
蘇意雯、宮川健（2024）。

日本「遺題繼承」傳統下的「蟲蛀算」：經由古文本以及大學生實作之分析。

臺灣數學教育期刊，11（1），37-66。

doi: 10.6278/tjme.202404_11(1).002

日本「遺題繼承」傳統下的「蟲蛀算」：經由古文本以及大學生實作之分析

蘇意雯¹ 宮川健²

¹ 臺北市立大學數學系

² 日本早稻田大學教育・綜合科學學術院

「遺題繼承」的傳統是促使日本傳統數學（和算）發展的一大因素，和算家在所著的和算書卷末，提出一些數學難題，讀者經過努力研究，解決難題之後，一般要著解答之書，並在卷末提出難度更高的問題，讓有心人士去研究解決。本研究從教學轉置觀點，探究日本「遺題繼承」傳統下的蟲蛀算問題，並展示如何將這些原典及其脈絡轉置於今日的數學教學和學習。本研究運用 Yves Chevallard 及後續學者所提出的教學人類學理論，分析江戶時代和算家所產生的「原始」數學知識，發展兩節課 100 分鐘的大學課程。研究者介紹日本「遺題繼承」的傳統，以及「蟲蛀算」問題；經由學習工作單分析學生實際解題所使用的數學知識，也運用學習意見表探討大學數學系學生對於「蟲蛀算」學習之回應。經由研究得知，行知模型可做為分析數學史文本及刻畫學生解題所用數學知識之工具；「蟲蛀算」主題，也可以讓學生經驗到數學思考、數學的文化體驗以及對數學的觀點三個面向的潛能。

關鍵字：行知模型、和算、教學人類學理論、遺題繼承、蟲蛀算

通訊作者：蘇意雯，e-mail：yiwen@uTaipei.edu.tw

收稿：2023 年 10 月 23 日；

接受刊登：2024 年 3 月 22 日。

Su, Y. W., & Miyakawa, T. (2024).

“Mushikuizan” under the Japanese tradition of “bequeathed problems”: Through the analysis of ancient texts and university students’ work.

Taiwan Journal of Mathematics Education, 11(1), 37–66.

doi: 10.6278/tjme.202404_11(1).002

“Mushikuizan” Under the Japanese Tradition of “Bequeathed Problems”: Through the Analysis of Ancient Texts and University Students’ Work

Yi-Wen Su¹ Takeshi Miyakawa²

¹ Department of Mathematics, University of Taipei

² Faculty of Education and Integrated Arts and Sciences, Waseda University, Japan

The tradition of "bequeathed problems" is a major factor in promoting the development of Wasan. Japanese mathematicians put forward some unsolved problems at the end of mathematics books. Other readers who solved these problems generally wrote books about their solutions, and at the end of these books, they asked more difficult questions and encouraged those willing to study and solve them. In this study, the researchers investigate “Mushikuizan” under the Japanese tradition of “bequeathed problems” from a perspective of didactic transposition to unfold how such historical problems and contexts could be transposed to mathematics teaching and learning today. This study is conducted from the perspectives proposed within the Anthropological Theory of the Didactic developed by Yves Chevallard and subsequent scholars. Specifically, the researchers analyze the "original" mathematical knowledge produced by Japanese mathematicians in the Edo period; develop two classes in the university course introducing the tradition of Japanese "bequeathed problems" and the problems of "Mushikuizan"; and investigate students’ reactions to these classes through the worksheets comprising students' work and feedback. In the analysis, the notion of praxeology is used to better understand the mathematical knowledge required to solve “Mushikuizan” problems and the mathematical knowledge used by students. Through research, we found that the notion of praxeology can be used as a tool to analyze the historical texts of mathematics and describe the mathematical knowledge used by students to solve problems; the theme of "Mushikuizan" allows students to experience three aspects of mathematical thinking, cultural experience of mathematics, and understanding of mathematics.

Keyword: praxeology, Wasan, Anthropological Theory of the Didactic, bequeathed problems, Mushikuizan

Corresponding author : Yi-Wen Su , e-mail : yiwen@uTaipei.edu.tw

Received : 23 October 2023;

Accepted : 22 March 2024.

壹、緒論

在過去 40 年左右的時間裡，將數學史融入數學教育已經成為全世界新的教學實踐和具體研究活動的集中研究領域（洪萬生，1984；劉柏宏，2021；蕭文強，1992；蘇意雯，2021；Barbin et al., 2002; Barbin et al., 2020; Fauvel, 1991; Furinghetti & Paola, 2003; Gulikers & Blom, 2001; Tzanakis et al., 2002）。學者們舉出諸多理由以支持把歷史維度融入數學課程，例如激發學生在數學上的興趣、讓我們對於概念和理論有更好的瞭解、多元文化的珍視、幫助數學學習等（洪萬生，1984；蕭文強，1992；Barbin et al., 2002; Fauvel, 1991; Furinghetti & Paola, 2003; Gulikers & Blom, 2001; Tzanakis et al., 2002），時至今日，這些理由仍歷久彌新（Lim & Chapman, 2015）。

數學家兼數學史家 Morris Kline 認為一個時代的特徵在很大程度上與該時代的數學密切相關，通過把數學作為現代文明的一個有機組成部分，將能使我們對數學與現代文化之間的關係有全新的認識（Kline, 1953/1995）。日本鄰近臺灣，是國人旅遊勝地，青少年學子對於日本的影劇、動漫及電玩也不陌生。日本早期汲取中國文化，在江戶時代發展出屬於自己獨特的數學風貌，明治維新之後，積極學習及引進西方科學和數學知識，至今也在國際數學界佔有一席之地，獲得媲美諾貝爾獎的數學界大獎費爾茲獎（Fields medals）的日本學者就有小平邦彥（1954 年）、廣中平祐（1970 年）與森重文（1990 年）三人（康明昌，1991）。在深入檢視日本建立數學教育現代化制度之前，不可避免地必須面對其算學傳統，也就是利用數學史的研究來探討一個文明的特色（洪萬生，2018）。

日本數學的演進，最開始是傳承中國數學，之後日本數學家吸收中國算學，加以創新，關孝和（1645?–1708 年）於 1674 年刊行《發微算法》，日本傳統數學（和算）由此蓬勃發展。到了明治 5 年（1872 年），由於西風東漸，為了學習西洋的船堅砲利，日本政府發布近代學制，宣布廢止和算，改習洋學，1877 年東京數學會社（也就是現在的日本數學會）成立，和算從此漸為西洋數學所取（城地茂，2009）。

與同一時代的世界各地相比，江戶時代（1603–1868 年）的日本數學普及是獨佔鰲頭的，通過寺子屋，基本算術普及到全國各地（城地茂，2009）。18 世紀中期至江戶末期這一百年間，許多重要和算家因自身的算學才能，受聘擔任算學師範，或仰賴開私塾教授算學謀求生計，顯現出江戶末期數學教育普及化，也反映出數學作為一種專門之學的专业化取向（黃俊瑋，2019）。和算之所以得以發展，「遺題繼承」的傳統是一大因素。所謂的「遺題繼承」是指和算家在自己所著的和算書卷末，提出一些數學難題以示讀者，他的弟子、門人、或其他讀者在努力解決難題之後，一般會撰寫難題解答的書籍，並在書籍卷末提出難度更高的問題，讓有心人士去研究解決，從而進一步更深入的探究（蘇意雯，2009）。從日本的社會脈絡中有系統地探查其數學發展，發掘其中蘊含之數學文化特色，從中搜尋可用的數學史料編製課程，相信所得之成果也應能對數學教育工作者有所啟發。

日本全國數學教育學會 2022 年於東京早稻田大學舉辦了第 57 回研究發表會，與會中有數位學者採用「教授人間學理論」作為其研究理論，引起研究者之一的探究興趣。教學人類學理論（Anthropological Theory of the Didactic [ATD]）在過去四十年間逐漸發展成為一種數學教育學的理論，此理論的原始雛型教學轉置（didactic transposition）理論主要是由 2009 年獲頒 Hans Freudenthal 獎的法國學者 Yves Chevallard 所提出。教學轉置理論的首要貢獻之一就是明確指出，如果不考慮與學校數學重新建構有關的現象，就不可能正確解釋學校數學，而其根源必須在產生數學知識的機構中找到。吾人可以將之區分如下：數學家或其他生產者所產生的「原始」或「學術」數學知識；課程正式設計的「要教」的數學知識；教師在課堂上實際教授的數學知識和學生實際學到的數學知識，這可以同時被認為是教學過程的結束，也是新教學過程的起點（Bosch & Gascón, 2006）。

繼 Yves Chevallard 之後一些研究者也相續投入研究，Chevallard 曾於 2016 年訪問日本，並給予演講（Chevallard, 2019），也因此，日本學者也運用 ATD 理論於不同研究，例如探究式教學（Kuzuoka & Miyakawa, 2020）或是教科書分析及公開課的教學研究（Miyakawa & Winsløw, 2013）等。江戶時代的和算典籍正是古代的教科書，和算家在傳統脈絡下如何展現數學知識內容，現代教師佈置文本於課堂而學生解題中所使用的數學知識為何，如何運用教學人類學理論分析數學史文本，以俾利教學活動，也是本文想要探討的重點之一。

