿，或出現一稿多投、修正稿回覆逾期、侵犯著作權等違反學術倫理等情況，將依下列規則處理：

一、來稿一經送審，不得撤稿。因特殊理由而提出撤稿申請者，案送主編決定；非特殊理由而自行撤稿者，一年內將不再接受該作者的投稿。

二、若文稿被發現一稿多投、侵犯著作權或違反學術倫理等情況，除文稿隨即被拒絕刊登外，一切責任由作者自負，且本刊於三年內不接受該作者來稿，並視情節嚴重程度求償。

三、作者應於發出文稿修正通知的三週內回傳修正稿及修正回覆說明書，逾期視同撤稿。若有特殊情況請先與本刊聯絡。

陸、未經本刊同意，已發表之文章不得再於他處發表。投遞本刊之學術論文須經編審委員會送請專家學者審查通過後予以刊登，被刊登文章之著作財產權歸國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同擁有，文責由作者自負。投稿至《臺灣數學教育期刊》之文章，若經編輯委員推薦且經作者同意，可轉稿至《臺灣數學教師》。

柒、中文文稿格式請參考本期刊論文撰寫體例的說明或已發行之文稿，若為英文撰寫之文稿、引用英文文獻以及數學符號、公式等請參考APA第六版出版手冊。投稿時應注意下列事項：

五、填寫投稿資料

(一) 文稿基本資料。

(二) 通訊作者之姓名、服務單位、職稱、通訊地址、聯絡電話和電子郵件地址。一位以上作者時，非通訊作者只需填寫姓名、服務單位和職稱。

(三) 任職機構及單位：請寫正式名稱，分別就每位作者寫明所屬系所或單位。

(四) 頁首短題（running head）：中文以不超過15個字、英文以不超過40個字元為原則。

(五) 作者註（author note）：說明與本篇研究相關的資訊。

六、除文稿正文外，還需包含中英文摘要，相關規定如下：

(一)中文文稿的中文摘要在前，英文文稿則英文摘要在前。

(二)中文文稿之中文摘要頁內容包括論文題目（粗體20級字、置中）、摘要（不分段，限500字以內）及關鍵詞（以五個為上限，並依**筆畫**順序由少到多排列）；英文摘要頁內容包括 Title（bold, 20 pt, central）、Abstract（不分段，限300字以內）及 Keywords（字詞及順序須與中文關鍵詞相對應）。

(三)英文文稿之英文摘要頁內容包括 Title（bold, 20 pt, central），Abstract（不分段，限300字以內）及 Keywords（以五個為上限，並依**字母**順序排列）；中文摘要頁內容包括論文題目（粗體20級字、置中）、中文摘要（不分段，限500字以內）及中文關鍵詞（字詞及順序須與英文關鍵詞相對應）。

(四)內文格式詳見《臺灣數學教育期刊》論文撰寫體例。

七、若為修正稿，遞交修正的文稿（上述第三點之資料）上請以色字標示修改處，並需依審查意見逐項說明修改內容或提出答辯。

捌、本刊審查流程分為預審與正式審查兩個階段：

一、預審：不符合本刊宗旨、品質要求，或撰寫體例者，逕行退稿或退回請作者修改後再上傳。

二、正式審查：為雙向匿名審查，除基本資料表外，不得出現作者姓名或任何足以辨識作者身份之資料，包括請先省略誌謝。匿名的參考格式為：

(一) 若本文引用作者已發表之文章，須以「（作者，西元年）」或“(Author, Year)”；若引用作者已發表之文章不只一篇，則以「（作者，西元年a）、（作者，西元年b）、……」或“(Author, Year a)、(Author, Year b) 、……”的中文作者姓氏筆畫順序以及外文作者姓氏字母順序排列。

(二) 若在參考文獻中則以「作者（西元年），**期刊刊名**。」或「作者（西元年），**書名**。」、「作者（西元年）。編者，**書名**。」或“Author (Year). *Title of Periodical*.”表示。

引用文獻中包含一位以上的投稿文章作者，其所有著作皆須遵守上述規範。

範例1：「林妙鞠、楊德清（2011）。故事融入小一弱勢學生之補救教學研究。**台灣數學教師(電子)期刊**，**25**，1-16。 doi: 10.6610/ETJMT.20110301.01」一文的作者欲引用該文，文中應以「（作者，西元年）」表示，參考文獻則以「作者（西元年）。**台灣數學教師(電子)期刊**。」表示。

