

余孟儒、賴孟龍（2024）。

五歲與六歲幼兒加減法可逆概念的理解。

臺灣數學教育期刊，11（2），1-28。

doi: 10.6278/tjme.202410_11(2).001

五歲與六歲幼兒加減法可逆概念的理解

余孟儒^{1,2} 賴孟龍²

¹雲林縣義峰高級中學

²國立嘉義大學幼兒教育學系

加減法可逆概念係指一個起始量在加減相同數量之後，不會改變原本的數量，即 $a+b-b=a$ ，為加減運算邏輯中相當重要的概念（Baroody & Lai, 2007）。過去研究大多使用單一工具探究幼兒在加減法可逆原則的理解程度，然而單一工具有其限制，故本研究同時採用兩種任務作為測驗工具，客觀地釐清五歲與六歲幼兒在加減法可逆概念的理解情形與差異。研究對象為五歲與六歲幼兒各 20 名，材料為代數推理（森林小鳥、池塘青蛙）與運算捷徑任務（籃子蘋果、水草小魚），四種情境皆含「可逆題」($a+b-b$) 與「標準題」($a+b-c$)，測驗題目以情境式動畫呈現。研究發現，五歲與六歲幼兒的加減法可逆概念理解程度在代數推理及運算捷徑任務之間表現類似，已經達到基礎理解程度，而且在年齡之間並無表現差異。

關鍵字：加減法可逆原則、代數推理、情境式動畫、運算捷徑

通訊作者：賴孟龍，e-mail：laimenglung@gmail.com

收稿：2024 年 4 月 13 日；

接受刊登：2024 年 10 月 9 日。

Yu, M. R., & Lai, M. L. (2024).

Comprehension of addition-subtraction inverse principle in 5- and 6-year-old children.

Taiwan Journal of Mathematics Education, 11(2), 1–28.

doi: 10.6278/tjme.202410_11(2).001

Comprehension of Addition-Subtraction Inverse Principle in 5- and 6-year-old Children

Meng-Ru Yu^{1,2} Meng-Lung Lai²

¹ Yi-Feng Senior High School

² Department of Early Childhood Education, National Chiayi University

Addition-Subtraction Inverse Principle (ASIP), understanding that adding and subtracting the same number will leave the original amount unchanged, plays an important role in children's arithmetic development (Baroody & Lai, 2007). Previous studies on ASIP mostly adopted either computational shortcut tasks or algebraic-reasoning tasks, in which the former was targeted on procedural knowledge and might overestimate children's ASIP and the latter on conceptual knowledge and might underestimate children's ASIP. In this study, we examined children's comprehensive understanding of ASIP using both computational shortcut tasks and algebraic-reasoning tasks, which were presented through 4 animations designed to attract these preschoolers' attention. By doing so, we could clearly reveal children's unbiased understanding of the ASIP. Twenty 5-year-old and 6-year-old children ($N = 40$) from central Taiwan participated. Instruments included algebraic-reasoning tasks (e.g., forests and birds) and computational shortcut tasks (e.g., baskets and apples), in which 6 inversion trials and 6 standard trials were created for each scenario. The results showed that Taiwanese 5-year-old and 6-year-old children's understanding of ASIP was similar on both tasks and these participants already exhibited marginal competence on ASIP. Interestingly, participants performed better on the inversion trials than on the standard trials in the computational shortcut tasks while performing similarly on both trials in the algebraic-reasoning tasks. Finally, educational implications and future research questions are provided.

Keyword: addition-subtraction inverse principle, algebraic-reasoning task, animations, computational-shortcut task

Corresponding author : Meng-Lung Lai , e-mail : laimenglung@gmail.com

Received : 13 April 2024;

Accepted : 9 October 2024.

壹、緒論

幼兒的成長歷程中，常透過平時生活中接觸的各項數學經驗，發展出大量的非正式數學知識（Baroody & Wilkins, 1999），進而學習與探索各種數學概念。在幼兒日常生活中，研究者觀察到幼兒除了能算出班級慶生會中的同學數量，還能分配給每一個人兩塊餅乾；在限制六個人操作的學習區中，幼兒能觀察到已經有四位幼兒進入學習區的情況之下，尚有兩個名額的空間；在戶外活動時，幼兒能觀察到不同種類的花朵有不同數量的花瓣，因此比賽誰能夠最快蒐集到 20 片花瓣。上述例子在說明生活中有許多經驗可以啟發幼兒的數學概念，奠定幼兒未來數學學習的基礎，對未來數學理解能力的影響相當大（Eaves et al., 2019; Robinson et al., 2006; Sherman & Bisanz, 2007; Wong et al., 2021）。

學齡前的數學經驗有助於發展早期的數概念，過去的研究顯示三歲到五歲半的幼兒已經開始能理解一對一對應、基數概念、口頭計數、辨認數字、甚至簡單的加法與減法運算等基礎數學概念（Litkowski et al., 2020）。此外，三歲到四歲的幼兒能夠透過觀察題目來判斷使用加法或減法，並進行估算與驗算（Zur & Gelman, 2004），甚至能夠運用數數策略來解決簡單的小數量加減法問題（張麗芬，2005），可見三到四歲幼兒在計數和算術原理已經具備基礎的理解。

然而，雖然幼兒有基礎加法與減法的概念，但並不代表他們能完全理解與靈活運用加法與減法，唯有當幼兒能了解加減法之間的可逆（inverse）關係，才算完全理解加法與減法的概念（Sherman & Bisanz, 2007）。換言之，理解加減法可逆原則為學齡前幼兒學習算術原理的關鍵，有助於學習結合律（associative law）和分配律（distributive law）等重要的數學定律（Eaves et al., 2019; Robinson et al., 2006）。

加減法可逆原則（起始數量在加減相同數量之後，不會改變原本的數量，即 $a+b-b=a$ ）是一個相當複雜的概念，除了本身包含許多運算原則，也影響其他數學概念的發展（Wong et al., 2021）。過去研究顯示，甚至三歲幼兒就已經能察覺到加減法可逆原則（Sherman & Bisanz, 2007），且隨著年齡發展與經驗累積，學齡前幼兒漸漸習得加減法可逆原則（Canobi et al., 2002）。除了年齡的因素之外，學者們進一步探討影響加減法可逆原則表現的因素。例如，Ching（2023）考量可逆題（ $a+b-b=a$ ）與標準題（ $a+b-b=a$ ），以及具體物與數字符號等變項對幼兒加減法可逆原則表現的影響，Ching 發現五歲幼兒只有在可逆題中顯示具體物的表現優於符號的現象，而標準題則無此現象。由此可知，幼兒的加減法可逆原則表現會受到年齡、題型與表徵的影響，幼兒可透過具體物的表徵方式提升加減法可逆原則的表現。此外，近年來有學者發現情境式動畫對學習的益處，不但有助於幼兒使用有效的策略來解題（Yamana & Inoue, 2006），還能提升幼兒的學習興趣與增進記憶力及專注度（Birisci et al., 2010; Handayani et al., 2020），因此，本研究使用「情境式動畫」探究五歲與六歲幼兒在加減法可逆原則的表現。

過去有許多學者（Baroody & Lai, 2007; Bryant et al., 1999; Gilmore & Bryant, 2006; Lai et al., 2008; Rasmussen et al., 2003; Siegler & Stern, 1998）探究幼兒在加減法可逆概念的理解與表現時，大多使用單一工具（代數推理任務或是運算捷徑任務）來進行測驗，因而導致可能高估或是低估幼兒的能力（Baroody & Lai, 2007），故本研究將採用兩種任務以更能全面呈現幼兒在加減法可逆概念的理解程度。

綜上所述，加減法可逆概念的發展對幼兒未來的學習極為重要，由於五歲與六歲幼兒已具備基本加法與減法的運算能力，因此若能在學齡前階段掌握其加減法可逆概念的發展程度，則有助於幼小銜接，提升未來正式教育的數學學習成就。基於上述動機，本研究的目的為：一、探究五歲與六歲幼兒之加減法可逆概念的理解程度差異；二、探究五歲與六歲幼兒在代數推理及運算捷徑任務之加減法可逆概念的答對率差異；三、探究五歲與六歲幼兒在可逆題型與標準題型的答對率及答題速度。

貳、文獻探討

一、加減法可逆原則的相關研究

加減法可逆原則，係指一個起始量在加減同一個數量之後，最後得到的數量不變，如 $a+b-b = a$ ，為加減運算邏輯中相當重要的概念（Baroody & Lai, 2007）。Sherman 與 Bisanz（2007）指出，加減法可逆原則是理解算術的重要關鍵，當幼兒了解加法與減法間的可逆關係，才算完全理解加減法的概念；換句話說，理解加減法可逆原則代表能夠靈活運用加法與減法的概念，明白數量能夠分解與合成（如： $a+b = c$ ，所以 $c-b = a$ ），以及進一步了解數量中部分—部分—整體（part-part-whole）的關係（Bryant et al., 1999; Ding & Auxter, 2017）。

此外，Robinson 等人（2006）及 Eaves 等人（2019）發現若能理解加減法可逆原則，將對彈性使用結合律（associative law）解題有幫助。例如「 $27+8-4 = \square$ 」，先計算「 $8-4$ 」再加上 27，不需非得由左至右的機械化運算。Siegler（2006）進而探討兒童在加減法可逆原則的學習歷程，研究結果發現兒童在處理加減法可逆問題時使用了計算、逆反（negation）及捷徑（shortcut）等策略，其中計算策略花費較長的時間且正確率較低，逆反策略所花費的時間縮短、正確率提升，而捷徑策略則能在短時間內說出正確答案。然而，臺灣的教育體系中，在國小數學課程中才會開始正式出現加減法運算的題型，那麼在進入國小之前，幼兒是否能夠具備如此重要的概念呢？

有關幼兒在「加減法可逆原則」的發展，一直是發展心理學者相當重視的議題，直至今日，仍陸續有許多研究在探討此重要的數學概念。依據 Piaget（1964）的觀察與研究，認為學齡前幼兒尚未發展出可逆性之邏輯思考，但從近代學者的研究結果看來，學齡前階段就能開始發展可逆概念的雛形（Baroody & Lai, 2007; Bryant et al., 1999; Gilmore & Bryant, 2006; Lai et al., 2008; Rasmussen et al., 2003; Siegler & Stern, 1998）。