在數學的解題中，相信大家都接觸過數字被水漬弄髒或者是收據汗損無法辨識數據等等，需要由給定的線索推測出未知數字的題型。諸如此類問題，在日本稱為「蟲蛀算」。這個稱呼的由來是因為日本古代的紙容易被蟲蛀食，也就此應運而生了這類題型（平山諦，1956/2005）。本研究將經由「蟲蛀算」問題的文獻分析，整理製作數學史學習工作單進行教學，並探討此次教學之學生回應。研究問題如下所示：

- 一、「遺題繼承」傳統下的「蟲蛀算」問題的相關文本是如何呈現？
- 二、運用教學人類學理論分析「蟲蛀算」文本數學知識內容的結果為何？刻畫學生解「蟲蛀算」問題所使用的數學知識情況如何？
- 三、大學數學系學生對於「蟲蛀算」學習之回應為何？

貳、文獻探討

在以下篇幅中，研究者將對於數學史融入數學教學、教學人類學理論，以及江戶時代日本和算特色－「遺題繼承」的傳統及「蟲蛀算」相關類題加以探討。

一、數學史融入數學教學

九年一貫數學領域課綱中曾強調「教師教學裡，引進與主題相關的數學史題材，對學童的學習會有很正面的意義，尤其能協助學童將抽象觀念具體化」（教育部，2008），現今

的十二年國教數學課綱也提到「數學史能夠幫助我們理解數學發展在不同文化的差異」(教育部, 2018)。國際上對於數學史融入數學教學的關注, 早在 1976 年附屬於國際數學教育委員會 (International Commission on Mathematical Instruction [ICMI]) 的數學史與數學教學的關聯之國際研究群 (International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics [HPM]) 就已正式成立, 每四年固定召開一次全球性的會議, 利用數學史的研究成果, 以及數學史與數學教育的互動, 提升數學教師的教學品質與學生的學習成效 (洪萬生, 1998)。

當初 HPM 小組的關注和目標, 迄今為止在某種程度上已有所實現, 也仍然適用於今日 (Barbin et al., 2020)。除了重視國際聯繫和訊息交流以及促進和刺激跨領域探究, 更深入地了解數學的演變以外, 通過將數學教學及數學發展的歷史聯繫起來, 協助改進教學和課程、為教師的利益製作相關素材、方便獲取這些素材和歷史資料、提高人們對數學史與數學教學的相關性的認識以及促進數學的文化通路, 這些目標也是現場教師可以努力的方向。事實上, 在教育場域中的數學史不是一種選擇, 而是一種需求, 是一個理解我們的人性本質上是歷史和文化的過程之核心部分 (Radford & Santi, 2022)。

承上所述, 毋庸置疑, 數學本身也是人類發展過程中所伴隨產生的一種智識文化 (劉柏宏, 2021)。至於大學教師為什麼要教數學史? 經由 Braun 與 Kahn (2019) 的研究發現, 教師們認為數學史的課程提供了將社會正義、公平性及包容性納入數學研究的機會, 可以幫助學生發展有效思維和數學溝通能力, 也能以更寬廣多元的視角看待數學社群。有關於在大學課堂的 HPM 教學, Barnett 等人 (2014) 於大學數學系課堂使用數學原典, 布置閱讀、反思、回應等任務要求學生主動置身於數學原典當時的脈絡, 並與之前和現代的數學實踐比較。研究發現如此數學被學生視為一門動態的學科, 體認到記號和符號也會持續隨著時代變遷。部分數學知識因應社會所需而社會化, 而社會問題數學化的成果也反饋到數學本身。數學依社會進步而發展, 社會因數學發展而進步 (方延明, 2007)。介紹數學的社會面向, 正有助於學生體認數學知識與社會之關聯 (蘇意雯, 2015)。

研究者之一所任教學系為數學專業系所, 學生理應對自身的學科之歷史發展有所認識。另外有一部分的學生畢業後是在各階段的教育領域服務, 更需要了解數學之發展脈絡及概念出處, 並知曉如何搜尋史料, 以利未來各階段的數學教學。也因此, 研究者想要藉由搜尋日本數學史料, 整理素材, 開發數學史課程, 強化學生在數學史的相關知識, 以及了解各民族數學發展和社會脈絡之交互關係, 正是研究者進行本研究的初衷。

二、教學人類學理論架構

對於在本研究中, 我們將探討「蟲蛀算」問題和其可能延伸之數學活動, 也就是闡明此問題類型所涉及的數學知識, 以及學生如何實際解決此問題。因此, 本研究使用了教學人類學 (ATD) 中提出的行知模型 (praxeology) 概念。ATD 是根據起源於法國的數學教育

學傳統所構築，由於此傳統不一定廣為人知，以下我們將先展示此數學教育學傳統，接著再討論 ATD 和行知模型的概念。

（一）法國的數學教育學傳統

有關法國的數學教育學研究，法文稱為 *didactique des mathématiques*，英文稱為 *didactics of mathematics*，日文稱為 *数学教授学*，從 1970 年左右開始發展。這項研究傳統的第一個特徵是，旨在將數學教育，也就是通常被視為數學和心理學等其他研究的應用領域，建立為一個真正的科學研究領域（Artigue et al., 2019）。創建該研究領域的研究人員，將數學教育學定義如下：「它是為了傳播人類活動（廣義）所需的數學知識的特定條件的科學。」（Brousseau, 2010），以及「教育學被定義為一門科學，仍處於起步階段，其目的是研究社會機構中行知模型傳播的條件和限制」（Chevallard & Bosch, 2019, p. xxvii）。

由上可見其目的是為了解數學教育的結構和機制，也就是數學知識或行知模型（請參閱下一節）的傳播。數學教育研究經常陷入規範性討論，包括改善數學教學和學習的方式，以及如何教授什麼樣的數學等問題，這些情況並不罕見，日本就是如此（中原忠男，2017）。處此情境中，我們重視數學教育學研究的科學性，雖然最終目標是改善數學教育，但首先應努力理解與數學教育相關的現象。

法國傳統的第二個顯著特點是，為了理解數學教育的活動，強調理論的構建，迄今為止已經建立了各種各樣的理論。例如，國際上廣為人知，並且可以說形成了法國數學教育學傳統的典型理論包括 Guy Brousseau 提出的教學情境理論（Brousseau, 1997）、Gérard Vergnaud 提出的概念領域理論（Vergnaud, 2009），以及本文所介紹 Yves Chevallard 提出的教學人類學理論（Chevallard, 2019）。這些理論並不是規定教學內容和教學方式的規範理論，而是旨在理解。

法國數學教育學傳統有許多特點，本文最後提到的第三個顯著特點是關注科學知識的本質上，並在其基礎上理解數學教育的活動。這也是為什麼經常使用「知識論」（epistemology）這個術語的原因（Gascón, 2003）。因此，迄今為止發展的理論，正如上文所示，旨在透過理論來表徵數學知識是什麼，然後試圖理解主導數學傳播機制。本文所涉及的教學人類學理論也是在這樣的背景下發展的。

（二）教學人類學概要

前文已提及，教學人類學理論主要是由在 2009 年獲頒 Hans Freudenthal 獎的法國學者 Yves Chevallard 所提出，從 1980 年左右開始，ATD 逐漸發展成為一種數學教育學理論，已有 40 多年的歷史（Bosch & Gascón, 2006; Chevallard & Bosch, 2020）。時至今日，ATD 被運用於各種知識的教學和學習等相關研究，不僅沒有侷限於數學，還包括了英語、生物學、歷史等面向（Chevallard, 2019）。國際學界會定期召開 ATD 相關會議，全球也有許多學者參與 ATD 研究。而在日本，由於 Chevallard 博士於 2016 年受邀舉辦講座和工作坊，也因此使得 ATD 成為日本數學教育學研究者熟知的理論。

ATD 源自教學轉置理論，最初旨在闡明在學校教育中，所教授數學內容的特質（Chevallard, 1991; Chevallard & Bosch, 2020）。我們通常認為所教之數學內容我們很熟悉，然而 ATD 指出，人們認為數學的性質會因被稱為「機構」的社會性群體而有所不同。例如，數學家的數學、應教導的數學、被教導的數學、和算的數學、法國學校的數學等。因此我們首要需了解數學的特質。為了理解教室內的數學教導與學習現象，吾人必須探討其如何從數學家的數學中形成，並掌握此稱之為教學轉置現象的過程。

迄今為止，在 ATD 的發展過程中，許多理論概念和工具已被建立，成為數學教育學中的重要理論，並持續發展中。這些理論工具可用於教科書分析、教師培訓、建模、探究式學習、大學數學教育等多方面的研究。而在本文中所採用的行知模型概念，是分析數學及其他人類活動的基本工具之一，尤其是為了描述教學轉置中所關注的數學特質而被創立。

（三）行知模型

在討論數學的教導和學習時，經常使用數學知識、概念和內容等不同術語來解釋教學主題。儘管所有這些術語都可以直觀地理解，但當具體詢問其內涵時，並不總是清楚它們的含義。在上述教學轉置中，被轉置的對象常常被稱為「數學知識」(Bosch & Gascón, 2006)，但尚不清楚所指為何以及如何描述。因此，為了解決這個問題而引入的概念就是行知模型。也就是說，以行知模型取代「數學知識」和「數學內容」等術語。