範例2：「李源順（2009）。三階段輔導模式 - 以數學學習領域為例。收錄於鍾靜和楊志強（主編），**優質實習輔導教師的增知賦能**（pp.141-157）。臺北市：國立臺北教育大學。」一文的作者欲引用該文，文中應以「（作者，西元年）」表示，參考文獻則以「作者（西元年）。收錄於鍾靜和楊志強（主編），**優質實習輔導教師的增知賦能**。」

範例3：“ Chang S. L., & Lin, F. L. (2006). Investigations into an elementary school teacher's strategies of advancing children’s mathematical thinking. *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*. *5*, 21-34. doi: 10.6610/ETJMT.20060301.04 ”的作者應以“(Author, Year)”引用該文，參考文獻則以“Author (Year). *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*.”表示。

玖、 文稿透過線上投稿系統（http://tjme.math.ntnu.edu.tw）方式投遞。當文稿被接受，作者需在本刊提供的著作財產權讓與同意書上簽名，以掃描檔或紙本方式寄回。作者應負論文排版完成後的校對之責。被接受刊登之文稿，作者需提供文獻之doi，以及中文參考文獻之英譯資料。被接受刊登的英文文稿，作者需自行負責檢查文稿中的用詞、語法、拼寫、含意和邏輯的正確性，編輯委員僅負責格式上之校對。

壹拾、 期刊助理聯絡郵箱：TJME.taiwan@gmail.com

《臺灣數學教育期刊》研究論文撰寫體例

2013.04.03 編審委員會會議通過
2013.09.27 編審委員會會議修訂通過
2014.09.04 編審委員會會議修訂通過
2017.03.17 編審委員會會議修訂通過

本期刊原則上依循美國心理學會（American Psychological Association）的撰寫格式，中文文稿請參考下面的說明或本刊已發表的文稿，若為英文撰寫之文稿、引用英文文獻以及數學符號、公式等請參考 APA 第六版出版手冊。文稿請使用 Microsoft Word 98 以上之繁體中文文書軟體處理。除另有規定外，中文字型一律採用新細明體，英文字型一律為 Times New Roman。

壹、撰稿格式

一、投稿除需要附上作者基本資料表檔案外，中文稿件內容依序為中文摘要頁（含關鍵字）、英文摘要頁（含關鍵字）、正文（包括圖、表、附註、誌謝、參考文獻）以及附錄（若無必要可省略）；英文稿件之撰寫順序相同，唯中英文摘要頁位置對調。

二、稿件版面以單欄版面橫向印列的A4規格紙張，上下左右各留2.5公分空白，除基本資料表頁外每頁需加註頁碼。文稿字數（包含摘要、正文、圖表、附註、參考文獻、附錄等）中文以20,000字為上限，英文以10,000字為上限。

三、中文摘要頁內容包括論文題目（粗體20級字、置中）、摘要（不分段，限500字以內）、與關鍵字（以五個為上限，並依筆畫順序由少到多排列）。

四、英文摘要頁內容包括論文題目（bold, 20 pt, central），並附英文摘要（不分段，限300字以內）及英文關鍵字（字詞及順序須與中文關鍵字相對應）。

五、除各項標題、表之註記與另起一段之引文外，內文不分中英文均為12級字，單行行距。

六、除另有規定外，中文字型一律採用新細明體，標點符號及空白字為全形字；英文字型一律為Times New Roman。

i. 本期刊為雙向匿名審查，除基本資料表外，不得出現作者姓名或任何足以辯識作者身份之資料。匿名的參考格式為：

(一) 若本文引用作者已發表之文章，須以「（作者，西元年）」或“(Author, Year)”；若引用作者已發表之文章不只一篇，則以「（作者，西元年a）、（作者，西元年b）、……」或“(Author, Year a)、(Author, Year b) 、……”的中文作者姓氏筆畫順序以及外文作者姓氏字母順序排列。