綜上所述，本研究欲探討幼兒在進入國民小學前的可逆概念發展情形，以及其理解程度有多深？過去探討「加減法可逆原則」發展之研究的主要研究工具為代數推理與運算捷徑任務，詳細說明如下。

（一）代數推理任務（Algebraic-Reasoning Tasks）的相關研究

代數推理任務的特色為受試者使用邏輯推理的方式來判斷，在加減某個數量之後，結果量是否與起始量一樣多；例如，動畫中呈現樹上原本有 5 隻小鳥，飛進來 2 隻小鳥之後，再飛出去 2 隻小鳥，最後請受試幼兒回答樹上的小鳥跟原本比起來，一樣多還是不一樣多？Baroody 與 Lai（2007）使用代數推理概念設計實驗，透過覆蓋物品的題目來探究 48 位四至六歲的幼兒對加減法可逆原則的理解；研究結果發現只有 1 位四歲幼兒能夠正確回答，而五歲幼兒有 25% 的正確率，直到六歲幼兒達到 37.5% 的正確率，代表幼兒在「加減法可逆原則」的理解能力會隨著年齡成長而發展。

此外，Lai 等人（2008）利用代數推理任務設計加減法可逆測驗，將 60 位四歲與五歲幼兒分為實驗組與控制組，利用具體物，設計純加法、純減法及混和加減法的題目進行八週的訓練實驗。研究結果發現，四歲幼兒在前測中只有 3.3% 的正確率，而在培訓後的表現雖然還是不佳，但是仍明顯優於控制組；五歲幼兒在前測中的正確率為 33.3%，在培訓後進步為 75% 的正確率。因此，研究者推論五歲幼兒的表現明顯優於四歲幼兒，也具有更豐富的學習潛力。

將上述研究與過去加減法可逆概念的相關研究（Bryant et al., 1999; Gilmore & Bryant, 2006; Rasmussen et al., 2003）相較，例如，Rasmussen 等人（2003）利用運算捷徑任務探究四歲與六歲幼兒的可逆概念，發現四歲幼兒的答對率為 50%，六歲幼兒的答對率為 75%，而在代數推理任務的研究中，四歲幼兒只有 1 位答對，六歲幼兒的答對率為 37.5%（Baroody & Lai, 2007），可以發現同齡幼兒在運算捷徑任務的表現較佳，換言之，以代數推理任務評估幼兒的加減法可逆能力有低估之虞，可能有以下原因：一、對幼兒來說屬於相對陌生的推理形式；二、需要仔細關注轉換關係；三、需要理解任務重點為「結果量與起始量的比較」，而非單純使用計算來回答「結果量」（Baroody & Lai, 2007）。

（二）運算捷徑任務（Computational Shortcut Tasks）的相關研究

運算捷徑任務的特色為受試者若已習得加減法可逆原則，就能省略繁瑣的運算步驟，在短時間內（若反應時間少於三秒則判斷為使用可逆概念解題）正確地說出答案。過去，Bryant 等人（1999）透過可逆題與標準題檢視年齡、加減順序及加減數量大小對幼兒可逆概念的影響，研究結果發現，年齡較大的幼兒表現較佳，而且幼兒在先加後減和先減後加題目之間的表現差異不大；此外，加減不同數量對於可逆題並無影響，而是在標準題的表現有顯著差異。無獨有偶，Rasmussen 等人（2003）使用一對一訪談方式，設計可逆題（ $a+b-b$ ）與標準題（ $a+b-c$ ）探究 48 位四歲與六歲幼兒是否能運用可逆原則回答問題，研究結果顯示四歲幼兒在可逆題的答對率為 50%，六歲幼兒在可逆題的答對率為 75%，而且全體受試

幼兒在可逆題的答對率皆高於標準題。研究者認為四歲幼兒似乎能意識到加減法可逆原則，但仍尚未穩定理解加減法可逆原則。為了探究幼兒在不同形式材料的加減法可逆題型的表現，Gilmore 與 Bryant (2006) 使用數字、文字及圖片呈現測驗題目來探究 59 位六歲與七歲幼兒的答題表現，研究結果發現受試幼兒在圖片形式材料中更能運用加減法可逆原則解題，且可逆題的表現優於標準題。

除此之外，賴孟龍等人 (2022) 進而探究學齡前幼兒在加減法可逆原則的習得歷程，透過微觀發展論設計運算捷徑任務，將 34 位五歲幼兒分組為 16 位接受全部為可逆題 ($a+b-b$) 的一般組及 18 位接受一半可逆題與一半標準題 ($a+b-c$) 的助長組，進行兩個月的實驗，實驗以情境式動畫進行，共分為七個階段，包含前測、加減法練習與後測。研究結果發現，雖然助長組能比一般組更快發現加減法可逆原則，但兩組幼兒的後測表現皆優於前測表現，代表密集的可逆題練習有助於幼兒在加減法可逆原則的認知發展。

過去研究所使用的單一測驗工具有各自的限制，比如代數推理任務需要運用邏輯思考來解題，Baroody 與 Lai (2007) 認為，這種推理模式對幼兒來說較新穎，故幼兒可能因為對此任務較陌生而影響表現，進而導致研究者低估幼兒在加減法可逆概念的能力；而運算捷徑任務需要依賴運算過程來解題，受試者可能通過計算的方式，而非使用加減法可逆概念來得知答案 (Baroody et al., 2009; Bryant et al., 1999; Klein & Bisanz, 2000)，進而導致研究者高估受試者的表現。為了能夠更完整了解幼兒對加減法可逆概念的發展與理解程度，本研究同時檢視五歲與六歲幼兒在代數推理（運用概念性知識解題）與運算捷徑（運用程序性知識解題）任務的表現，透過可逆題與標準題探討五歲與六歲幼兒在加減法可逆原則的理解程度。

二、情境式動畫的相關研究

過去研究者使用積木、文字與圖片等靜態材料來設計測驗，然而近年來有學者發現情境式動畫對學習的益處，不但能夠提升兒童的學習興趣、增進記憶力及專注度 (Birisci et al., 2010; Handayani et al., 2020)，也有助於兒童使用有效的策略來解題 (Yamana & Inoue, 2006)，還能降低學習的壓力 (Wiryanto et al., 2021)，進而提升數學能力 (McCarthy et al., 2018; Nusir et al., 2012)。

為了檢視動畫對幼兒學習的影響，Lin (2019) 使用單詞、圖片及動畫為材料，探究 60 位幼兒的語文學習表現，研究結果顯示，使用動畫學習的組別在閱讀和理解方面的表現均優於使用單字和圖片的組別，代表動畫可以為幼兒帶來更好的學習表現。

黃志雄 (2022) 以 90 位幼兒為對象，分別設計動畫、語音及無聲版本等三種型式之電子繪本，藉此探討幼兒在閱讀過程中的腦波注意力與繪本理解表現之差異。研究結果發現，幼兒在閱讀動畫繪本時的腦波注意力與繪本理解力皆高於語音繪本及無聲繪本，因此推薦教師可運用動畫媒材作為教學調整之策略，不但能提升幼兒之興趣與注意力，還能對學習內容的理解有所幫助。此外，賴孟龍等人 (2022) 以情境式動畫為研究工具，探究學齡前

幼兒在加減法可逆原則的習得歷程；研究結果發現，幼兒在情境式動畫呈現加減法可逆原則的表現優於其他靜態媒介。

過去的研究顯示，大部分的學生認為數學是一門困難的學科，因此教師需要突破傳統的教學方式，引導學生激發學習興趣與動機；而在教學中使用動畫輔助對兒童的數學能力產生正向的影響（Nusir et al., 2012），除了能增強學生的數學感知能力、增加他們對更高階學習技能的運用之外（Yang & Li, 2013），還能提升學習意願及理解能力（Weng & Yang, 2017）。Wahyudi 等人（2020）則發現，動畫能夠激發學生產生批判性思考，強化創意思維及問題解決的能力。

由上述可知，情境式動畫能夠提升幼兒的學習興趣與動機，增加理解能力與解決問題的意願。故本研究使用情境式動畫呈現題目，探究幼兒在加減法可逆概念的理解程度。

參、研究設計

一、研究對象

本研究對象來自臺灣南部一所私立幼兒園，採主題式混齡教學，以主題活動及學習區操作為主，未強調運算練習。幼兒大多來自中產階級的家庭，家長的職業為白領階級（例如：教師與公務人員），分別有 20 位五歲（男生 10 位、女生 10 位，平均年齡五歲七個月）及 20 位六歲（男生 11 位、女生 9 位，平均年齡六歲八個月）幼兒參與研究。

在邀請研究對象後，研究者經由紙筆測驗確認受試幼兒皆已具備基本加法與基本減法的運算能力，足以應對本測驗題目的考驗；此外，Klein 與 Bisanz（2000）及 Rasmussen 等人（2003）指出，幼兒的運算能力與可逆概念的表現並無相關性，擅長計算的幼兒不一定具備可逆概念。因此，本研究將透過二階段加減法題目來探究受試幼兒是否能運用加減法可逆原則解題。

二、研究工具與計分方式

為讓受試幼兒在測驗過程中維持興趣及專注力，本研究共編製四組在幼兒生活經驗中較熟悉的情境（森林小鳥、池塘青蛙、籃子蘋果、水草小魚），每組情境各 12 題。以下將介紹測驗工具、題目設計、施測指導語以及測驗結果計分方式。

（一）加減法可逆概念測驗工具

本研究的加減法可逆概念測驗工具包含代數推理與運算捷徑任務。在兩種測驗中，分別設計「可逆題」（ $a+b-b$ ）24 題與「標準題」（ $a+b-c$ ）24 題，測驗內容總表如表 1。