這裡重要的是，「praxeology」（行知模型）這個詞是「praxis」（實踐）和「logos」（知識）的組合。這並不表示行知模型意味著「關於實踐的知識」，而是基於「人類活動總是可以通過實踐和知識的結合來描述」這樣的想法。也就是說，在理解知識時，不僅需要掌握數學定理和性質等理論方面，同時還需要掌握所解決的問題和方法。在教學人類學中，行知模型的概念可以用來描述人類活動，不僅僅是數學，還可以描述教師的知識和技能（Bosch & Gascón, 2006; Chevallard, 2019）。

在以下的篇幅中，我們參照不同的文獻（Chevallard, 2019; Chevallard & Bosch, 2020）更進一步探討行知模型的主要特性。

一個行知模型，具體來說是由實踐區塊和知識區塊所構成。實踐區塊由包含一個以上任務的「任務類型 T 」（type of tasks）和解決該任務類型的「技法 τ 」（technique）組成。知識區塊是由正當化說明為何選擇前技法的「技理 θ 」（technology），以及解釋技理的「理論 Θ 」（theory）所組成。也就是說，實踐區塊可以用 $[T/\tau]$ ，知識區塊可以用 $[\theta/\Theta]$ 來表示，一個行知模型可以用 $[T/\tau/\theta/\Theta]$ 來表示。

例如，以國中時學習的畢氏定理這個單元來說，常會出現已知直角三角形的兩邊的長度（例如斜邊和底邊），要求第三邊的長度（例如高）的任務類型。在這種任務類型 T 下，列出諸如 $a^2 + x^2 = c^2$ 之類的方程式並求解，是解決此任務類型的技法 τ ，而畢氏定理就是正當化技法 τ 的技理 θ 。當然，畢氏定理本身是受到國中的平面幾何理論所支持，這些要素就構成了一個行知模型。

此外，如上所述的行知模型是僅含一個任務類別，此種單由四個要素組成的行知模型 $[T/\tau/\theta/\Theta]$ 我們稱之為「單一（pinpoint）行知模型」。另一方面，一種技理很多時候通常也可以解決不同的任務類型。也就是說，當考慮一種包含多種任務類型及其相應技法的行知模型 $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$ ，我們稱之為「局部（local）行知模型」。另外，由於一種理論可以包含多種技理，我們也可以考慮由具有共同理論的多種局部行知模型組成的「區域（regional）行知模型」 $[T_{ij}/\tau_{ij}/\theta_j/\Theta]$ 。也可以考慮由多個區域行知模型組成的「大局（global）行知模型」 $[T_{ijk}/\tau_{ijk}/\theta_{jk}/\Theta_k]$ 。

透過上述不同的行知模型，這個概念不僅描述了人類活動，而且顯示了知識的結構和構成要素。因此，行知模型通常也被稱為行知組織（praxeological organization）。例如，在國中二年級幾何領域的教學內容就可以用區域行知模型來刻畫，此區域行知模型是以國二的平面幾何學為其理論，以三角形外角定理，三角形全等性質等為其技理。

有許多研究使用了行知模型的概念，主要常用於為了突顯某個國家數學教學的特徵，而對教科書所進行的分析（Bittar, 2022; González-Martín, 2021; Solis & Isoda, 2023; Takeuchi & Shinno, 2020; Wijayanti & Winsløw, 2017）。透過行知模型來刻畫在不同國家教科書中所教授的數學內容，提供了我們可明確比較的對象，允許我們從國際觀點中討論，所要教導的理論元素是什麼、所設想的活動有哪些，以及形成什麼樣的數學系統結構。例如，Takeuchi 與 Shinno（2020）根據行知組織對英國和日本的數學教科書進行了國際比較研究，針對幾何對稱的章節，揭示了對稱性以不同的方式定位。也就是說，對稱性在日本是與證明教學密切相關，而在英國則有許多跨領域的連結。

除此之外，行知模型還用於分析學生在課堂上的活動以及教師在課堂內外的活動和知識的研究（Miyakawa & Winsløw, 2013, 2019），也用於分析師資培育者的活動和知識的研究（Asami-Johansson et al., 2020），還被運用於針對研究者的活動與知識分析等相關研究（Artigue & Bosch, 2014; Wang et al., 2023）。

三、日本「遺題繼承」的傳統及「蟲蛀算」相關類題

江戶時代的日本在數學方面，創造了屬於和算的輝煌年代，這些數學家們的著述滲透著中國古代數學的營養，同時也閃耀著在中國傳統數學基礎上創新的火花（李文林，2008）。在這日本文藝復興時代，和算被視為「算道」，以藝道的形式生存與發展，此時數學流派林立，名家輩出。在關孝和與建部賢弘等江戶初期和算家的開拓下，和算逐漸改變實用算術的風格，學術性日益增強，呈現脫離中國數學知識體系而獨步發展的態勢。

日本數學家吉田光由在 1627 年出版《塵劫記》廣獲好評，由於盜版書猖獗，到了 1641 年新版的《塵劫記》，書末提出 12 個問題對有心向學的讀者挑戰，引發了和算家「遺題繼承」的風氣，成為此時期重要的和算文化與數學知識活動（城地茂，2009）。例如澤口一之在 1671 年出版目前已知第一本正確了解和操作中國天元術的日文書籍《古今算法記》，書末就留下 15 題無法以天元術求解的問題。關孝和在 1675 年初出版《發微算法》，解決了

《古今算法記》所有遺題，但只提供簡要解答，之後其弟子建部賢弘在 1685 年出版《發微算法演段諺解》，提供詳細註解，關孝和的改良代數才廣為人知（蘇意雯，2009）。

有了「遺題繼承」的傳統，再加上算學私塾林立，一方面吸引更多算學人才，同時也發展出各種新問題，在社會動因以及問題本身的內在困難度驅使之下，和算家開始學習、消納中算天元術，並研究新的方法、包含設立方程、消元與解複雜方程，用以解決各類難題（黃俊瑋，2013）。在「遺題繼承」的傳統下，「蟲蛀算」問題也出現其中，正是本研究想要探討的文本。

「蟲蛀算」問題的題型，其實早於國內的考題出現，例如國中教育會考全國試務會（2002，2006）釋出的 91 學年度第一次國中基測數學科第 24 題出現了數字被水漬弄髒的題型（如圖 1 所示），無獨有偶到了 95 學年度第二次國中基測數學科第 22 題也出現了收據汙損無法辨識數據的問題（如圖 2 所示）。


圖 1

91 學年度第一次國中基測數學科第 24 題

24. 小薰想在花園中，圍出一塊土地種玫瑰花，他以自己的位置為中心找出與他等距的甲、乙、丙三點，並測量此三點間的距離，紀錄如表(三)。表中有部分為水漬所弄髒，使得丙到甲的距離無法辨識。已知弄髒的部分為一整數，則此數字可能是下列哪一個？

(A) 3
(B) 5
(C) 6
(D) 8

表(三)

	甲到乙	乙到丙	丙到甲
距離 (公尺)	1.5	7.5	

註：引自國中教育會考全國試務會（2002）。91 年第一次國民中學學生基本學力測驗。
<https://ananedu.com/cicve2/pdf/9101m.pdf>


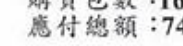
圖 2

95 學年度第二次國中基測數學科第 22 題

22. 表(一)為小美採買火鍋料的收據，但因汙損導致幾個重要數據無法辨識。根據表(一)判斷粉絲與茼蒿的數量差異為何？

(A) 粉絲比茼蒿多 2 包
(B) 茼蒿比粉絲多 2 包
(C) 粉絲比茼蒿多 4 包
(D) 茼蒿比粉絲多 4 包

表(一)

品名	售價(元/包)	數量(包)	金額(元)
綜合火鍋料	89	2	178
粉絲	39		
火鍋肉片		3	264
金針菇	25	3	75
茼蒿	30		
雞蛋	17	2	

購買包數：16
應付總額：740

註：引自國中教育會考全國試務會（2006）。95 年第二次國民中學學生基本學力測驗。
<http://db.tp.edu.tw/bctestinfo/9502Math.pdf>

在日本，「蟲蛀算」也出現於國小二年級的教科書中（一松信、岡田禎雄，2020），在臺灣亦曾進行於國小的二位數加減教學（蘇意雯，2023）。可見此種類型的問題經過設計，可適用於不同年齡層的學生。「蟲蛀算」引起人們感興趣的原因在於肯定是能夠解答的問題，而且問題的解有一個或兩個，即使有若干個也不會失去它的意義。此外就是「蟲蛀算」的問題比一目了然的問題更加吸引人（平山諦，1956/2005）。也因此，研究者想要探討在日本「遺題繼承」傳統下，原始典籍中「蟲蛀算」問題的相關文本如何呈現，並編製成學習工作單，讓學生欣賞此段歷史發展，體會數學多樣風貌，呼應數學史融入數學教學的訴求。

在本研究中，研究者除了分析在日本「遺題繼承」脈絡下「蟲蛀算」問題的發展，也嘗試運用行知模型分析此「蟲蛀算」課程之實踐歷程，展示「蟲蛀算」問題的數學知識內容和學生對此「蟲蛀算」問題的解題策略，以及學生對於「蟲蛀算」課程活動的回應。

參、研究方法

本研究採用內容分析法，在許多領域的研究，常需要透過文獻獲得資料，因此內容分析法便具有研究價值與採用的必要，主要是在解釋某特定時間某現象的狀態，或在某段時間內該現象的發展情形（王文科、王智弘，2006）。