(二) 若在參考文獻中則以「作者（西元年），**期刊刊名**。」或「作者（西元年），**書名**。」、「作者（西元年）。編者，**書名**。」或“Author (Year). *Title of Periodical*.”表示。

引用文獻中包含一位以上的投稿文章作者，其所有著作皆須遵守上述規範。

範例1：「林妙鞠、楊德清（2011）。故事融入小一弱勢學生之補救教學研究。**台灣數學教師(電子)期刊**，**25**，1-16。」一文的作者欲引用該文，文中應以「（作者，西元年）」表示，參考文獻則以「作者（西元年）。**台灣數學教師(電子)期刊**。」表示。

範例2：「李源順（2009）。三階段輔導模式 - 以數學學習領域為例。收錄於鍾靜和楊志強（主編），優質實習輔導教師的增知賦能（pp.141-157）。臺北市：國立臺北教育大學。」一文的作者欲引用該文，文中應以「（作者，西元年）」表示，參考文獻則以「作者（西元年）。收錄於鍾靜和楊志強（主編），優質實習輔導教師的增知賦能。」

範例3："Chang S. L., & Lin, F. L. (2006). Investigations into an elementary school teacher's strategies of advancing children's mathematical thinking. *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*. *5*, 21-34."的作者應以"(Author, Year)"引用該文，參考文獻則以"Author (Year). *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*."表示。

貳、正文

一、正文原則上包括「緒論」、「文獻探討」、「方法」、「結果」、「討論」與「參考文獻」等六部分，「緒論」含研究動機與目的、假設或研究問題等內容。前述格式為原則性規定，作者可依論文性質斟酌改變。

二、標題的層次、選用次序與字體為：

壹、16級字、粗體、置中

一、14級字、粗體、靠左對齊

(一)12級字、粗體、靠左對齊

1. 12級字、粗體、靠左對齊

(1)內縮1.5字元、12級字、粗體、靠左對齊

A.<u>內縮1.5字元、12級字、底線、靠左對齊</u>

1. 第一級標題為「緒論」、「文獻探討」、「方法」、「結果」、「討論」與「參考文獻」等，各層次標題選用次序為：壹、一、(一)、1、(1)、A 最多以六個層次為原則。
2. 第一、二、三、四、五層次標題請使用粗體。
3. 第一層次標題使用 16 級字，第二層次標題使用 14 級字，其餘 12 級字。
4. 第一層次標題置中，其餘靠左對齊。
5. 第一、二、三層次標題為單行間距，並與前後段距離均為 1 行；第四、五、六層次標題為 12 點最小行高，並與前後段距離均為 0.5 行。
6. 第五、六層次標題內縮 1.5 字元，而第六層次標題加上底線。
7. 標題請用字簡明，勿用句號或冒號。若逢頁尾最後一行，應移至次頁首行。

三、英文統計符號須用斜體字，例如*F*(1, 53) = 10.03, *t*, *F*, *M*, *SD*, *N*, *r*, *p*等。希臘字母則不要斜體，例如：α, β, ε, η。

四、資料分析結果的有效位數須全文一致。恆小於「1」的數值，例如*KR20*, α, *p*等統計數值的個位數字「0」請省略。

五、文獻資料的引用一律採取文內註釋。引用文獻時，必須有作者姓名（中文作者姓名全列，英文作者僅列姓氏）及論文年份（中文文獻及英文文獻均使用西元年份）。相同作者在同一段中重複被引用時，第一次須寫出年代，第二次以後，在不造成混淆的情況下年代可省略。若在不同段落中重複引用時，則仍須完整註明。本文中引用之文獻必須在參考文獻中列出。文獻引用格式於下：