表 1
測驗內容總表

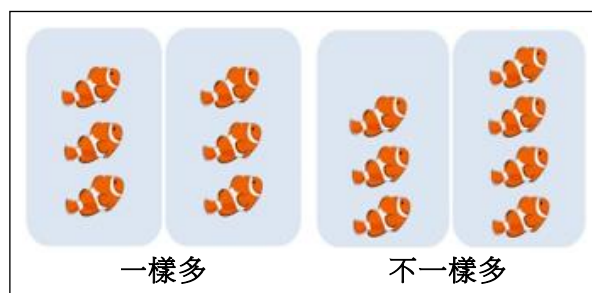
情境	題目模式	題目範例	代數推理 (第 1 次測驗)	運算捷徑 (第 2 次測驗)
森林小鳥	$a+b-b=?$	$9+3-3=?$	可逆題 6 題	
	$a+b-c=?$	$9+3-2=?$	標準題 6 題	
池塘青蛙	$a-b+b=?$	$9-3+3=?$	可逆題 6 題	
	$a-b+c=?$	$9-3+2=?$	標準題 6 題	
籃子蘋果	$a+b-b=?$	$6+4-4=?$		可逆題 6 題
	$a+b-c=?$	$6+4-3=?$		標準題 6 題
水草小魚	$a-b+b=?$	$6-4+4=?$		可逆題 6 題
	$a-b+c=?$	$6-4+3=?$		標準題 6 題

參考 Baroody 與 Lai (2007) 及 Lai 等人 (2008) 的研究設計，為了避免幼兒透過計算得出起始量，或因數量過大而感到挫折，本研究將起始量設定在 5 到 10 之間；此外，為使幼兒能透過視知辨識數量，故設計操弄加減的數量為 2 到 4，讓幼兒能快速判斷操弄的數量是否有可逆的關係。為了確認受試幼兒是真正理解可逆概念，而非使用計算方式解題，故設計可逆題處理的總數量大於標準題，例如可逆題為 $6+3-3$ ，須處理的總數量為 12；標準題為 $6+3-2$ ，處理的總數量則為 11。若幼兒未使用可逆概念而採用由左至右的運算方式解題，以工作記憶能力來看，總數量較大的可逆題在計算上會比較困難 (Rasmussen et al., 2003)，故幼兒回答的速度可能較慢或是錯誤率較高；但若幼兒能在難度較高的題型中仍有更好的表現，便能判斷幼兒當下使用可逆概念來解題。兩種題型安排為不固定的穿插交替順序，相同題型不連續出現三次 (含) 以上，避免幼兒因重複性而習慣使用相同方式解答。

1. 代數推理任務

代數推理任務設計一個較大的起始量 (例如：9 與 10)，在題目中不唸出數量，以「這麼多」代替，並提醒受試幼兒不需計算。在加減某一數量後，讓受試幼兒回答結果量與起始量一樣多還是不一樣多。為檢視幼兒是否具備分辨「一樣多」和「不一樣多」的能力，在測驗前先讓受試幼兒透過圖卡執行辨識能力測試，確認受試幼兒能夠進行數量的比較與辨識，如圖 1。

圖 1
數量比較辨識測驗







若受試幼兒能夠在觀看圖卡後正確回答「一樣多」和「不一樣多」，代表已經具備數量辨識與比較的能力，即接著進行代數推理測驗。

(1) 代數推理任務題目設計

代數推理任務的題目分別設計為先加後減與先減後加的順序，下列以先加後減的情境式動畫「森林小鳥」為例：「早上，有這麼多隻小鳥在樹上，飛進來 2 隻小鳥，飛出去 2 隻小鳥，現在，樹上的小鳥跟早上比起來，一樣多還是不一樣多？」呈現畫面如圖 2。

圖 2

「森林小鳥」影片分鏡圖

9	+	2	-	2	=	?
						
早上，有這麼多隻小鳥在樹上		飛進來 2 隻小鳥		飛出去 2 隻小鳥		現在，樹上的小鳥跟早上比起來，一樣多還是不一樣多？

(2) 練習題的指導語

A. 說明施測方式的指導語

你會先看到樹上有一些小鳥，
不久之後，會有幾隻小鳥飛進來，然後，會有幾隻小鳥飛出去，
你只要跟老師說，
最後樹上的小鳥跟本來的小鳥比起來，一樣多還是不一樣多！

B. 受試幼兒回答正確時的指導語（練習題：7+1-1）

沒錯！有一隻小鳥飛進來，有一隻小鳥飛出去，
最後樹上的小鳥跟本來的小鳥比起來，數量是一樣多的。

C. 受試幼兒回答錯誤時的指導語

要仔細注意看喔！
有一隻小鳥飛進來，有一隻小鳥飛出去，
最後樹上的小鳥跟本來的小鳥比起來，數量應該是一樣多的喔！

2. 運算捷徑任務

運算捷徑任務須使用運算的方式解題，故起始量設計得比代數推理的起始量小（例如：5 與 6），並由旁白於題目中唸出起始數量以幫助幼兒識別，在加減某一數量後，請受試幼兒盡快回答結果量。



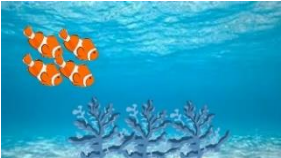

為了分辨幼兒透過運算方式（耗時較長）亦或使用加減法可逆原則（耗時較短）解題，本研究將檢視幼兒的反應時間；情境式動畫播放過程約 20 秒，在動畫結束後請幼兒開始答題並同時計算反應時間，讓所有受試幼兒使用同樣的標準施測，並將反應時間在三秒內定義為使用加減法可逆原則解題（Siegler & Stern, 1998），若反應時間超過三秒則定義為使用運算方式解題。

（1）運算捷徑任務題目設計

題目分別設計為先加後減與先減後加的順序，下列以先減後加的情境式動畫「水草小魚」為例：「水草裡有 6 條魚，游出去 4 條魚，游進來 4 條魚，水草裡還剩下幾條魚？」呈現畫面如圖 3。

圖 3

「水草小魚」影片分鏡圖

6	—	4	+	4	=	?
						
水草裡有 6 條魚		游出去 4 條魚		游進來 4 條魚		水草裡剩下幾條魚？

（2）練習題的指導語

A. 說明施測方式的指導語

你會看到水草裡有一些魚，
不久之後，會游出去幾條魚，然後，再游進來幾條魚。
你要趕快跟老師說，水草裡還剩下幾條魚。

B. 受試幼兒回答正確時的指導語（練習題：4-1+1）

沒錯！水草裡原本有四條魚，
游出去一條魚，再游進來一條魚，
最後水草裡還剩下四條魚。

C. 受試幼兒回答錯誤時的指導語

要仔細注意看喔！
水草裡原本有四條魚，
游出去一條魚，再游進來一條魚，
最後水草裡應該剩下四條魚喔！

(二) 測驗計分方式

1. 計分標準

針對可逆題型，回答正確得 1 分，總分 24 分；若受試幼兒在施測過程中連錯 3 題（連續 3 題將包含標準題與可逆題，代表幼兒未能理解題目內容或無法正確解題），即終止測驗，後續計分為 0 分。

若發現幼兒在測驗中盲目作答（12 題中有 10 題），例如在代數推理任務中盲目回答「一樣多」或「不一樣多」，或是在運算捷徑任務中盲目回答「起始量」（代表在可逆題型中會答對，但是在標準題型中會答錯），則判定為作答誤差，記為 0 分。

施測者於測驗過程中記錄受試幼兒之答案，在測驗結束後透過核對錄音檔與計分表之紀錄來計算受試幼兒分數，每題答對得 1 分，總分 48 分。

2. 理解程度

為分析幼兒在加減法可逆概念的個別程度，根據受試幼兒在測驗中獲得的分數，參考 Baroody 與 Lai（2007）及 Lai 等人（2008）之研究設計，將可逆理解能力區分為「穩定理解」、「基礎理解」及「尚未習得」三個層次，分別說明如下：

「穩定理解」：答對 10 題（含）以上（答對率 83% 以上）；根據二項式定理，12 題中猜對 10 題以上的可能性僅有 2%（ $p = .019$ ），穩定理解的受試幼兒在加減法可逆的精熟程度高達 98%。

「基礎理解」：答對 7-9 題（答對率 51% 至 82%）；根據二項式定理，12 題中猜對 9 題、8 題與 7 題的可能性均大於 5%（ $p = .368$ ）。

「尚未習得」：答對 6 題（含）以下（答對率低於 50%）；根據二項式定理，12 題中猜對 6 題以下的可能性為 61%（ $p = .613$ ），此數據表示受試幼兒猜對 6 題（含）以下的機率高達 61%，故判斷其未能理解加減法可逆概念，歸類為尚未習得。

3. 解釋類型

為了釐清幼兒解題的策略，研究者在每位幼兒回答可逆題型（隨機選擇 2 題）後詢問如此答題的原因（你為什麼會覺得一樣多／不一樣多？），並參考 Potgieter 與 Blignaut（2018）的分析方式，將幼兒的解釋類型依據答題正確性與解釋的內容區分為四個層次：外顯精熟、內隱理解、潛在理解與尚未習得。以題目 5+2-2 為例：