在本研究的第一部分，研究者以內容分析的方式進行日本「遺題繼承」傳統下的「蟲蛀算」文獻相關研究。研究者從日本數學史相關文獻中，分析「遺題繼承」傳統下的「蟲蛀算」問題，並進行整理。也就是說，研究者從教學轉置觀點，探究日本「遺題繼承」傳統下的蟲蛀算問題，並思索如何將這些原典及其脈絡轉置於今日的數學教學和學習。研究者運用 Yves Chevallard 及後續學者所提出的教學人類學理論，分析江戶時代和算家所產生的「原始」數學知識，發展大學課程。

在本研究的第二部份，研究者以行知模型架構，分析探討如何將「蟲蛀算」史料編製成大學數學系數學史課程素材，以學習工作單進行的實踐歷程。學習工作單首先布置和算典籍的「蟲蛀算」問題，研究者藉由文字敘述及題目呈現，讓學生體驗日本「遺題繼承」傳統下的「蟲蛀算」，研究者也先以教學人類學的數學行知模型進行分析，接著再由學生的解題過程，檢視及分析學生的個人行知模型，並經由教學結束學生所填答的學習意見表，了解學生對於本實作活動的回應。

本研究對象為修習 111 學年度第 2 學期數學系大三開設的數學史課程之學生 21 名，包含三位外系選修的學生。研究者以兩節課 100 分鐘的時間，完成此次的「蟲蛀算」主題教學活動。第一節課研究者講述日本「遺題繼承」的傳統及「蟲蛀算」的由來，並請學生閱讀學習工作單，解決「蟲蛀算」問題中未知的部分。研究者鼓勵學生互相討論，並利用下課時間思索要如何布置「蟲蛀算」問題。

經過前一節課解決古文本中的「蟲蛀算」問題之後，第二節課研究者請學生設計屬於自己的「蟲蛀算」，並邀請一位同儕挑戰解題及相互討論。完成學習工作單任務之後，研究

者請學生填寫學習意見表，經由學習工作單及學習意見表，分析學生對於「蟲蛀算」史料的數學思考行為模式。

資料收集有學生填寫的學習工作單，訪談資料以及匿名填寫的課程實施學生學習意見表，課程實施學生學習意見表共有 9 題問題以五分量表方式勾選，探討學生的學習感受，並於每題其後請學生質性說明理由以符應本研究所需。第十題為質性問題，請學生寫下本活動的學習心得。資料編碼方式第一碼為資料類別，第二碼為學生年級，第三碼為系別，後兩碼為學生編號，本研究所收集之資料先由研究團隊初步整理後，再由兩位研究者進行內容分析，並就研究結果進行專家諮詢。

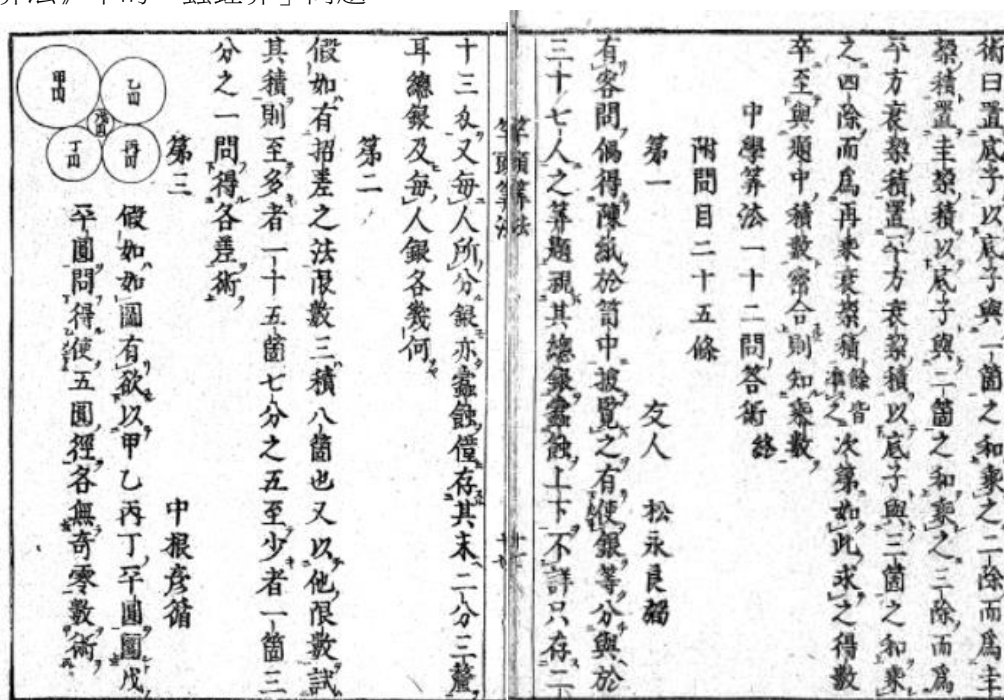
肆、研究結果

一、「蟲蛀算」相關問題解析

「蟲蛀算」的問題首次被印刷出版正是因為前文所提及的「遺題繼承」之傳統。和算家中根彥循為了解答青山利永於 1719 年出版的《中學算法》的 12 條提問，於 1738 年出版了《竿頭算法》一書，並於解答之後又附上了 25 條問題，其中的第一問就是有關紙條被蟲蠹蝕的問題，如圖 3 所示。這個問題在後來神谷保貞於 1745 年出版的《開承算法》中被解答出來，請詳見附錄。

圖 3

《竿頭算法》中的「蟲蛀算」問題



註：引自中根彥循（1738）。竿頭算法（頁 17）。<https://doi.org/10.20730/100234659>

隨著和算的蓬勃發展，很多流派也風起雲湧。1808 年發行，於 1861 年五刻的宅間流五世松岡能一之著作《算學稽古大全》中，將題目設計成一張以賣米換取銀兩的字據，但此字據被蟲蛀了一個大洞，請詳見附錄。設計日本「蟲蛀算」之學習工作單，讓學生知曉江戶時代將每筆買賣記錄在帳簿中的商人，可以利用「蟲蛀算」計算出原本的金額，除了體會異國文化的數學趣味，並進而探究解題，這正是課堂上可供運用的數學史素材。

二、教學設計及學習工作單問題分析

本研究「蟲蛀算」教學實作活動的設計理念是讓學生體驗數學與文化之連結，並領略「蟲蛀算」的解題樂趣。研究者以日本為例，介紹和算發展中「遺題繼承」的傳統文化，接著展示和算典籍，以實際例子讓學生體驗在「遺題繼承」氛圍中的「蟲蛀算」問題，讓學生閱讀古代文本並嘗試解題。「蟲蛀算」教學實作流程是學生每人發放一份學習工作單（請參見附錄），學習工作單的第一題和第二題是和算原典中的「蟲蛀算」問題。研究者先以簡報檔介紹日本「遺題繼承」的傳統及「蟲蛀算」的由來，接著請學生完成學習工作單，解決「蟲蛀算」問題中未知的部分。研究者以原典的閱讀理解及解題方式編製學習工作單，之後並要求學生設計屬於自己的「蟲蛀算」問題，並邀請一位同儕挑戰解題。有關於問題三學生擬題類型部分，因為課堂上分配時間不足，學生多直接仿照原典題型，受限於本文篇幅，研究者將不在此處探討。

接下來，讓我們分析「蟲蛀算」教學實作活動中的數學行知模型。在實踐區塊中，任務的類型是「蟲蛀算」問題，因為問題一和問題二都是除法問題，在本文中，我們將只針對問題一—— $23.___ \div 37 = ___.23$ 分析。此處的技法可以有數種，各自對應不同的技理以及理論。舉例來說第一種是不含未知數的直式乘法，知識區塊所對應的技理是乘除互逆以及乘法直式算則，所用的理論是算術。

第二種技法是含未知數的直式乘法，知識區塊所對應的技理也是乘除互逆、乘法直式算則以及方程式的性質，所用的理論則是代數。第三種技法是不含未知數的直式除法，知識區塊所對應的技理是除法直式算則，所用的理論是算術。第四種技法是含未知數的直式除法，知識區塊所對應的技理也是除法直式算則以及方程式的性質，所用的理論則是代數。

第五種技法是使用含未知數的恆等式 $(10a + b + 2/10 + 3/100) \times 37 = 1000c + 100d + 23 + e/10 + f/100$ ，知識區塊所對應的技理是恆等式、方程式的性質，也有可能運用到整數的倍數概念，或是運用到同餘概念，至於所用的理論則是代數。諸如此類種種實踐區塊和知識區塊的搭配，我們可以將「蟲蛀算」教學實作活動的數學行知模型如下表 1 所示。

表 1

「蟲蛀算」教學實作活動的數學行知模型元素

元素	對應之任務類型/技法/技理/理論
t	「蟲蛀算」問題：除法 (e.g., $\underline{\quad}\underline{\quad}23.\underline{\quad}\underline{\quad} \div 37 = \underline{\quad}\underline{\quad}.23$)
τ	1. 直式乘法 (A)含未知數 (B)不含未知數 2. 直式除法 (A)含未知數 (B)不含未知數 3. 使用含未知數的恆等式 $(10a + b + 2/10 + 3/100) \times 37 = 1000c + 100d + 23 + e/10 + f/100$
θ	1. 乘除互逆 2. 乘法直式算則 3. 除法直式算則 4. 恆等式 5. 方程式的性質 6. 整數的倍數概念 7. 同餘
Θ	1. 算術 2. 代數