1. 當作者為一人時，格式為作者（年代）或（作者，年代）、Author (Year)或(Author, Year)。
2. 當作者為二人時，每次引用均須列出全部作者，在行文中，以「與」連接；在括號和參考文獻中，中文以頓號「、」，西文以“&”連接。格式為作者 1 與作者 2（年代）或（作者 1、作者 2，年代）、Author 1 與 Author 2 (Year)或(Author 1 & Author 2, Year)。
3. 當作者為三至五人時，第一次引用時所有作者均須列出，第二次以後僅需寫出第一位作者並加「等」字或“et al.”。在同一段落中重複引用時，第一次須完整註明，第二次以後僅需寫出第一位作者再加「等」字或“et al.”，可省略年代。若在不同段落中重複引用，則僅需寫出第一位作者再加「等」字或“et al.”，但仍需註明年代。
4. 當作者為六人以上時，每次引用都只列第一位作者並加「等」字或“et al.”。
5. 當作者或作者之一為機構時，第一次引用應寫出機構全名，並以中括號註明慣用之簡稱，第二次之後即可使用簡稱替代，並依上述一至四點處理。例如：行政院國家科學委員會（國科會，2011）或（行政院國家科學委員會[國科會]，2011）、National Science Council (NSC, 2011)或(National Science Council [NSC], 2011)。

6. 當文獻為翻譯作品時，以原作者為主要作者，中文翻譯的文獻須註明原著出版年代，接續註明譯者姓名與譯本出版年代，作者與譯者之人數及其引用格式的規範與一般作者相同。英文翻譯文獻則僅須註明原著出版年代和譯本之出版年代，中間以斜線區隔，不須註明譯者姓名，作者人數及其引用格式的規範與一般作者相同。例如：Skemp (1987/1995)。
7. 當西文作者同姓時，須引用全名，且採「名在前姓在後」方式書寫。例如：A. J. Bishop (1985)和 E. Bishop (1970) 都認為……。
8. 在同一括號內同時引用多位作者的文獻時，依作者姓名筆畫（英文用字母）排序；若同時有中英文作者，則先列中文作者。不同作者之間用分號分開，相同作者不同年代之文獻用逗號隔開年代。
9. 在文章中引用同一作者在同一年的多篇著作時，應在年代後加註 a, b, c……以茲區別。
10. 當引用文獻需標出頁數時，西文單頁為“p.”、兩頁以上為“pp.”，中文則以「頁」表示。例如：（洪萬生，2006，頁 167）、(Dubinsky, 1991, p. 102)、(Heath, 1956, pp. 251-252)。
11. 當引用之觀念或陳述，來自第二手資料時，應將原始資料和第二手資料同時註明。在括號中首先列出原始作者與年代，接續中文以「引自」，西文以“as cited in”註明第二手資料之作者與年代，並說明出處頁碼。例如：（Garner, 1988，引自蘇宜芬、林清山，1992，頁 246）、Peirce (1968, as cited in Sáenz-Ludlow, 2002, p. 289)
12. 引文超過中文 80 字（西文 40 字），則須另起一段，並改為標楷體 10 級字，左右縮排 2 字元，與正文間前後空一行，且在引文前後無需用引號。例如：

Schoendfeld (1992, p.335) 有一段話可以用來討論：

> 數學從其創生之始就是一種社會活動，在此活動中一群訓練有素的實踐者（數學科學家）從事組型的科學──基於觀察、研究和實驗，有系統地試圖要決定一個公理化或理論化之系統中的規律的性質和原理（此為純數學），或者從實在世界物體中抽象出來之系統的模式（此為應用數學）。數學的工具是抽象、符號表徵、和符號操作。然而學會運用這些工具，其意義乃謂一個人以數學方式思考而非如一個工匠使用工具。以數學的方式思考就是：（1）形成數學觀點──珍視數學與抽象的歷程，並偏愛其應用，（2）發展此學科的工具的能力，並應用這些工具以協助我們理解結構──數學的建構意義（mathematical sense-making）。

六、圖與表格：

1. 圖下方應置中書明圖序及圖之標題；表格上方應置中書明表序及表名，圖表序號均使用阿拉伯數字，且圖表序與圖名之間空一個中文字（或 2 個英文字母）。各圖表之標題及說明宜精簡，但不宜精簡至看正文才能知此圖的訊息。
2. 表格之製作以簡明清楚、方便閱讀為原則，頂端與底端採用粗線(1.5pt)繪製，中間與兩邊不必畫線。表序須配合正文以阿拉伯數字加以編號，並書明表之標題。
3. 每一個圖表的大小以不超過一頁為原則，如超過時，須在續表之表序後加上（續）/ (continued)，但無須重現標題，如：表 1（續）或 Table 1 (continued).。
4. 圖與表格應配合正文出現，與前後段空一行間距。圖及表格內容若有解釋的必要，可作註記。註記與圖表之左邊界切齊，列在圖、表之下方，每註另起一行，按編號順序排列。