早上，有這麼多隻小鳥在樹上，飛來了 2 隻小鳥，又飛出去 2 隻小鳥，
請問，現在的小鳥和早上比起來，一樣多還是不一樣多？

(1) 外顯精熟

答案正確，而且敘述能夠運用加減法可逆原則，例如：

一樣多，因為 2 隻小鳥飛進來，又有 2 隻小鳥飛出去。

一樣多，他來了 2 隻又飛走了，現在和早上的小鳥一模一樣。

(2) 內隱理解

答案正確，但是敘述未運用加減法可逆原則，例如：

一樣多，因為剛剛的鳥還在裡面，進去的鳥就飛出來了。

一樣多，好像又有 2 隻飛出去。

(3) 潛在理解

答案錯誤，但是敘述能夠具體對應影片的內容，例如：

不一樣多，原本的多了 2 隻又少了 2 隻。

不一樣多，因為 2 隻小鳥飛進來，又有 2 隻小鳥飛出去。

(4) 尚未習得

答案錯誤，而且敘述無法具體對應影片的內容，例如：

不一樣多，因為我猜少了很多隻。

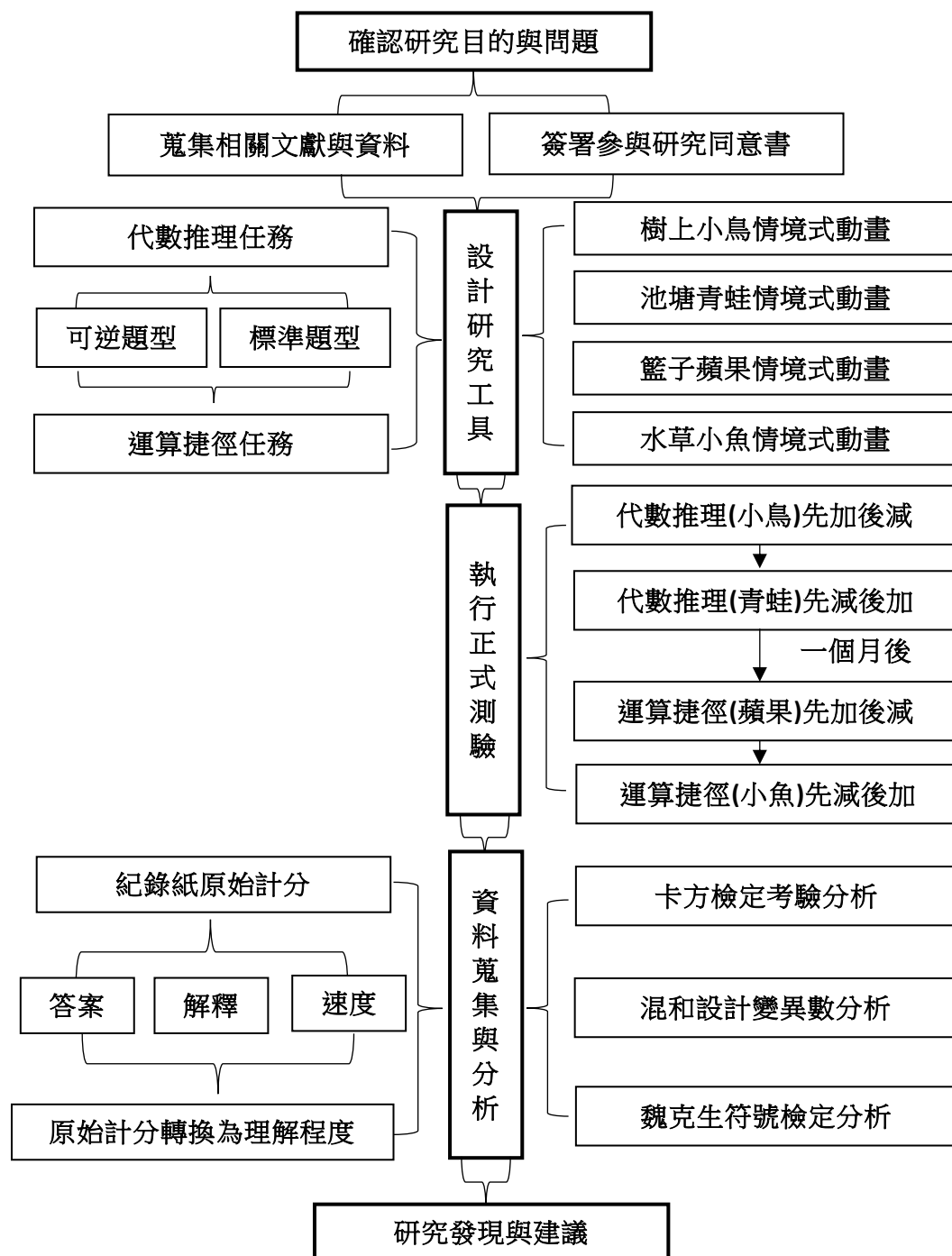
不知道，我感覺他越來越多、越來越多。

三、研究流程

為避免受試幼兒習慣運算捷徑概念的計算邏輯，進而影響作答方式，故本研究分為兩次測驗，第一次先給予代數推理任務，一個月後再進行運算捷徑任務。施測場域為臺灣的兩所私立幼兒園，由施測者與受試幼兒進行一對一的單獨測驗；考量學齡前幼兒的專注力與耐心程度，測驗的單題時間約 20 秒，每次施測的時間控制在 15 分鐘以內。若在施測過程中發現受試幼兒呈現分心、疲憊或是其他會影響施測結果的情形，則中止測驗，並待下回受試幼兒狀態恢復後，再接續上次未完成的測驗。

本研究設計兩種任務，包含四種情境，每次任務正式題目之前安排 2 題練習題，搭配指導語讓受試幼兒瞭解測驗的模式與答題方法後，接著才會進行 24 題正式測驗。在正式測試過程中施測者只會給予「很好」、「快完成了」等中性用語鼓勵受試幼兒完成任務。測驗過程採全程錄音，施測者利用筆記型電腦播放情境式動畫影片，並請受試幼兒直接說出答案，由施測者立即在紀錄紙上記錄答案，待測驗結束後以錄音檔核對成績，爾後分析結果。研究流程如圖 4。

圖 4
研究流程



四、資料蒐集與分析方法

（一）資料蒐集

研究者透過紙本記錄受試幼兒的答案，爾後藉由回放錄音檔加以核對，接著將其輸入 Microsoft Office Excel 軟體，並將答案轉換為原始計分（每題答對得 1 分）。扣除練習題，代數推理任務總分為 24 分；運算捷徑任務總分為 24 分。

為了確保研究的品質和正確性，研究者若發現受試幼兒發生盲目作答的情況，則判定為作答誤差，記為 0 分。分析數據後發現，40 位受試幼兒在 2 次代數推理任務中，因盲目作答而得到 0 分有 3 人（3.75%）；而在運算捷徑任務中並無幼兒盲目作答。

（二）分析方式

1. 受試幼兒在代數推理與運算捷徑任務表現的差異

分析方式採用卡方檢定，考驗幼兒在兩種任務中的理解程度；接著使用 2（年齡：五歲 vs. 六歲） \times 2（可逆概念：代數推理 vs. 運算捷徑）二因子混合樣本變異數分析方法，其中自變項為受試幼兒年齡，依變項為受試幼兒兩種任務之答題正確率；最後透過魏克生符號檢定來探討五歲與六歲幼兒分別在兩種任務之表現差異。

2. 受試幼兒在加減法可逆概念表現的差異

分析方式採用 2（可逆概念：代數推理 vs. 運算捷徑） \times 2（題型：可逆題 vs. 標準題）二因子混合樣本變異數分析方法，其中自變項為代數推理與運算捷徑兩種任務，依變項為受試幼兒分別在可逆題與標準題之答題正確率；接著進一步使用成對樣本 t 檢定，探討受試幼兒在加減法可逆概念中的表現；最後透過魏克生符號檢定檢視五歲與六歲幼兒在可逆題與標準題的答題速度差異。

肆、研究結果

一、五歲與六歲幼兒在加減法可逆概念的理解程度差異

（一）五歲與六歲幼兒在代數推理與運算捷徑任務中之加減法可逆概念的理解程度

如表 2 所示，五歲幼兒在代數推理任務中之加減法可逆概念的理解程度為「穩定理解」的人數為 12 人、「基礎理解」的人數為 5 人及「尚未習得」的人數為 3 人；在運算捷徑任務中之加減法可逆概念的理解程度為「穩定理解」的人數為 12 人、「基礎理解」的人數為 5 人及「尚未習得」的人數為 3 人。而六歲幼兒在代數推理任務中之加減法可逆概念的理解程度為「穩定理解」的人數為 13 人、「基礎理解」的人數為 3 人及「尚未習得」的人數為 4 人；在運算捷徑任務中之加減法可逆概念的理解程度為「穩定理解」的人數為 14 人、「基礎理解」的人數為 3 人及「尚未習得」的人數為 3 人。

表 2

五歲與六歲幼兒在兩種任務中之加減法可逆概念的理解程度

年齡	任務	理解程度	人數	百分比	χ^2 值	顯著性
五歲	代數推理	穩定理解	12	60%	0.00	1.000
		基礎理解	5	25%		
		尚未習得	3	15%		
	運算捷徑	穩定理解	12	60%		
		基礎理解	5	25%		
		尚未習得	3	15%		
六歲	代數推理	穩定理解	13	65%	0.18	.914
		基礎理解	3	15%		
		尚未習得	4	20%		
	運算捷徑	穩定理解	14	70%		
		基礎理解	3	15%		
		尚未習得	3	15%		

經卡方檢定考驗五歲幼兒在兩種任務中之加減法可逆概念的理解人數差異，發現五歲幼兒在兩種任務的理解人數並無顯著差異， $\chi^2(1, N = 19) = 0.00$ ， $p = 1.000$ ，代表五歲幼兒在代數推理與運算捷徑任務中之加減法可逆概念的理解程度表現類似。經卡方檢定考驗六歲幼兒在兩種任務中之加減法可逆概念的理解人數差異，發現六歲幼兒在兩種任務的理解人數並無顯著差異， $\chi^2(1, N = 19) = 0.18$ ， $p = .914$ ，代表六歲幼兒在代數推理與運算捷徑任務中之加減法可逆概念的理解程度表現類似。

(二) 受試幼兒在代數推理及運算捷徑任務之加減法可逆概念的理解程度差異

受試幼兒在兩種任務中的理解程度差異如表 3 所示。

表 3

代數推理與運算捷徑之加減法可逆概念的理解程度比較

年齡	理解程度	運算捷徑		
		穩定理解	基礎理解	尚未習得
五歲	代數推理			
	穩定理解	8 a	4 b	0 b
	基礎理解	3 c	1 a	1 b
	尚未習得	1 c	0 c	2 a
六歲	代數推理			
	穩定理解	12 a	1 b	0 b
	基礎理解	0 c	2 a	1 b
	尚未習得	2 c	0 c	2 a

註：a 代數推理的表現同於運算捷徑；b 代數推理的表現優於運算捷徑；c 代數推理的表現差於運算捷徑。

五歲幼兒在兩種任務中，表現相同的人數有 11 人，代數推理任務表現較佳的人數有 5 人，運算捷徑任務表現較佳的人數有 4 人。經魏克生符號檢定考驗五歲幼兒在兩種任務中之加減法可逆概念的理解人數差異（5 vs. 4），發現五歲幼兒在兩種任務中的理解人數並無顯著差異（ $Z = 0.00, p = 1.000$ ）。