三、學生的數學知識之分析

經過數學行知模型的分析之後，接下來的篇幅，我們將檢視學生的個人行知模型。就學生的個人行知模型而言，我們同樣以第一題為例，任務的類別都是解出 $\underline{\quad}\underline{\quad}23.\underline{\quad}\underline{\quad} \div 37 = \underline{\quad}\underline{\quad}.23$ 的「蟲蛀算」問題，但是學生們採取了不同的技法及與之對應的技理和理論，因此產生相異的個人行知模型，研究者將舉例如下。

例如從圖 4 學生的解題過程 (W4M05) 分析發現，學生的個人行知模型第一種技法是不含未知數的直式乘法，知識區塊所對應的技理是乘除互逆以及乘法直式算則，所用的理論是算術。可以如下表 2 所示。

圖 4

學生的個人行知模型一舉隅 (W4M05)

問題一：請解出此問題之答案(例如:總銀3貫5百2十3分5厘，每人銀9十5分2厘3厘。)

表 2

學生的個人行知模型一

元素	對應之任務類型/技法/技理/理論
t	解出 $\underline{\quad}23.\underline{\quad}\div 37 = \underline{\quad}.23$ 的「蟲蛀算」問題
τ	直式乘法：不含未知數
θ	乘除互逆、乘法直式算則
Θ	算術

個人行知模型第二種技法是含未知數的直式乘法，知識區塊所對應的技理也是乘除互逆、乘法直式算則以及方程式的性質，所用的理論則是代數。如下表 3 所示，我們並以圖 5 學生的解題過程 (P4M04) 加以舉例說明。

表 3

學生的個人行知模型二

元素	對應之任務類型/技法/技理/理論
t	解出 $\underline{\quad}23.\underline{\quad}\div 37 = \underline{\quad}.23$ 的「蟲蛀算」問題
τ	直式乘法：含未知數 a 和 b (以圖 5 為例)
θ	乘除互逆、乘法直式算則、方程式的性質
Θ	代數

圖 5

學生的個人行知模型二舉隅 (P4M04)

問題一：請解出此問題之答案(例如：總銀 3 貫 5 百 2 十 3 匁 5 分 1 厘，每人銀 9 十 5 匁 2 分 3 厘。)

$$\begin{array}{r}
 a \quad b \quad 2 \quad 3 \\
 \quad \quad \quad 3 \quad 7 \\
 \hline
 7a \quad 7b+1 \quad 6 \quad 1 \\
 3a \quad 3b \quad 6 \quad 9 \\
 \hline
 3a \quad 7a+3b \quad 7b+8 \quad 5 \quad 1
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 7b+8 &= 43 \\
 \Rightarrow b &= 5 \\
 7a+3b+4 &= 7a+19=82 \\
 \Rightarrow a &= 9
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 9523 \\
 37 \\
 \hline
 66661 \\
 28569 \\
 \hline
 352351
 \end{array}$$

個人行知模型第三種技法是不含未知數的直式除法，知識區塊所對應的技理是除法直式算則，所用的理論是算術。如下表 4 所示，我們並以圖 6 加以舉例說明。

表 4

學生的個人行知模型三

元素	對應之任務類型/技法/技理/理論
t	解出 $\underline{\quad}23.\underline{\quad}\underline{\quad} \div 37 = \underline{\quad}\underline{\quad}.23$ 的「蟲蛀算」問題
τ	直式除法：不含未知數
θ	除法直式算則
Θ	算術

圖 6

學生的個人行知模型三舉隅 (P3L25)

問題一：請解出此問題之答案(例如：總銀 3 貫 5 百 2 十 3 匁 5 分 1 厘，每人銀 9 十 5 匁 2 分 3 厘。)

$$\begin{array}{r}
 9523 \\
 37 \overline{) 352351} \\
 \underline{333} \\
 195 \\
 \underline{185} \\
 105 \\
 \underline{74} \\
 111 \\
 \underline{111} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \times 23 \times \times = 37 = \times \times . 23 \\
 & \times \times 23 \times \times = 37 = \times \times . 23
 \end{aligned}$$

個人行知模型第四種為技法是使用含未知數的恆等式 $(10a + b + 2/10 + 3/100) \times 37 = 1000c + 100d + 23 + e/10 + f/100$ ，知識區塊所對應的技理是乘除互逆、恆等式、整數的倍數概念以及方程式的性質，所用的理論則是代數。如下表 5 所示，我們並以圖 7 加以舉例說明。

表 5

學生的個人行知模型四

元素	對應之任務類型/技法/技理/理論
t	解出__ __23.__ __ $\div 37 =$ __ __.23 的「蟲蛀算」問題
τ	使用含未知數的恆等式 $(10a + b + 2/10 + 3/100) \times 37 = 1000c + 100d + 23 + e/10 + f/100$
θ	乘除互逆、恆等式、整數的倍數概念:兩數相乘若所得之積末位數字是 5，則兩數必有一數的末位數字是 5（以圖 7 為例）、方程式的性質
Θ	代數

圖 7

學生的個人行知模型四舉隅（P3M21）

問題一：請解出此問題之答案(例如:總銀 3 貫 5 百 2 十 3 分 5 厘，每人銀 9 十 5 分 2 厘。)

$$\begin{aligned} \square\square23.\square\square &= 37 \times \square\square.23 \\ &= 37 \times (x + 0.23) \\ &= 37x + 8.51 \\ \Rightarrow 37x &= \square\square23.\square\square - 8.51 \text{ (整數)} \\ \Rightarrow 37x &= \square\square15.00 \\ \Rightarrow x &= 95 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 37(x + 0.23) = 3523.51$$

使用同種技法的此類學生也有人意識到，並寫出答案不只一組解的個人行知模型。也有學生使用同種技法，並加以延伸至同餘概念的是個人行知模型第五種，技法同樣是使用直式乘法:含未知數，以及含未知數的恆等式 $(10a + b + 2/10 + 3/100) \times 37 = 1000c + 100d + 23 + e/10 + f/100$ ，知識區塊所對應的技理是乘除互逆、恆等式、方程式的性質及同餘，所用的理論則是代數。如下表 6 所示，我們並以圖 8 加以舉例說明，

表 6

學生的個人行知模型五

元素	對應之任務類型/技法/技理/理論
t	解出 $\underline{\quad}23.\underline{\quad}\div 37 = \underline{\quad}.23$ 的「蟲蛀算」問題
τ	直式乘法：含未知數、使用含未知數的恆等式 $(10a + b + 2/10 + 3/100) \times 37 = 1000c + 100d + 23 + e/10 + f/100$
θ	乘除互逆、恆等式、方程式的性質、同餘
Θ	代數

圖 8

學生的個人行知模型五舉隅 (P4M11)

問題一：請解出此問題之答案(例如：總銀 3 貫 5 百 2 十 3 分 1 厘，每人銀 9 十 5 分 3 厘。)

let $ab23.cd = 37 \times ef.23$

$\Rightarrow \begin{cases} c=5, d=1 \\ 7f+8 \equiv 3 \pmod{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f=5 \\ (9e+3f)+4 \equiv 2 \pmod{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3e+8 = 3 \times 7+8 \\ = 35 \\ = 10a+b \end{cases}$

$\Rightarrow f=5, 7f+8=43$

$\Rightarrow 7e+19 \equiv 2 \pmod{10}$

$\Rightarrow e=9, 9e+19=82$

$\Rightarrow a=3, b=5$

Handwritten work also shows a long division of $ef.23 \div 37$ resulting in $ab23.cd$ and a calculation $(3e)(9e+3f)$.

以 21 份的學生學習工作單，除了一位學生 (P4M12) 因為當天晚到，本題沒有作答外，我們發現對照數學行知模型的實踐區塊，在技法上的採用數量分別如下表 7 所示

表 7

「蟲蛀算」教學實作活動的學生技法分類

技法 (Techniques)	學生人數
1. 直式乘法 (A)含未知數	1
(B)不含未知數	6
2. 直式除法 (A)含未知數	0
(B)不含未知數	3
3. 使用含未知數的恆等式	10

由上表可以得知，在此教學實作活動中，教師可以利用數學行知模型，分析教材中的數學知識內容以及需要解決此問題的概念，對所布置之教材可以更清晰的掌握。此外經由學生的個人行知模型對照，我們可以發現對特定類型任務（蟲蛀算問題）的數學行知模型分析，使我們能夠刻畫出學生的個人行知模型，了解其在解決該任務時的數學知識和實踐，

可作為教師於課前教學設計之參考。也就是說，對於數學行知模型元素的分析，能使教師於授課前充分考慮學生對於此類型任務的解題技法，使備課活動更形完整。在之後教學實作中，也可以針對學生技法不足之處予以補充。

由於本研究所涉及之機構為大學場域，大學生對於數學原典中的問題經閱讀理解後，答題並沒有困難，也幾乎都能答對。因此在本研究中，研究者並不評價學生的數學知識或答題品質。主要目標是分享歷史問題，並以行知模型為工具，分析學生解題所運用的數學技法。至於學生若使用相異之技法是否會比較容易、快速得到答案，進而影響其答題品質，這些考量針對不同機構的教學者，例如中學教師或小學教師，就可以根據其教學目標，再對學生的個人行知模型逐一加以分析。