七、誌謝與附註：

1. 誌謝應力求簡短扼要，置於正文之後。誌謝二字為 16 級字、粗體、置中。誌謝文另行起、第一行內縮 2 字元、12 級字。
2. 附註應置於參考文獻之前，每項附註均另起一行，並以阿拉伯數字編號，依順序排列。

參、參考文獻

一、正文中引用過之文獻，必須全部列舉在參考文獻內，且不得列出未引用之文獻，接受刊登之論文，作者應另提供中文參考文獻之英譯資料。

二、每個作者第一行由第一格開始寫，第二行中文內縮三個字；英文內縮六個字母。中文參考文獻先寫作者姓名（年代），再用「。」接續「篇名」，「。」後再寫「期刊名稱」或「書名」以及「頁碼」。中文參考文獻「書名」或「期刊名及卷數」以粗體表示，其餘（含期數）維持標準樣式。英文參考文獻先寫作者姓名（年代），再用「.」接續「篇名」，「.」後再寫「期刊名稱」或「書名」以及「頁碼」。英文參考文獻「書名」或「期刊名及卷數」以斜體表示，其餘（含期數）維持標準樣式。即：

作者（年代）。文章篇名。**期刊刊名**粗體，**卷**粗體 (期若無則可省略)，xxx-xxx。

Author, A. A. (Year). Title of article. *Title of Periodical*斜體, *volume*斜體 (issue若無則可省略), xxx-xxx.

三、各種不同形式的中英文參考文獻的格式如下：

1. 期刊

中文格式：作者（年代）。文章篇名。**期刊刊名**，**卷** (期)，xxx-xxx。

英文格式：Author, A. A. (Year). Title of article. *Title of Periodical*, *volume*(issue), xxx-xxx.

2. 書籍

中文格式：作者（年代）。**書名**（版次若有須註記）。出版地：出版者。

英文格式：Author, A. A. (Year). *Title of book* (Edition). Location: Publisher.

3. 編輯著作：中文編輯著作以編者之姓名起始，其後以「編」、「編著」等標示其著作方式，以資區別。英文編輯著作以編者之姓氏起始，其後則為編者名字的縮寫，再加上“Ed.”、“Eds.”、或“Comp.”，以資區別其著作方式。

中文格式：編者編（年代）。**書名**（冊次若無則可省略）。出版地：出版者。

英文格式：Editor, A. A. (Ed.). (Year). *Title* (Volume若無則可省略). Location: Publisher.

4. 翻譯作品

中文格式：原作者（譯本出版年）。**翻譯書名**（譯者譯）。出版地：出版者。（原作出版於xxxx年）

英文格式：Author, A. A. (Year). *Title* (B. B. Translator, Trans.). Location: Publisher. (Original work published Year).

5. 書中的文章

中文格式：作者（年代）。文章名稱。收錄於編著姓名（編著），**書名**（冊次若無則可省略，頁xx-xx）。出版地：出版者。

英文格式：Author, A. A. (Year). Title of article. In B. B. Editor (Ed.), *Title of Book* (Edition若無則可省略, pp. xx-xx). Location: Publisher.

6. 研究計畫報告：若引述的報告是取自 ERIC (the Educational Resources Information Center)或 NTIS (the National Technical Information Service)，則在最後須以括號註明 ERIC 或 NTIS 的編號。

中文格式：作者（年代）。**報告名稱**（報告編號若無則可省略）。出版地：出版者。

英文格式：Author, A. A. (Year). *Title of report* (Report No.若無則可省略). Location: Publisher.

7. 研討會發表之論文（未出版）

中文格式：作者（年，月）。**論文標題**。發表於會議名稱。會議地點：舉辦單位若無則可省略。

英文格式：Author, A. A. (Year, month). *Title of paper*. Paper presented at the Title of the Symposium. Location, Country.

8. 未出版之學位論文

中文格式：作者（年代）。**論文名稱**。未出版之博／碩士論文，學校暨研究所名稱，大學所在地。

英文格式：Author, A. A. (Year). *Title of doctoral dissertation/master thesis*. Unpublished doctoral dissertation/master thesis, Name of University, Location.