六歲幼兒在兩種任務中，表現相同的人數有 16 人，代數推理任務表現較佳的人數有 2 人，運算捷徑任務表現較佳的人數有 2 人。經魏克生符號檢定考驗六歲幼兒在兩種任務中之加減法可逆概念的理解人數差異（2 vs. 2），發現六歲幼兒在兩種任務中的理解人數並無顯著差異（ $Z = 0.00, p = 1.000$ ）。整體而言，五歲與六歲幼兒在代數推理及運算捷徑任務之加減法可逆概念的理解程度表現類似，五歲與六歲幼兒的加減法可逆能力相近。

（三）受試幼兒在加減法可逆測驗之解釋類型分析

本研究將受試幼兒的答題表現與答題解釋合併分析，將答題類型定義為四個層次：答題正確而且解釋有條理，定義為外顯精熟；答題正確但解釋不清楚，定義為內隱理解；答題錯誤但解釋有條理，定義為潛在理解；答題錯誤而且解釋無邏輯，定義為尚未習得。為了檢視幼兒在不同任務的答題解釋類型，以下分析五歲與六歲幼兒在上述四個解釋層次的表現差異。

1. 五歲幼兒在代數推理及運算捷徑任務中之答題解釋類型分析

五歲幼兒在代數推理任務中之答題解釋類型出現次數分別為：外顯精熟 34 次、內隱理解 2 次、潛在理解 1 次及尚未習得 3 次。卡方適合度檢定結果呈現顯著差異， $\chi^2(3, N = 19) = 77.00, p < .001$ ，因此推論五歲幼兒在代數推理任務中多屬於外顯精熟。

五歲幼兒在運算捷徑任務中之答題解釋類型出現次數分別為：外顯精熟 26 次、內隱理解 10 次、潛在理解 0 次及尚未習得 4 次。卡方適合度檢定結果呈現顯著差異， $\chi^2(3, N = 19) = 19.40, p < .001$ ，因此推論五歲幼兒在運算捷徑任務中多屬於外顯精熟。

2. 六歲幼兒在代數推理及運算捷徑任務中之答題解釋類型分析

六歲幼兒在代數推理任務中之答題解釋類型出現次數分別為：外顯精熟 36 次、內隱理解 3 次、潛在理解 1 次及尚未習得 0 次。卡方適合度檢定結果呈現顯著差異， $\chi^2(3, N = 19) = 90.60, p < .001$ ，因此推論六歲幼兒在代數推理任務中多屬於外顯精熟。

六歲幼兒在運算捷徑任務中之答題解釋類型出現次數分別為：外顯精熟 29 次、內隱理解 10 次、潛在理解 1 次及尚未習得 0 次。卡方適合度檢定結果呈現顯著差異， $\chi^2(3, N = 19) = 54.20, p < .001$ ，因此推論六歲幼兒在運算捷徑任務中多屬於外顯精熟。

二、五歲與六歲幼兒在不同加減法可逆概念的答對率差異

（一）五歲與六歲幼兒在代數推理及運算捷徑任務之可逆題型得分表現

五歲與六歲幼兒在兩種任務之可逆題型得分表現如表 4 所示。

表 4

代數推理及運算捷徑任務之可逆題型得分

任務	年齡	人數	平均數	標準差	<i>t</i> 值	顯著性
代數推理	五歲	20	9.05	3.10	-0.60	.554
	六歲	20	9.60	2.70		
運算捷徑	五歲	20	8.75	3.65	-0.51	.610
	六歲	20	9.40	4.41		

註：總題數 12 題，總分最高 12 分。

在代數推理任務中的可逆題型表現，五歲幼兒平均得分為 9.05 ($SD = 3.10$)，六歲幼兒平均得分為 9.60 ($SD = 2.70$)，五歲與六歲幼兒在代數推理任務中的可逆題型表現未達顯著差異， $t(38) = -0.60$ ， $p = .554$ 。

在運算捷徑任務中的可逆題型表現，五歲幼兒平均得分為 8.75 ($SD = 3.65$)，六歲幼兒平均得分為 9.40 ($SD = 4.41$)，五歲與六歲幼兒在運算捷徑任務中的可逆題型表現未達顯著差異， $t(38) = -0.51$ ， $p = .610$ 。

以 2 (年齡：五歲 vs. 六歲) \times 2 (任務：代數推理 vs. 運算捷徑) 混和設計變異數分析檢視五歲與六歲幼兒在可逆題型的得分表現，結果發現年齡之間未達顯著差異， $F(1, 38) = 0.36$ ， $p = .550$ ，任務之間未達顯著差異， $F(1, 38) = 0.27$ ， $p = .606$ ，在年齡與任務的交互作用亦未達顯著差異， $F(1, 38) = 0.01$ ， $p = .918$ 。整體而言，五歲與六歲幼兒在代數推理及運算捷徑任務中的可逆概念表現類似，五歲與六歲幼兒的加減法可逆能力差不多，可能源自混齡教學的環境提供不同年齡的幼兒在互動中影響學習，因而有相近的表現。

(二) 五歲與六歲幼兒在先加後減及先減後加題型之得分表現

五歲與六歲幼兒在兩種題型之可逆題表現如表 5、表 6 所示。

表 5

五歲與六歲幼兒在代數推理任務之可逆題型表現得分

年齡	題型	人數	平均數	標準差	<i>t</i> 值	顯著性
五歲	先加後減	20	7.80	4.69	-2.60	.017
	先減後加	20	10.20	2.71		
六歲	先加後減	20	8.65	4.63	-2.45	.024
	先減後加	20	10.95	1.50		

註：總題數 12 題，總分最高 12 分。

表 6

五歲與六歲幼兒在運算捷徑任務之可逆題型表現得分

年齡	題型	人數	平均數	標準差	t 值	顯著性
五歲	先加後減	20	7.25	4.33	-0.30	.769
	先減後加	20	7.75	4.83		
六歲	先加後減	20	5.40	5.14	-1.86	.078
	先減後加	20	8.25	4.52		

註：總題數 12 題，總分最高 12 分。

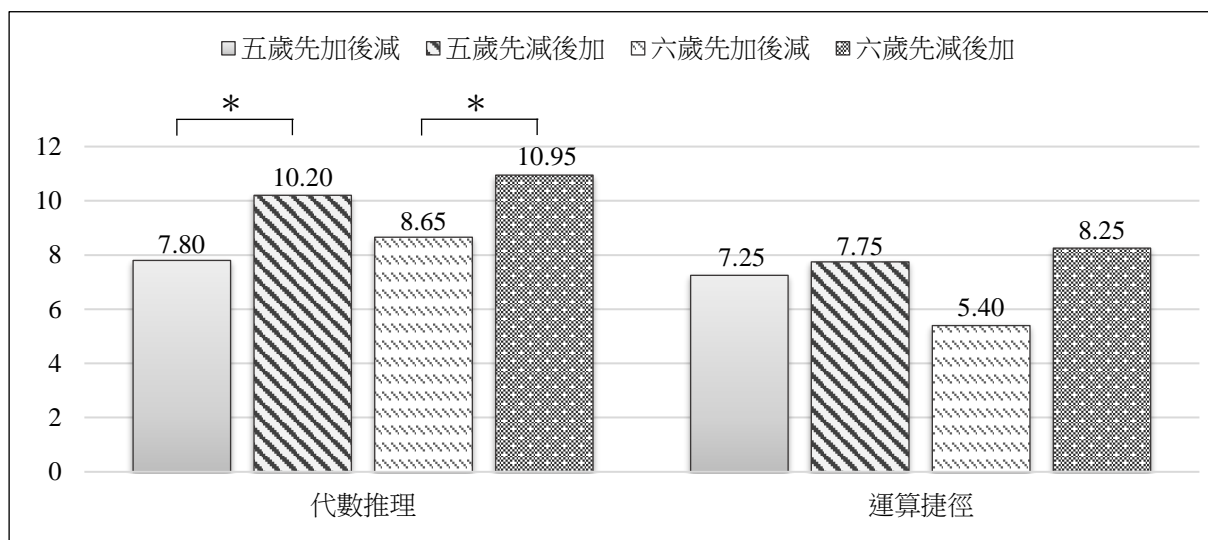
五歲幼兒在代數推理任務中的答題表現，先加後減的題目平均得分為 7.80 ($SD = 4.69$)，先減後加的題目平均得分為 10.20 ($SD = 2.71$)，五歲幼兒在代數推理任務中的兩種題型之答題表現有顯著差異， $t(19) = -2.60$ ， $p = .017$ 。在運算捷徑任務中的答題表現，先加後減的題目平均得分為 7.25 ($SD = 4.33$)，先減後加的題目平均得分為 7.75 ($SD = 4.83$)，五歲幼兒在運算捷徑任務中的兩種題型之答題表現並無顯著差異， $t(19) = -0.30$ ， $p = .769$ 。由此可知，五歲幼兒在代數推理任務之兩種題型的表現不同（第二次施測的先減後加題型表現較佳），卻在運算捷徑任務中表現相似。

六歲幼兒在代數推理任務中的答題表現，先加後減的題目平均得分為 8.65 ($SD = 4.63$)，先減後加的題目平均得分為 10.95 ($SD = 1.50$)，六歲幼兒在代數推理任務中的兩種題型之答題表現有顯著差異， $t(19) = -2.45$ ， $p = .024$ 。在運算捷徑任務中的答題表現，先加後減的題目平均得分為 5.40 ($SD = 5.14$)，先減後加的題目平均得分為 8.25 ($SD = 4.52$)，六歲幼兒在運算捷徑任務中的兩種題型之答題表現有邊際顯著差異， $t(19) = -1.86$ ， $p = .078$ 。由此可知，六歲幼兒在代數推理及運算捷徑任務兩種題型的表現皆有所不同，在第二次施測的先減後加題型表現較佳。

以 2（任務：代數推理 vs. 運算捷徑） \times 2（題目：先加後減 vs. 先減後加）相依樣本變異數分析，幼兒在不同任務的答題表現有顯著差異， $F(1, 39) = 13.44$ ， $p = .001$ ， $\eta^2 = .26$ ，具體而言，幼兒在代數推理任務的表現顯著優於運算捷徑任務；幼兒在不同題型的表現有邊際顯著差異， $F(1, 39) = 3.73$ ， $p = .061$ ， $\eta^2 = .09$ ，具體而言，幼兒在先減後加題型（第二次施測）的表現比先加後減題型（第一次施測）還要好，推論幼兒的加減法可逆概念有學習效應，如圖 5 所示。