四、學生對於「蟲蛀算」數學史學習工作單之回應

學生才是學習的主體，除了「蟲蛀算」數學史學習工作單的閱讀理解歷程外，研究團隊也設計「蟲蛀算」課程實施學生學習意見表以了解學生參與「蟲蛀算」課程活動後的感想與收穫。本學習意見表有 9 題問題以五分量表方式勾選，探討學生的學習感受，為讓學生真實表示意見，以求資料的詳實，本份意見表以匿名的方式填答，題目及學生回應狀況如表 8 所示。

表 8

「蟲蛀算」學習意見表各題平均數及標準差

題項	平均數	標準差
1. 我覺得本單元能讓我體會到數學解題的樂趣。	4.43	.676
2. 我覺得本單元能讓我回顧之前所學過的數學方法。	4.14	.727
3. 我覺得本單元能幫助我了解日本本土數學「遺題繼承」的特色。	4.19	.680
4. 我覺得本單元能幫助我了解日本數學史的發展脈絡。	4.19	.602
5. 我覺得解題蟲蛀算能幫助我提升研究探究的能力。	4.05	.805
6. 我覺得設計蟲蛀算題目能幫助我提升創造力。	3.95	.740
7. 我覺得邀請同學挑戰並解題能幫助我提升溝通的能力。	3.67	.856
8. 我覺得本單元能提高我學習數學的興趣。	4.19	.602
9. 我覺得本單元能幫助我了解數學的文化面向。	4.19	.680
全部題目	4.11	.708

研究者於「蟲蛀算」課程實施學生學習意見表的每個問題後面，都請學生質性說明理由，以更了解學生真實想法。關於 21 位學生對於「蟲蛀算」數學史學習工作單之回應狀況，

其中第 1 題「我覺得本單元能讓我體會到數學解題的樂趣」同意度最高，達 4.43。學生的理由諸如「透過實作可以增加參與的興致」、「展現了很多平常沒想過的故事、公式由來、證明等，讓我能再次思考一些平常看似理所當然的題目、公式，去尋找其中的奧妙、樂趣」、「有趣又不會太複雜，有成就感」、「一些以前沒聽過的技巧讓我耳目一新」等。

同列次高分 4.19 分的共有 4 題，關於第 3 題「我覺得本單元能幫助我了解日本本土數學『遺題繼承』的特色」，學生的回應有「把困難的題目留給下一個人的方法可以使人的腦袋更進步」、「很意外數學題是會被大家重視的，還會繼承」、「日本對於數學也是有很多不同的文化，其中傳承自己解不出的問題供後人所解也很棒，隨著知識越來越多，能解出的題也越來越多，又會產生更多新的問題，新的想法」等。

關於第 4 題「我覺得本單元能幫助我了解日本數學史的發展脈絡」，學生的回應如「有，而且我覺得很新鮮，以前都沒有遇過這種問題」、「有介紹主題原由，所以有所了解」、「老師有講解一些歷史的發展關係」、「透過蟲蛀算了解日本數學史」等。

關於第 8 題「我覺得本單元能提高我學習數學的興趣」，學生的回應有「蟲蛀算數學的學習讓我多認識一個數學歷史讓我提升興趣」、「聽到很多數學故事、認識很多數學家、發覺很多數學的秘密，會讓我想挖得更深，想找更多故事來看」、「有很多有趣的地方，讓我知道數學不只是考試，一開始都是拿來解決生活上的問題的」、「認識到不同於教科書上的數學」等，也有學生表示「多少恢復一點被必修消磨掉的興趣」。

關於第 9 題「我覺得本單元能幫助我了解數學的文化面向」，學生的回應有「可以理解各式各樣不同的數學文化，很不錯」、「不同國家的不同數學知識、數學故事都很有趣，也都會受到當時環境影響有不一樣的風貌」、「了解了蟲蛀算以及遺題繼承的數學文化」、「同樣是數學，在不同地方有不一樣的文化面向，我覺得很有趣」等，更有學生認為「跟現實生活結合，我們的東西 100 年後也說不定會變成另類的蟲蛀算」。

在問卷的九個問題中，平均最低的是第 7 題「我覺得邀請同學挑戰並解題能幫助我提升溝通的能力」，只有 3.67 分。研究者之所以會布置這個題目，主要是基於十二年國民基本教育之課程發展本於全人教育的精神，以「自發」、「互動」及「共好」為理念，強調學生是自發主動的學習者，並提出「自主行動」、「溝通互動」及「社會參與」三大面向。此處的「溝通互動」是強調學習者應能廣泛運用各種工具，有效與他人及環境互動。這些工具包括了物質工具和社會文化工具，物質工具是指人造物（教具、學習工具、文具、玩具、載具等）、科技（含輔助科技）與資訊等，至於社會文化工具則是指語言（口語、手語）、文字及數學符號等（教育部，2014）。本校之前身為師資培育學校，學生畢業後大多為國小教師，直至今日，也仍會有部分學生畢業後至各類教育現場工作，因此溝通能力的培養實需多所關注。

在本次課程活動安排中，研究者讓學生出題，並邀請身邊同儕解答，想借此增進學生數學溝通能力，但是這項任務的認同度竟是全部問題中最低的。贊同學生的回應例如「可以進一步跟同學交流」、「跟同學解釋題目會提升溝通能力」、「在解題的過程中需要雙方的溝通，可以提升溝通的能力」、「透過解題跟其他人溝通交流」等，但是也有學生認為「同

學解題很順利，不太需要溝通」、「沒什麼溝通」、「因為數學系的人都願意接受題目」等，或者是個人因素「是可以啦，但有點社恐，同學我都不太認識，要找同學解題對我來說是個大難題」。

為了更了解此類教材對於學生數學學習體驗的影響，研究者也於問卷最後布置質性問題，讓學生回顧課程活動。研究者分析學生的書面答案，並以歸納的方式整理為與數學學習相關的三個面向，分別是數學思考、數學的文化體驗以及對數學的觀點。以下將分別加以說明。

（一）數學思考面向

1. 體會到代數的威力及解法的多元

例如「雖然有些蟲蛀算的題目很難，如果有運用到代數的話倒是很好處理題目」、「在解題的過程確實都是使用過往國高中所學習的數學知識，甚至同學還使用了 `mod` 來解題，大家不同的解題方式讓我感覺到這就是數學有魅力的地方」、「一開始在學習的時候，有一點就是用拼湊方式的方法解答出題型，但教授利用請同學上台的方式讓我知道，原來大家有那麼多的想法，有人用代數設一些未知數，也有人跟我一樣用爆開的，讓我很佩服大家，因為一開始完全沒有想到那麼多方法」等等。

2. 關於擬題的思考

例如「設計題目時也沒那麼容易，如果沒先自己算過，會發現不了其中的錯誤，我出的題目就是這樣。是讓同學試寫時，才發現的」、「出題若照著前面有的例題出，只是改數字就不會太難，難的是要產生完全不同類型的題目（所以我沒這麼做），要想怎麼設計格子，怎麼樣才不會出現多組解，若要加入題目背景故事，甚至要想如何放入合理的內容，真的很多要想，出題目者真的很厲害」、「這次的課程令學生很有參與感，出題目的時候還需要考慮到自己出的題目是否合理」、「設計蟲蛀算時，先將想要出的等式先列出來，再效仿日本傳統的題目，將這些數值結合實際案例。同學很快就將其解出了，感覺下次應該要出難一點」等等。

（二）數學的文化體驗面向

例如「我在這次的活動中學習到了日本數學發展的脈絡，並在其中瞭解了蟲蛀算的問題跟歷史中的例子」、「從蟲蛀算的原始題目中，我們可以看到日本的傳統數學文化，讓我更加瞭解數學在不同地方的發展，解蟲蛀算也讓我有更多的思考」、「覺得前人的數學計算方式很有趣，也讓我學習到跟現在有點像的計算方式，我覺得很有趣」、「遺題繼承的部分滿有趣的，感覺像是一種競爭，解完了上一題就要再出一題給別人解」、「了解了遺題繼承以及日本的數學發展內容，以及如何用邏輯思考來解決蟲蛀算的問題」、「把自己想的題目讓同學去解答，有種刺激感，想知道對方會用什麼方法解出來，會解多快？也理解古人用這個設計問題的方式讓他人來解的心態是如何了」等等。

（三）對數學的觀點面向

例如「我也感嘆古人在算此題目時的毅力，古人的算術方式並沒有現今這麼方便簡潔，但這也是為何我們需要不斷改良數學計算證明手法的原因」、「第一次接觸蟲蛀算，一開始都只想到一些很複雜的方法，但感覺應該還有其他方法，所以就遲遲沒有下筆，後來跟同學討論後才想到直式的方法。在跟同學挑戰的過程中我覺得特別印象深刻，不但可以自己設計應用題，也可以和同學互動一起解題討論，是一堂很有趣的課程！」等等。

經由期末訪談，學生回顧課程活動也呼應了上述面向，例如「比較有印象的部分是設計題目，在設計題目有訣竅，如果填空位子不對可能會有多組答案或是可能會很難解，出題是有技巧性的」、「像小時候小明打翻水的問題，沒想到古代就有這種玩法，很有趣」、「利用現在國中設未知數的概念，算是蠻好回憶的」、「有一些題目很簡單可以很快想出答案，有些就要慢慢推敲，可能會有好幾組可能性要一個一個去配對去猜測，對於活化大腦是非常好的運動」等等。