9. 網路資源

中文格式：作者若無則可省略（年月日若無則可省略）。**網頁標題**。檢自URL。

英文格式：Author, A. A. (Year, month day若無則可省略). *Title of webpage*. Retrieved from URL.

《臺灣數學教育期刊》投稿基本資料表

<table>
<tr><td rowspan="2" colspan="2">篇名</td><td colspan="4">(中文)</td></tr>
<tr><td colspan="4">(英文)</td></tr>
<tr><td colspan="2">總字數</td><td colspan="4">稿件全文 (含中英文摘要、正文、參考文獻、附錄等) 共＿＿＿＿＿字。</td></tr>
<tr><td rowspan="2" colspan="2">關鍵詞(最多五個)</td><td colspan="4">(中文)</td></tr>
<tr><td colspan="4">(英文)</td></tr>
<tr><td colspan="2">頁首短題
(running head)</td><td colspan="4">(請以不超過15個中文字或40個英文字元為原則。)</td></tr>
<tr><td rowspan="8">通訊作者資料</td><td>姓名</td><td colspan="2">(中文)</td><td colspan="2">(英文)</td></tr>
<tr><td>職稱</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">服務單位
(或就讀校系)</td><td colspan="4">(中文)</td></tr>
<tr><td colspan="4">(英文)</td></tr>
<tr><td>E-mail</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>通訊地址</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">電話</td><td colspan="4">辦公室：(　　)　　　　　　　　分機</td></tr>
<tr><td colspan="4">行動電話：</td></tr>
<tr><td colspan="6">如為共同著作，請詳填以下共同著作人欄位，非共同著作則不需填寫。(以下欄位不敷填寫時請自行增加)</td></tr>
<tr><td colspan="2">共同著作人</td><td>姓名</td><td colspan="2">服務單位(或就讀校系)</td><td>職稱</td></tr>
<tr><td rowspan="2" colspan="2">第一作者
(☐通訊作者)</td><td>(中文)</td><td colspan="2">(中文)</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>(英文)</td><td colspan="2">(英文)</td></tr>
<tr><td rowspan="2" colspan="2">第二作者
(☐通訊作者)</td><td>(中文)</td><td colspan="2">(中文)</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>(英文)</td><td colspan="2">(英文)</td></tr>
<tr><td rowspan="2" colspan="2">第三作者
(☐通訊作者)</td><td>(中文)</td><td colspan="2">(中文)</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>(英文)</td><td colspan="2">(英文)</td></tr>
<tr><td colspan="2">作者註
(可複選)</td><td colspan="4">☐ 本篇論文為碩、博士論文改寫，指導教授為＿＿＿＿＿＿＿。
☐ 本篇論文曾於＿＿＿＿＿＿＿發表。
☐ 本篇論文獲國科會補助，計劃編號：＿＿＿＿＿＿＿。
☐ 本篇論文投稿專刊：＿＿＿＿＿＿＿。</td></tr>
<tr><td colspan="6">1.茲保證本論文符合研究倫理。
2.茲保證所填基本資料正確，文稿未曾以任何方式出版或發行，且無一稿多投、違反學術倫理，或違反著作權相關法令等事情。
3.茲瞭解並同意貴刊著作權授權規範，並保證有權依此規範進行相關授權。
4.茲保證文稿已經所有作者同意投稿至《臺灣數學教育期刊》。

填表人：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　　　填表日期：＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日</td></tr>
</table>

《臺灣數學教育期刊》著作財產權讓與同意書

茲同意投稿至國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會共同發行的《臺灣數學教育期刊》之一文，名稱為：

____

立書人聲明及保證本著作為從未出版之原創性著作，所引用之文字、圖表及照片均符合著作權法及相關學術倫理規範，如果本著作之內容有使用他人以具有著作權之資料，皆已獲得著作權所有者之（書面）同意，並於本著作中註明其來源出處。著作人並擔保本著作未含有毀謗或不法之內容，且絕未侵害他人之智慧財產權，並同意無償授權國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會於本著作通過審查後，以論文集、期刊、網路電子資料庫等各種不同方法形式，不限地域、時間、次數及內容利用本著作，並得進行格式之變更，且得將本著作透過各種公開傳輸方式供公眾檢索、瀏覽、下載、傳輸及列印等各項服務。國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會並得再授權他人行使上述發行之權利。惟著作人保有下列之權利：