圖 5

五歲與六歲幼兒在代數推理與運算捷徑任務之可逆題型得分



此外，任務與題目的交互作用達顯著水準， $F(1, 39) = 8.15$ ， $p = .007$ ， $\eta^2 = .17$ 。在代數推理任務中，先加後減題目的表現（8.23 分）比先減後加題目的表現（10.58 分）還要差， $t(39) = -3.62$ ， $p = .001$ ；但在運算捷徑任務中，先加後減題目的表現（7.50 分）比先減後加題目的表現（6.83 分）還要好， $t(39) = 0.94$ ， $p = .353$ 。整體來說，幼兒在代數推理任務中，兩種題型的表現有顯著差異，在運算捷徑任務中，兩種題型的表現並無顯著差異；與代數推理任務相較，幼兒在運算捷徑任務的平均得分雖然較低，但是兩次施測的可逆概念表現較一致。

（三）五歲與六歲幼兒在可逆題中加減不同數量之題目表現

為了檢視受試幼兒的表現是否受到題目數量大小的影響，本研究探討五歲與六歲幼兒在可逆題中加減不同數量之題目表現。

五歲與六歲幼兒在可逆題中加減不同數量之題目表現如表 7 所示。

表 7

五歲與六歲幼兒在可逆題中加減不同數量題目之表現

年齡	任務	SS	df	MS	F 值	p 值
五歲	代數推理	0.90	2	0.45	0.66	.521
	運算捷徑	3.03	2	1.52	4.23	.022
六歲	代數推理	1.90	2	0.95	3.16	.054
	運算捷徑	0.40	2	0.20	0.92	.407

註：加減之不同數量為加減 2、加減 3、加減 4。

以重複測量變異數分析，五歲幼兒在代數推理任務之可逆題中加減不同數量的題目表現並無顯著差異， $F(2, 38) = 0.66$ ， $p = .521$ ；代表加減不同數量的題目在代數推理任務中並未影響五歲幼兒的表現。相反的，五歲幼兒在運算捷徑任務之可逆題中加減不同數量的題目表現，在加減 2 的平均得分為 3.00 ($SD = 1.26$)，加減 3 的平均得分為 2.70 ($SD = 0.98$)，加減 4 的平均得分為 3.25 ($SD = 1.25$)，具有顯著差異， $F(2, 38) = 4.23$ ， $p = .022$ ， $\eta^2 = .18$ ；具體來說，五歲幼兒在加減 4 的題目表現最好，加減 3 的題目表現最差。

六歲幼兒在代數推理任務之可逆題中加減不同數量的題目表現，在加減 2 的平均得分為 2.95 ($SD = 1.19$)，加減 3 的平均得分為 3.30 ($SD = 0.92$)，加減 4 的平均得分為 3.35 ($SD = 0.88$)，具有邊際顯著差異， $F(2, 38) = 3.16$ ， $p = .054$ ， $\eta^2 = .14$ ；具體來說，六歲幼兒在加減 4 的題目表現較好，加減 2 的題目表現較差。相反的，六歲幼兒在運算捷徑任務之可逆題中加減不同數量的題目表現並無顯著差異， $F(2, 38) = 0.92$ ， $p = .407$ ；代表加減不同數量的題目在運算捷徑任務中並未影響六歲幼兒的表現。

三、五歲與六歲幼兒在可逆題與標準題的答對率及答題速度

為了檢視受試幼兒如何使用加減法可逆原則解題，本研究探討幼兒在代數推理及運算捷徑任務中可逆題及標準題的答題表現；如果受試幼兒使用加減法可逆原則解題，可逆題的答題表現將優於標準題。基於上述分析結果可知，五歲與六歲幼兒的表現並類似，故將兩個年齡之數據合併在一起分析。

(一) 幼兒在代數推理及運算捷徑任務中之可逆題與標準題的答題表現

幼兒在可逆題與標準題的答題表現如表 8 所示。

表 8
任務與題型之表現比較

任務	題型	題數	平均數	標準差	<i>t</i> 值	顯著性
代數推理	可逆題	12	9.33	2.89	-3.14	.003
	標準題	12	10.43	2.40		
運算捷徑	可逆題	12	9.08	3.96	6.47	.000
	標準題	12	6.48	3.69		

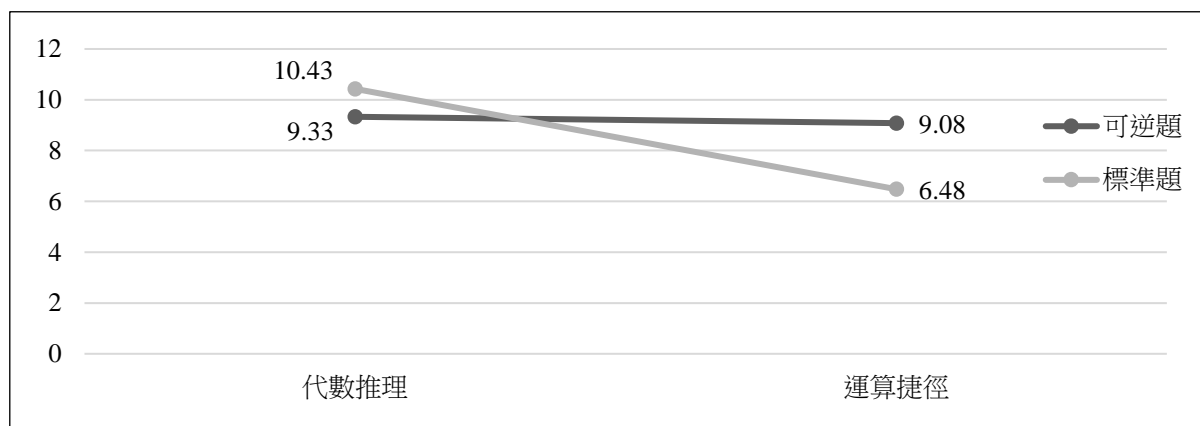
註：總題數 12 題，總分最高 12 分。

幼兒在代數推理任務中，可逆題的平均數為 9.33 ($SD = 2.89$)，標準題的平均數為 10.43 ($SD = 2.40$)，幼兒在代數推理任務中的可逆題與標準題表現有顯著差異， $t(39) = -3.14$ ， $p = .003$ ，於標準題的表現較佳；在運算捷徑任務中，可逆題的平均數為 9.08 ($SD = 3.96$)，標準題的平均數為 6.48 ($SD = 3.69$)，幼兒在運算捷徑任務中的可逆題與標準題表現有顯著差異， $t(39) = 6.47$ ， $p < .001$ ，於可逆題的表現較佳。

以 2（任務：代數推理 vs. 運算捷徑） \times 2（題型：可逆題 vs. 標準題）混和設計變異數分析，幼兒在不同任務的答題表現有顯著差異， $F(1, 39) = 24.43$ ， $p < .001$ ， $\eta^2 = .61$ ，具體而言，幼兒在代數推理任務的表現顯著優於運算捷徑任務的表現；幼兒在不同題型上有顯著差異， $F(1, 39) = 6.19$ ， $p = .017$ ， $\eta^2 = .14$ ；整體而言，幼兒在可逆題型的表現較穩定，反之，在標準題型的表現卻因任務不同而產生落差。

此外，任務與題型的交互作用達顯著水準， $F(3, 36) = 77.68$ ， $p < .001$ ， $\eta^2 = .87$ 。在代數推理任務中，可逆題的表現（9.33 分）比標準題的表現（10.43 分）還要差， $t(39) = -3.14$ ， $p = .003$ ；但在運算捷徑任務中，可逆題的表現（9.08 分）比標準題的表現（6.48 分）還要好， $t(39) = 6.47$ ， $p < .001$ 。整體而言，幼兒在標準題的表現受到任務影響，但是對於可逆題而言，表現類似，如圖 6 所示。

圖 6
題型在任務中之表現



（二）五歲與六歲幼兒在運算捷徑任務之可逆題及標準題的答題速度差異

在運算捷徑任務施測時，除了提醒幼兒盡快回答之外，參考賴孟龍等人（2022）的答題反應時間之定義，若幼兒答題時間多於 3 秒鐘則表示其使用計算策略，故施測者將於紀錄紙上標註答題時間超過三秒的題目。在 40 位幼兒答題時間超過三秒的題數中，標準題較多的有 20 位，可逆題較多的有 1 位，可逆題與標準題一樣多的有 19 位。依據測驗統計結果顯示，五歲與六歲幼兒答題時間超過三秒的題數分別為可逆題 34 題、標準題 69 題，卡方適合度檢定結果呈現顯著差異， $\chi^2(1, N = 39) = 12.58$ ， $p < .001$ ，可知在答題速度中，五歲與六歲幼兒在標準題型所花費的時間多於可逆題，代表幼兒在面對標準題時使用運算的方式來解題，需要花費較長時間，而在可逆題中能夠運用可逆概念答題，因此不需要太多的反應時間。

伍、研究發現與建議

一、研究發現

（一）超過八成的五歲與六歲幼兒在加減法可逆概念達到基礎理解以上

從研究結果發現，五歲與六歲幼兒的加減法可逆概念已經達到基礎理解程度，具體而言，在兩種任務的表現中，幼兒對加減法可逆概念的理解程度在「穩定理解」所佔的比例最高，尚未習得最低；整體而言，五歲與六歲幼兒的加減法可逆概念已經達到基礎理解以上的程度。

在過去，依據 Piaget 認知發展理論的發展階段敘述，前運思期階段（2~7 歲）的幼兒開始發展推理能力，但尚不具保留概念及缺乏可逆性，需要到具體運思期（7~12 歲），兒童才獲得基礎的邏輯運算能力；而在實證研究中，Bryant 等人（1999）發現，五歲幼兒已經開始能夠使用加減法可逆原則來解題；Rasmussen 等人（2003）認為，四歲幼兒似乎能意識到加減法可逆的概念，但尚未穩定理解加減法可逆原則，而六歲幼兒已經能夠使用加減法可逆概念來解題。