在諸多回應中，有位學生提及對於古文本的閱讀理解有所障礙「我覺得這次在解題目遇到最大的困難點是文意上的理解，除了文言文外，我對一些單位字詞不太熟悉，所幸有老師的解釋才稍微理解。」日本原典「蟲蛀算」問題所採用之用詞與單位，與當前之學習有所差異，對有需要的學生增添白話文注解，是研究者之後可以再留意之處。

伍、研究結論與反思

本研究為探討在「遺題繼承」傳統下的「蟲蛀算」文本，以及展示於大學數學系的「蟲蛀算」問題教學實作。關於如何編製數學史教案包含學習工作單等問題，我們可以先經由普及讀物著手，對主題發展脈絡先有通盤概略的認識，接著再進一步搜尋原典資料，增添數學史文本，讓素材更為精緻豐富（蘇意雯，2021）。在本研究中，研究者先藉由平山諦（1956/2005）在《東西數學物語》一書中對於日本「蟲蛀算」的介紹，以及佐藤健一（2016）在《数の謎解きと算塾》對於「蟲蛀算」問題的探討，進而尋找和算書中的相關文本素材，進行整理探討。研究者並分析「蟲蛀算」文本的數學行知模型，並與學生解題所用數學知識做對照。研究所得的結論及反思將如下說明。

一、研究結論

（一）「蟲蛀算」問題於為解答《中學算法》遺題而出版的《竿頭算法》書中出現，並在《開承算法》書中被解答

以本研究為例，我們可知在「遺題繼承」的傳統下，和算家中根彥循（1738）為了解答青山利永《中學算法》的12條提問，出版了《竿頭算法》一書，並於解答之後又附上了

25 條問題，第一問就是蟲蛀算問題：「有客問，偶得陳紙於笥中，披覽之有使銀等分與於三十七人之筭題。視其總銀蠹蝕上下不詳，只存二十三匁，又每人所分銀亦蠹蝕，僅存其末二分三釐耳，總銀及每人銀各幾何。」後來由神谷保貞（1745）出版的《開承算法》中加以解答。也就是說，藉由「蟲蛀算」問題的出現及解答文本，也可以做為日本「遺題繼承」傳統展現的一個範例。

（二）行知模型可做為分析數學史文本及刻畫學生解題所用數學知識之工具

針對研究問題二，教學人類學中的行知模型在本研究所扮演之角色的回應，研究者在本研究中嘗試利用數學行知模型分析古代「蟲蛀算」數學文本，並經由實作分析學生的個人行知模型，也統計學生所使用的技法與數學行知模型對照。從此教學實踐過程中，我們發現可以經由數學行知模型，分析古代數學文本，能夠更清楚知悉此類型題目中的數學知識內容及解決問題所隱含的相關數學概念。經由實作活動之後學生的個人行知模型，可看出對於數學原典問題，學生的解題方式，也可與數學的行知模型交互對照。從本研究中，顯示出以教學人類學的行知模型可做為分析數學史文本及刻畫學生解題所用數學知識之工具。

（三）大學數學系學生對「蟲蛀算」課程學習有正向之回應

經由學生對於五分量表問卷的回應，在九個問題的平均分數為 4.11 分。從學生的質性回應，我們看到「蟲蛀算」主題，可以讓學生經驗到數學思考、數學的文化體驗以及對數學的觀點三個面向的潛能。從量化問卷、質性填答及訪談資料，顯示本次課程活動受到學生正向的肯定。

二、研究反思

（一）「蟲蛀算」教學實作改進

對於問卷回應得分最低的第七題「我覺得邀請同學挑戰並解題能幫助我提升溝通的能力」，研究者也對此進行反思。如前所述，之所以讓學生進行「蟲蛀算」擬題並邀請同儕作答，原本的設計理念是希望能培養學生數學溝通能力。除了前文提及十二年國教對溝通互動的關注，事實上，在之前的九年一貫數學學習領域（教育部，2008）中也相當強調「數學溝通能力」的培養，此處所謂的溝通包括理解與表達兩種能力，也就是說，數學溝通一方面要能了解別人以書寫、圖形，或口語中所傳遞的數學資訊，另一方面，也要能以書寫、圖形，或口語的形式，運用精確的數學語言表達自己的意思。數學科是一門基礎而重要的學科，數學溝通能力的培養對之後可能在教育領域服務的本校學生而言也就更形重要，研究者基於這樣的認知，才會布置此一活動。回顧此次的教學實施，針對設計題目的品質，研究者反思之後應該增加活動時間，要讓學生有充裕的時間思考擬題，也才能在邀請同儕進行解題的過程中，雙方能有更好的溝通互動。之後還可以進行全班分享互相評析，例如

研究者可以請學生在邀請同學解題後，將此部份學習工作單內容拍照上傳至本課程的數位學習平臺討論區，如此可與全班同學分享題型及解法，使此部份之設計對學生更有助益。

（二）從教學人類學觀點看「蟲蛀算」學習工作單之編排及分析

在學習工作單之內容編排方面，由於研究者原意是想要介紹日本「遺題繼承」的傳統，並呈現在此脈絡下的「蟲蛀算」研究，因此依年代順序安排算題。但是以數學內容來看，題目二只有整數運算（松岡能一，1861），題目一牽涉到小數（中根彥循，1738；神谷保貞，1745），因此如果是針對不同機構的教學，例如國中小學生，就可以讓兩題的先後對調，較有助於學生循序漸進解題。另外修改版本也可以先呈現根據「蟲蛀算」之原理發展的國內學生熟悉之題型與內容，例如前文提及的基測考題，再呈現日本之原典題目，如此或能讓學生不但對日本數學史與文化有所理解，也能領略文化脈絡相似之處，對「蟲蛀算」之學習更有概念。

雖然在本文我們主要使用數學行知模型的概念分析，但教學人類學還有幾個理論結構可茲運用，特別是教學行知模型的概念。此模型刻畫教師在教授一個數學行知模型的實踐，可用以幫助我們設計數學課程，如何引入問題並進行教學（Miyakawa & Winslow, 2013, 2019）。以教學行知模型進一步分析歷史文本以及學生於此的數學實踐，正有待日後的研究。

本次教學實作分析日本數學知識的發展及內涵，著重於探討在社會文化的脈絡下，社會團體及社會氛圍如何影響數學的發展以及數學家之間的互動，意即闡釋數學家所處之學術環境如何影響數學家之研究，進而探討日本數學知識的發生與當代社會之進展等交互關係。研究者在「遺題繼承」脈絡下編製「蟲蛀算」教材，也利用教學人類學的數學行知模型分析日本「遺題繼承」傳統下的「蟲蛀算」文本相關史料，希望能展現數學多樣豐富的面貌。另外從學生的回應，我們也可得知此次「蟲蛀算」課程活動作為大學數學史素材編排的可能與不足。

誌謝

本文之得以完成，主要來自國科會的專題研究計畫（計畫編號：NSTC 111-2410-H-845-009-）之部分研究成果，在此感謝國科會之補助，也謝謝期刊審查委員給予的寶貴意見。

參考文獻

- Kline, M. (1995)。西方文化中的數學(張祖貴, 譯)。九章出版社。(原作出版於 1953 年)
[Kline, M. (1995). *Mathematics in western culture* (Chang T.-K., Trans.). Chiuchang. (Original work published 1953) (in Chinese)]
- 方延明 (2007)。數學文化。清華大學出版社。[Fang, Y.-M. (2007). *Mathematical culture*. Tsinghua University Press. (in Chinese)]
- 王文科、王智弘 (2006)。教育研究法(增訂第十版)。五南圖書公司。[Wang, W.-K., & Wang, C.-H. (2006). *Methods of educational research* (10th ed.). Wu-Nan Book. (in Chinese)]
- 平山諦 (2005)。東西數學物語(代欽, 譯)。上海教育出版社。(原著出版於 1956 年)[Hirayama, A. (2005). *The story of east-west mathematics* (Tai, C., Trans.). Shanghai Education Press. (Original work published 1956) (in Chinese)]
- 李文林 (2008)。絲路精神光耀千秋－《絲綢之路數學名著譯叢》導言。載於徐澤林(譯注), 和算選粹(pp. iii-xiv)。科學出版社。[Li, W.-L. (2008). The spirit of the Silk Road shines through the ages: Introduction to "Silk Road Mathematics Classics Translation Series". In T.-L. Hsu (Trans. & Annotation), *Wasan collection* (pp. iii-xiv). Science Press. (in Chinese)]
- 洪萬生 (1984)。數學史與數學教育。科學月刊, 15 (5), 371-375。[Horng, W.-S. (1984). History of mathematics and mathematics education. *Science Monthly*, 15(5), 371-375. (in Chinese)]
- 洪萬生 (1998)。HPM 隨筆(一)。HPM 通訊, 1 (2), 1-3。[Horng, W.-S. (1998). HPM Essay 1. *HPM TongXun*, 1(2), 1-3. (in Chinese)]
- 洪萬生(主編)(2018)。數學的東亞穿越。開學文化。[Horng, W.-S. (Ed.). (2018). *Mathematics' journey through East Asia*. Open learning Publishing Co. (in Chinese)]
- 國中教育會考全國試務會(2002)。91 年第一次國民中學學生基本學力測驗。[National Examination Committee of Comprehensive Assessment Program for Junior High School Students. (2002). *The first basic academic ability test for national middle school students in academic year 91*. (in Chinese)]
<https://ananedu.com/cicve2/pdf/9101m.pdf>
- 國中教育會考全國試務會(2006)。95 年第二次國民中學學生基本學力測驗。[National Examination Committee of Comprehensive Assessment Program for Junior High School Students. (2006). *The second basic academic ability test for national middle school students in academic year 95*. (in Chinese)]
<http://db.tp.edu.tw/bctestinfo/9502Math.pdf>
- 康明昌 (1991)。數學界的諾貝爾獎。數學傳播, 15 (1), 33-38。[Kang, M.-C. (1991). The Nobel Prize in mathematics field. *Mathmedia*, 15(1), 33-38. (in Chinese)]
- 教育部(2008)。國民中小學九年一貫數學領域課程綱要。作者。[Taiwan Ministry of Education. (2008). *Grade 1-9 curriculum guidelines (Mathematics)*. Author. (in Chinese)]
- 教育部 (2014)。十二年國民基本教育課程綱要總綱。作者。[Taiwan Ministry of Education. (2014). *Curriculum guidelines of 12-year basic education: General guidelines*. Author. (in Chinese)]