1.本著作相關之商標權及專利權。

2.本著作之全部或部份著作人教學用之重製權。

3.出版後，本著作之全部或部份用於著作人之書中或論文集中之使用權。

4.本著作用於著作人受僱機關內部分送之重製權或推銷用之使用權。

5.本著作及其所含資料之公開口述權。

著作人同意上述任何情形下之重製品應註明著作財產權所屬，以及引自《臺灣數學教育期刊》。

如果本著作為二人以上之共同著作，下列簽署之著作人已通知其他共同著作人本同意書之條款，並經各共同著作人全體同意，且獲得授權代為簽署本同意書。如果本著作係著作人於受僱期間為雇用機構所作，而著作權為讓機構所有，則該機構亦同意上述條款，並在下面簽署。

本著作之著作財產權係屬（請勾選一項）

☐ 著作人所有

☐ 著作人之僱用機構所有

立同意書人（著作人或僱用機構代表人）簽章：______________________

著作人姓名或僱用機構名稱：______________________

（正楷書寫）

中華民國　　年　　月　　日

《臺灣數學教育期刊》編審辦法

2013.04.03 編審委員會會議通過

壹、《臺灣數學教育期刊》（以下簡稱本刊）之審查包括預審、正式審查兩個階段：

一、預審：檢視來稿是否符合本刊稿約之宗旨、論文品質以及進行論文格式之審查；

二、正式審查：審查委員與投稿者採雙向匿名方式進行。主編就審查委員的回覆意見及論文品質決定接受或拒絕文稿，或是需要作者修改後再進行審查或檢核。需要「修正後再審」之稿件，交原審查委員或委由主編委任進行再審。所有文稿最後須經編輯委員會審查通過後，方能刊出。

稿件之最終審查決定以投稿後六個月內完成並通知作者。

貳、審查委員針對稿件之學術原創性、正確性及價值等條件從嚴審查，以確保所刊文稿的品質。審查委員可提供作者具建設性的修改建議，以利文稿的修正及品質提昇，並以下列其中一種的刊登建議回覆：