本研究發現，五歲與六歲幼兒已經具備基礎的加減法可逆知識。與過去的研究結果（Baroody & Lai, 2007; Bryant et al., 1999; Gilmore & Bryant, 2006; Lai et al., 2008; Rasmussen et al., 2003）相較之下，五歲與六歲幼兒在本研究中皆有更好的表現。許多研究者指出，動態的情境式動畫能降低幼兒的學習壓力、增加參與動機、維持答題專注力、提升題目理解能力等（Birisci et al., 2010; Handayani et al., 2020; Nusir et al., 2012; Weng & Yang, 2017; Wiryanto et al., 2021），研究者推論本研究採用動態的情境式動畫，而非靜態的圖片、文字、或數字，因此幼兒能夠有較好的表現。

（二）幼兒在代數推理及運算捷徑任務之加減法可逆概念理解程度並無差異

從研究結果發現，幼兒在兩種任務的理解程度類似，具體而言，五歲與六歲幼兒在兩種任務表現相同的人數占最高比例（55%與 80%），且在「代數推理表現較佳」與「運算捷徑表現較佳」的人數相當，可以推論幼兒在兩種任務之加減法可逆概念的理解程度並無顯著差異。進而分析幼兒在兩種任務的表現，五歲與六歲幼兒在加減法可逆概念的平均得分均無顯著差異。

針對運算捷徑任務的答題速度來看，在可逆題型中，五歲與六歲幼兒回答所花費超過三秒時間的題數相同（17 題與 17 題）；在標準題型中，五歲與六歲幼兒回答所花費超過三秒時間的題數相當（34 題與 35 題），可知在可逆題及標準題的答題速度中，五歲與六歲幼兒並無顯著差異，而且在標準題型中所花費的時間較多。

由以上結果可以推論，無論是在代數推理或是運算捷徑任務，五歲與六歲幼兒在加減法可逆概念的表現上並無顯著差異。由於過去的研究顯示，運算捷徑任務會高估幼兒的能

力，而代數推理任務則是低估幼兒的能力，但依據本研究發現，受試幼兒在兩種任務的理解程度類似，與過去的研究結果有所差異，故檢視幼兒的表現是否會因本研究之題目設定的起始量（5 和 6）比過去之研究的題目起始量（3 和 4）還大而受到影響，分析幼兒在起始量為 5 與起始量為 6 的題目得分差異。經由成對樣本 t 檢定結果，發現幼兒在起始量為 5 的題目（平均數為 4.15 分）與起始量為 6 的題目（平均數為 4.00 分）的表現並無顯著差異（ $p = .352$ ），因此可以排除題目中起始量所造成的表現與過去研究結果不同的因素。

研究者推論五歲與六歲幼兒在加減法可逆概念的表現類似可能有以下兩個因素，第一個可能的因素是五歲與六歲幼兒同處於具體運思期的階段，具有相似的認知發展能力（Piaget, 1964），雖然受試幼兒的年齡相差一歲，但是在認知發展的表現上並不會有明顯的差異；第二可能的因素是受試幼兒來自採取混齡教學的幼兒園，學習發展受到社會互動的影響，藉由與能力較高的同儕合作學習（五歲與六歲共學）來提升學習表現（Vygotsky, 1978）。近來有許多研究發現在教學中運用合作學習與異質分組（Heterogeneous group）能促使年長的學童自然而然引導年幼的學童，提升年幼學童的學業成績與認知表現，相對於同質分組來說有更顯著的進步（Murphy et al., 2017; Ong et al., 2000; Smit & Engeli, 2015; Zamani, 2016）。

（三）幼兒在加減法可逆概念的表現不會受題目類型產生影響

整體而言，五歲與六歲幼兒在兩種任務中的答題解釋皆表現出外顯精熟的能力，對於可逆概念的理解狀態亦能達到基礎理解以上的程度；在答題速度上，幼兒在回答可逆題的花費時間較短，代表幼兒已經能夠運用加減法可逆概念來解題。進一步針對兩種任務的答題表現進行分析，在代數推理任務中，幼兒在標準題的表現較佳，而在運算捷徑任務中，幼兒在可逆題的表現較佳。

針對幼兒在兩種任務中的表現差異，研究者進行分析與推論；根據研究結果發現，幼兒在代數推理任務的表現顯著優於運算捷徑任務（ $p < .001$ ），代表對幼兒來說，代數推理任務比運算捷徑任務還要容易答對，表示比起需要計算的題目，幼兒更擅長處理關係推理的測驗模式。

有趣的是，加減不同數量的題目在代數推理任務中對五歲與六歲幼兒的表現沒有明顯的影響，卻在運算捷徑任務中對五歲幼兒的表現造成影響，細言之，在加減 4 的題目中得分最高，而在加減 3 的題目表現最差，推論五歲幼兒在運算捷徑任務中題型出現表現落差的原因除了運算能力不如六歲幼兒熟練之外，也可能與題目的呈現順序（加減 2→加減 4→加減 3→加減 3→加減 2→加減 4）有關，加減 3 在測驗中間階段，呼應認知發展軌跡中 U 型曲線的理論，表示注意力發展的過程分為三個階段，在前後的表現較好，而中間階段可能由於注意力變差導致表現不佳（Carlucci & Case, 2013）。

然而，在兩種任務中，幼兒的可逆題表現並無顯著差異（ $p = .820$ ），卻在標準題的表現有顯著差異（ $p < .001$ ），而且在運算捷徑任務的得分最低，表示幼兒在答題時能夠穩定運用可逆原則解題，但在使用運算過程解題時反而較容易有錯誤發生。

經由上述研究發現可以得知，幼兒在可逆題的測驗中，即使面對不同的任務仍然能有穩定的表現，表示幼兒在可逆概念的理解程度並未因題目類型不同而產生影響。

（四）幼兒加減法可逆測驗的答題表現會因測試經驗的累積而進步

本研究發現，幼兒在加減法可逆測驗的答題表現會因測試經驗的累積而進步。具體而言，在代數推理任務中，五歲幼兒在第二次測驗的平均數較第一次測驗提升了 2.40 分；六歲幼兒在第二次測驗的平均數較第一次測驗提升了 2.30 分。在運算捷徑任務中，五歲幼兒在第二次測驗的平均數較第一次測驗提升了 0.50 分；六歲幼兒在第二次測驗的平均數較第一次測驗提升了 2.85 分。整體而言，無論是在代數推理或是運算捷徑任務中，五歲與六歲幼兒在第二次測驗的表現皆優於第一次測驗。

一般來說，幼兒經由正數的方式學習加法（例如：1 顆糖果、2 顆糖果、3 顆糖果……桌子上總共有 3 顆糖果），相對的，減法便須利用倒數方式的逆向思維來進行，依據 Piaget 認知理論的發展階段而言，減法會比加法還要困難；然而，幼兒在比較困難的第二次先減後加測驗皆表現得比第一次先加後減測驗還要好，代表幼兒已經能夠從施測過程中獲取經驗，並且經由經驗的累積，不自覺的提升加減法能力，進而在答題時有更好的表現。

Lai 等人（2008）設計加減法測驗探討 60 位幼兒對加減法可逆原理的學習潛力，結果發現幼兒會在第二階段的測驗中表現出學習效果，即使未經訓練的對照組也能有進步的表現。除此之外，賴孟龍等人（2022）採用「微觀發展論設計」，透過情境式動畫探究 34 位五歲幼兒在密集接觸兩階段加減法題目後的表現差異；研究結果發現，幼兒在加減法可逆概念的表現與反應時間皆有顯著的提升，表示幼兒能夠從測試本身掌握解題的原則。

二、研究建議

（一）教師之加減法課程規劃不只依據幼兒年齡層，需多方考量加以設計

本研究發現五歲與六歲幼兒無論在加減法可逆概念的理解程度或是具體表現上皆無顯著差異，代表在此概念的理解及表現中，五歲幼兒沒有因為年齡較小而表現比較差；幼兒園教師一般在規劃課程難度時會以年齡作為設計參考，但依據本研究結果呈現，建議教師在加減法課程或是可逆概念的引導中，可以多參考幼兒本身的特性與學習潛力，不須因幼兒年齡長幼來限制難度，進而能夠提升幼兒學習的空間。

（二）未來研究者可探討不同環境條件對幼兒發展加減法可逆概念的影響

本研究之研究對象為中產階級家庭的幼兒，透過代數推理與運算捷徑任務探討他們在加減法可逆概念的表現。研究結果發現，無論在年齡或是任務之間，幼兒皆無表現差異，代表幼兒在中產階級的環境條件中，具有發展可逆概念的機會，並且在面對問題時能夠穩定的發揮。建議未來的研究者，可以針對不同環境條件的研究對象，比如勞動階級家庭或是在偏鄉生活的幼兒，探討其在加減法可逆概念的表現，便能進一步了解環境對幼兒發展可逆概念的影響。

（三）未來研究者透過不同測驗媒材探究幼兒在加減法可逆概念的理解程度

過去研究曾使用故事、積木、文字、數字、圖片等測驗媒材設計加減法可逆概念的測驗，而本研究透過幼兒熟悉的情境式動畫來呈現題目為幼兒施測，方呈現以上的研究結果。建議未來對加減法可逆概念有興趣的研究者可以使用不同的測驗媒材，比如起源於英格蘭的板球、盛產於非洲的刺角瓜等幼兒陌生的物品，或是正方形、三角形等未經裝飾的樸素樣態，利用不同表徵方式探討更多可能影響幼兒加減法可逆概念表現的因素。

（四）未來研究者探討運算捷徑任務與基本加減法運算能力的相關性

依據本研究的結果發現，幼兒在不同任務中的可逆題並無表現差異，而在標準題中不但有表現差異，且在運算捷徑任務的得分最低。由此可知，與可逆題相較之下，幼兒在需要使用運算過程解題的標準題中表現相對不穩定。建議對幼兒數學發展有興趣的研究者，未來可以探討運算捷徑任務與基本加減法運算能力是否具有相關性，探究二者對幼兒算術能力的影響。