一、「同意刊登」：論文不需要修改可作原稿刊登。

二、「修正後刊登」：通知作者依審查意見修改或答辯後刊登。

三、「修正後再審」：要求作者依審查意見修改或答辯，修正稿由編輯委員會送原審查委員或委由主編委任進行再審。

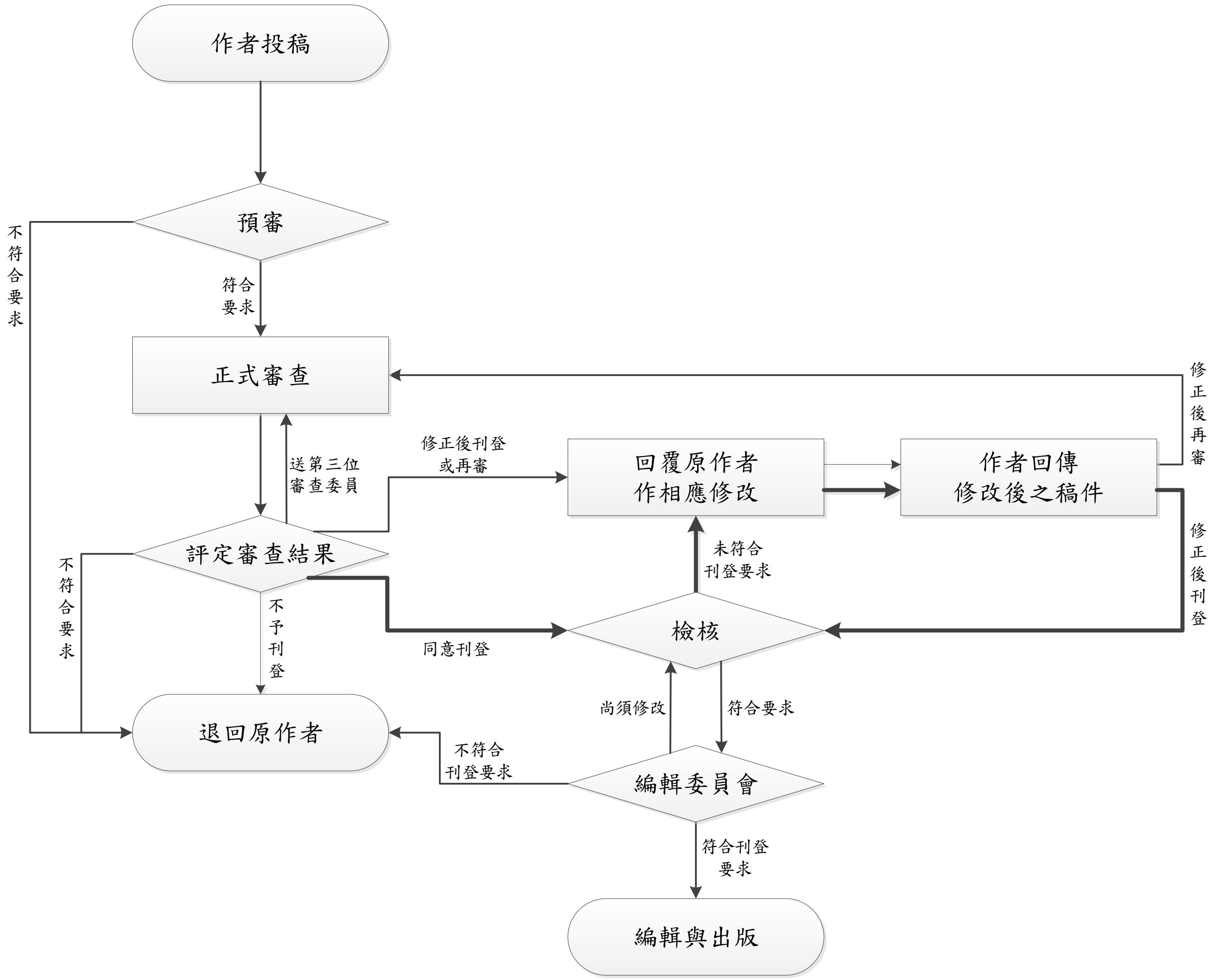
四、「不宜刊登」：通知作者退稿。

稿件審查的時間以三週為限，若超過期限，編輯委員會將去函提醒審查委員儘速審查，若逾六週審查者仍未寄回審查意見，則編輯委員會得再聘請另一位審查者取代之。每位審查者皆為無償審查，但會在每年第二期期刊中列名致謝。

參、本刊主編、副主編或編輯委員如投稿本刊，該委員應迴避推薦審查委員名單、參與審查結果決定之討論或經手處理與個人稿件有關的資料(包括審稿者資料、推薦審查委員名單、審稿意見等)。

肆、本刊預計每年四月和十月出版，稿件刊登順序由主編原則上依文稿性質與投稿時間之先後次序決定之，而第一作者的文稿以一篇為限，超過篇數之稿件留至下期刊登。

伍、本刊稿件之編審流程如下圖所示：


作者投稿
預審
不符合要求
符合要求
正式審查
送第三位審查委員
修正後刊登或再審
回覆原作者作相應修改
作者回傳修改後之稿件
修正後再審
評定審查結果
不符合要求
不予刊登
同意刊登
未符合刊登要求
修正後刊登
檢核
尚須修改
符合要求
退回原作者
不符合刊登要求
編輯委員會
符合刊登要求
編輯與出版

Taiwan Journal of Mathematics Education Vol. 8, No. 2 October, 2021

Publisher	Department of Mathematics, National Taiwan Normal University Taiwan Association for Mathematics Education	

Address	No.88 Sec. 4, Ting-Chou Rd., Taipei City, Taiwan, R.O.C. Department of Mathematics, National Taiwan Normal University "*Taiwan Journal of Mathematics Education*"
TEL	886-2-7749-3678
FAX	886-2-2933-2342
E-mail	TJME.taiwan@gmail.com
Website	http://tjme.math.ntnu.edu.tw/contents/contents/contents.asp?id=21

This journal was subsidized by the Humanities and Social Science Research Center of the Ministry of Science and Technology in 2021.