誌謝

本文改寫自余孟儒在賴孟龍指導下完成的碩士論文，感謝國科會計畫（計畫編號 NSTC 111-2410-H-415-002）的經費補助，以及匿名審查者與編輯委員提供的修正建議。

參考文獻

- 張麗芬（2005）。兒童數能力的發展。*兒童與教育研究*，1，85–109。[Chang, L.-F. (2005). The development of children's numerical abilities. *The Journal of Study in Child and Education*, 1, 85–109. (in Chinese)]
- 黃志雄（2022）。電子繪本對發展遲緩與非發展遲緩幼兒之閱讀腦波注意力與繪本理解表現影響之研究。*幼兒教保研究期刊*，25，23–47。[Huang, C.-H. (2022). Study on the influence of e-storybooks on reading attention by the EEG and reading comprehension for young children with and without developmental delay. *Journal of Early Childhood Education & Care*, 25, 23–47. (in Chinese)]
- 賴孟龍、李甄甄、張晉瑋（2022）。以微觀發展論設計與情境式動畫探究 5 歲幼兒加減法可逆原則的認知發展。*數位學習科技期刊*，14（3），57–92。[Lai, M.-L., Lee, C.-C., & Chang, C.-W. (2022). A microgenetic study with animations on 5-year-old preschoolers' development of the addition-subtraction inverse principle. *International Journal on Digital Learning Technology*, 14(3), 57–92. (in Chinese)] <https://doi.org/10.53106/2071260X2022071403003>

- Baroody, A. J., & Lai, M. L. (2007). Preschoolers' understanding of the addition-subtraction inverse principle: A Taiwanese sample. *Mathematical Thinking and Learning*, 9(2), 131–171. <https://doi.org/10.1080/10986060709336813>
- Baroody, A. J., & Wilkins, J. L. M. (1999). The development of informal counting, number, and arithmetic skills and concepts. In J. V. Copley (Ed.), *Mathematics in the early years* (pp. 48–65). National Association for the Education of Young Children.
- Baroody, A. J., Lai, M. L., Li, X., & Baroody, A. E. (2009). Preschoolers' understanding of subtraction-related principles. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(1–2), 41–60. <https://doi.org/10.1080/10986060802583956>
- Birisci, S., Metin, M., & Karakas, M. (2010). Pre-service elementary teachers' views on concept cartoons: A sample from Turkey. *Middle-East Journal of Scientific Research*, 5(2), 91–97.
- Bryant, P., Christie, C., & Rendu, A. (1999). Children's understanding of the relation between addition and subtraction: Inversion, identify, and decomposition. *Journal of Experimental Child Psychology*, 74(3), 194–212. <https://doi.org/10.1006/jecp.1999.2517>
- Canobi, K. H., Reeve, R. A., & Pattison, P. E. (2002). Young children's understanding of addition concepts. *Educational Psychology*, 22(5), 513–532. <https://doi.org/10.1080/0144341022000023608>
- Carlucci, L., & Case, J. (2013). On the necessity of U-shaped learning. *Topics in Cognitive Science*, 5(1), 56–88. <https://doi.org/10.1111/tops.12002>
- Ching, B. H.-H. (2023). Inhibitory control and visuospatial working memory contribute to 5-year-old children's use of quantitative inversion. *Learning and Instruction*, 83, 101714. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2022.101714>
- Ding, M., & Auxter, A. E. (2017). Children's strategies to solving additive inverse problems: A preliminary analysis. *Mathematics Education Research Journal*, 29, 73–92. <https://doi.org/10.1007/s13394-017-0188-4>
- Eaves, J., Attridge, N., & Gilmore, C. (2019). Increasing the use of conceptually-derived strategies in arithmetic: Using inversion problems to promote the use of associativity shortcuts. *Learning and Instruction*, 61, 84–98. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2019.01.004>
- Gilmore, C. K., & Bryant, P. (2006). Individual differences in children's understanding of inversion and arithmetical skill. *British Journal of Educational Psychology*, 76(2), 309–331. <https://doi.org/10.1348/000709905X39125>
- Handayani, S., Haryono, H., & Ahmadi, F. (2020). The effectiveness of animation film media to know ability mathematical concept of early childhood based on gender. *Journal of Primary Education*, 9(2), 161–167.
- Klein, J. S., & Bisanz, J. (2000). Preschoolers doing arithmetic: The concepts are willing but the working memory is weak. *Canadian Journal of Experimental Psychology*, 54(2), 105–116. <https://doi.org/10.1037/h0087333>
- Lai, M. L., Baroody, A. J., & Johnson, A. R. (2008). Fostering Taiwanese preschoolers' understanding of the addition–subtraction inverse principle. *Cognitive Development*, 23(1), 216–235. <https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2007.06.002>
- Lin, C. H. (2019). Exploring the effectiveness of using animation to learn Chinese verbs: A case of young preschool children. *Journal of Chinese Language Teaching*, 16(3), 1–27.
- Litkowski, E. C., Duncan, R. J., Logan, J. A. R., & Purpura, D. J. (2020). When do preschoolers learn specific mathematics skills? Mapping the development of early numeracy knowledge. *Journal of Experimental Child Psychology*, 195, 104846. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2020.104846>

- McCarthy, E., Tiu, M., & Li, L. (2018). Learning math with curious George and the odd squad: Transmedia in the classroom. *Technology, Knowledge and Learning*, 23(2), 223–246. <https://doi.org/10.1007/s10758-018-9361-4>
- Murphy, P. K., Greene, J. A., Firetto, C. M., Li, M., Lobczowski, N. G., Duke, R. F., Wei, L., & Croninger, R. M. V. (2017). Exploring the influence of homogeneous versus heterogeneous grouping on students' text-based discussions and comprehension. *Contemporary Educational Psychology*, 51, 336–355. <https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2017.09.003>
- Nusir, S., Alsmadi, I., Al-Kabi, M., & Sharadgah, F. (2012). Studying the impact of using multimedia interactive programs at children ability to learn basic math skills. *Acta Didactica Napocensia*, 5(2), 17–32.
- Ong, W., Allison, J., & Haladyna, T. M. (2000). Student achievement of 3rd-graders in comparable single-age and multiage classrooms. *Journal of Research in Childhood Education*, 14(2), 205–215. <https://doi.org/10.1080/02568540009594764>
- Piaget, J. (1964). Part I: Cognitive development in children: Piaget development and learning. *Journal of Research in Science Teaching*, 2(3), 176–186. <https://doi.org/10.1002/tea.3660020306>
- Potgieter, P., & Blignaut, P. (2018). A system to determine if learners know the divisibility rules and apply them correctly. In S. N. Spencer (Ed.), *Proceedings of the 2018 ACM Symposium on Eye Tracking Research & Applications* (Article No. 6, pp. 1–8). The Association for Computing Machinery. <https://doi.org/10.1145/3204493.3204526>
- Rasmussen, C., Ho, E., & Bisanz, J. (2003). Use of the mathematical principle of inversion in young children. *Journal of Experimental Child Psychology*, 85(2), 89–102. [https://doi.org/10.1016/S0022-0965\(03\)00031-6](https://doi.org/10.1016/S0022-0965(03)00031-6)
- Robinson, K. M., Ninowski, J. E., & Gray, M. L. (2006). Children's understanding of the arithmetic concepts of inversion and associativity. *Journal of Experimental Child Psychology*, 94(4), 349–362. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2006.03.004>
- Sherman, J., & Bisanz, J. (2007). Evidence for use of mathematical inversion by three-year-old children. *Journal of Cognition and Development*, 8(3), 333–344. <https://doi.org/10.1080/15248370701446798>
- Siegler, R. S. (2006). Microgenetic analyses of learning. In W. Damon, & R. M. Lerner (Eds.), *Handbook of child psychology: Vol. 2. Cognition, perception, and language* (6th ed., pp. 464–510). John Wiley & Sons.
- Siegler, R. S., & Stern, E. (1998). Conscious and unconscious strategy discoveries: A microgenetic analysis. *Journal of Experimental Psychology: General*, 127(4), 377–397. <https://doi.org/10.1037/0096-3445.127.4.377>
- Smit, R., & Engeli, E. (2015). An empirical model of mixed-age teaching. *International Journal of Educational Research*, 74, 136–145. <https://doi.org/10.1016/J.IJER.2015.05.004>
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard University Press. <https://doi.org/10.2307/j.ctvjf9vz4>
- Wahyudi, W., Waluya, S. B., Suyitno, H., & Isnarto, I. (2020). The impact of 3CM model within blended learning to enhance students' creative thinking ability. *Journal of Technology and Science Education*, 10(1), 32–46. <https://doi.org/10.3926/jotse.588>
- Weng, T. S., & Yang, D. C. (2017). Research on mathematical animation using pascal animation as an example. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13(6), 1687–1699. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.00692a>

- Wiryanto, W., Mariana, N., Budiyo, B., Rahmawati, I., Indrawati, D., Rachmadiyah, P., & Mintohari, M. (2021). Analysis of the use of mathematic animation video as a line learning alternative to learning motivation. *Journal of Physics: Conference Series*, 1987, 012040. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1987/1/012040>
- Wong, T. T.-Y., Leung, C. O.-Y., & Kwan, K. T. (2021). Multifaceted assessment of children's inversion understanding. *Journal of Experimental Child Psychology*, 207, 105121. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2021.105121>
- Yamana, Y., & Inoue, T. (2006). How can we use animations to help preschoolers to obtain more efficient distribution strategies? *Japanese Psychological Research*, 48(1), 54–63. <https://doi.org/10.1111/j.1468-5884.2006.00306.x>
- Yang, D. C., & Li, M. N. (2013). Assessment of animated self-directed learning activities modules for children's number sense development. *Educational Technology & Society*, 16(3), 44–58. <https://www.jstor.org/stable/jeductechsoci.16.3.44>
- Zamani, M. (2016). Cooperative learning: Homogeneous and heterogeneous grouping of Iranian EFL learners in a writing context. *Cogent Education*, 3(1), 1149959. <https://doi.org/10.1080/2331186X.2016.1149959>
- Zur, O., & Gelman, R. (2004). Young children can add and subtract by predicting and checking. *Early Childhood Research Quarterly*, 19(1), 121–137. <https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2004.01.003>