- 教育部(2018)。十二年國民基本教育數學領域課程綱要。作者。[Taiwan Ministry of Education. (2018). *Curriculum guidelines of 12-year basic education: Elementary and junior high school and general senior high school (Mathematics)*. Author. (in Chinese)]
- 黃俊瑋(2013)。江戸時期和算發展之分期。中華科技史學會學刊, 18, 24–33。[Huang, J.-W. (2013). The division of time span of Wasan development in the Edo period. *Bulletin of Chinese Association for the History of Science*, 18, 24–33. (in Chinese)]
- 黃俊瑋(2019)。十九世紀初期和算問題的發展與特色－以齋藤宜義的《算法圓理鑑》為例。中華科技史學會學刊, 24, 11–20。[Huang, J.-W. (2019). The development of mathematic problems and related characteristics of Wasan in Early 19th century: Take Sato Nobuyoshi's Sampo Yenrikan as an example. *Bulletin of Chinese Association for the History of Science*, 24, 11–20. (in Chinese)]
- 劉柏宏(2021)。數學人文教案培養數學文化素養之理論探討與反思。臺灣數學教育期刊, 8(1), 1–25。[Liu, P.-H. (2021). A theoretical and reflexive study on cultivating literacy of mathematical culture by using lesson plans from humanistic mathematics. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, 8(1), 1–25. (in Chinese)] [https://doi.org/10.6278/tjme.202104_8\(1\).001](https://doi.org/10.6278/tjme.202104_8(1).001)
- 蕭文強(1992)。數學史和數學教育：個人經驗和看法。數學傳播, 16(3), 23–29。[Hsiao, W.-C. (1992). History of mathematics and mathematics education: Personal experience and opinions. *Mathmedia*, 16(3), 23–29. (in Chinese)]
- 蘇意雯(2009)。遺題承繼，串起中日代數史。載於洪萬生、英家銘、蘇意雯、蘇惠玉、楊瓊茹、劉柏宏(主編)，當數學遇見文化(頁172–183)。三民。[Su, Y.-W. (2009). Bequeathed problems connect the history of algebra between Chinese and Japanese. In W.-S. Horng, J.-M. Ying, Y.-W. Su, H.-Y. Su, Q.-R. Yang, & P.-H. Liu (Eds.), *When mathematics meets culture* (pp. 172–183). SanMin. (in Chinese)]
- 蘇意雯(2015)。遺產分配問題的數學探究活動。國教新知, 62(3), 30–39。[Su, Y.-W. (2015). An exploratory study of inheritance distribution problem. *The Elementary Education Journal*, 62(3), 30–39. (in Chinese)] [https://doi.org/10.6701/TEEJ.201509_62\(3\).0003](https://doi.org/10.6701/TEEJ.201509_62(3).0003)
- 蘇意雯(2021)。中小學數學史教案開發與實作研究。臺灣數學教育期刊, 8(1), 27–53。[Su, Y.-W. (2021). Research on the development and implementation of lesson plans for the history of mathematics in primary and secondary schools. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, 8(1), 27–53. (in Chinese)] [https://doi.org/10.6278/tjme.202104_8\(1\).002](https://doi.org/10.6278/tjme.202104_8(1).002)
- 蘇意雯(2023)。「蟲蛀算」國小學習工作單編製探討。HPM 通訊, 26(4), 1–4。[Su, Y.-W. (2023). A discussion on the compilation of "Mushikuizan" worksheets for elementary students. *HPM TongXun*, 26(4), 1–4. (in Chinese)]
- 一松信、岡田禎雄(主編)(2020)。みんなと学ぶ小学校算数2年. 上。学校図書。
- 佐藤健一(2016)。数の謎解き和算塾。研成社。
- 城地茂(2009)。日本数理文化交流史。致良。
- 中根彦循(1738)。竿頭算法。国書データベース(書誌ID: 100234659)。
<https://doi.org/10.20730/100234659>
- 中原忠男(2017)。教科教育学とその課題。載於日本教科教育学会(主編)，教科教育ハンドブッカー今日から役立つ研究手引き(頁10–15)。教育出版。
- 神谷保貞(1745)。開承算法。国書データベース(書誌ID: 100337933)。
<https://doi.org/10.20730/100337933>
- 松岡能一(1861)。算学稽古大全(第五版)。国書データベース(書誌ID: 100234272)。
<https://doi.org/10.20730/100234272>

- Artigue, M., & Bosch, M. (2014). Reflection on networking through the praxeological lens. In A. Bikner-Ahsbahr, & S. Prediger (Eds.), *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (pp. 249–265). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-05389-9_15
- Artigue, M., Bosch, M., Chaachoua, H., Chellougui, F., Chesnais, A., Durand-Guerrier, V., Knipping, C., Maschietto, M., Romo-Vázquez, A., & Trouche, L. (2019). The French didactic tradition in mathematics. In W. Blum, M. Artigue, M. A. Mariotti, R. Sträßer, & M. Van den Heuvel-Panhuizen (Eds.), *European traditions in didactics of mathematics* (pp. 11–56). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-05514-1_2
- Asami-Johansson, Y., Attorps, I., & Winsløw, C. (2020). Comparing mathematics education lessons for primary school teachers: Case studies from Japan, Finland and Sweden. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51(5), 688–712. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1614688>
- Barbin, E., Bagni, G. T., Grugnetti, L., Kronfellner, M., Lakoma, E., & Menghini, M. (2002). Integrating history: Research perspectives. In J. Fauvel, & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 63–90). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47220-1_3
- Barbin, E., Guillemette, D., & Tzanakis, C. (2020). History of mathematics and education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 333–342). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_69
- Barnett, J. H., Lodder, J., & Pengelley, D. (2014). The pedagogy of primary historical sources in mathematics: Classroom practice meets theoretical frameworks. *Science & Education*, 23, 7–27. <https://doi.org/10.1007/s11191-013-9618-1>
- Bittar, M. (2022). A methodological proposal for textbook analysis. *The Mathematics Enthusiast*, 19(2), 307–340. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1555>
- Bosch, M., & Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. *ICMI Bulletin*, 58, 51–65. https://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/files/Publications/ICMI_bulletin/58.pdf
- Braun, B., & Kahn, E. (2019). Teaching history of mathematics: A dialogue. *Journal of Humanistic Mathematics*, 9(1), 317–325. <https://doi.org/10.5642/jhummath.201901.19>
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer Academic Publishers.
- Brousseau, G. (2010). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques* [Glossary of some concepts of the theory of didactical situations in mathematics]. https://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf
- Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique: Du savoir savant au savoir enseigné* [The didactic transposition: From scholarly knowledge to taught knowledge]. La Pensée Sauvage. (2nd revised and expanded edition, in coll. with Marie-Alberte Joshua, 1st edition 1985)
- Chevallard, Y. (2019). Introducing the anthropological theory of the didactic: an attempt at a principled approach. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 12, 71–114. <https://doi.org/10.24529/hjme.1205>
- Chevallard, Y., & Bosch, M. (2019). A short (and somewhat subjective) glossary of the ATD. In M. Bosch, Y. Chevallard, F. J. García, & J. Monaghan (Eds.), *Working with the anthropological theory of the didactic in mathematics education. A comprehensive casebook* (pp. xviii–xxxvii). Routledge.
- Chevallard, Y., & Bosch, M. (2020). Anthropological theory of the didactic (ATD). In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 53–61). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100034

- Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 11(2), 3–6. <https://www.jstor.org/stable/40248010>
- Furinghetti, F., & Paola, D. (2003). History as a crossroads of mathematical culture and educational needs in the classroom. *Mathematics in School*, 32(1), 37–41. <http://www.jstor.org/stable/30212234>
- Gascón, J. (2003). From the cognitive to the epistemological programme in the didactics of mathematics: Two incommensurable scientific research programmes? *For the Learning of Mathematics*, 23(2), 44–55. <https://www.jstor.org/stable/40248420>
- González-Martín, A. S. (2021). $V_B - V_A = \int_A^B f(x)dx$. The use of integrals in engineering programmes: A praxeological analysis of textbooks and teaching practices in strength of materials and electricity and magnetism courses. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 7(2), 211–234. <https://doi.org/10.1007/s40753-021-00135-y>
- Gulikers, I., & Blom, K. (2001). ‘A historical angle’, a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics*, 47(2), 223–258. <https://doi.org/10.1023/A:1014539212782>
- Kuzuoka, K. & Miyakawa, T. (2020). Implementing multidisciplinary study and research paths in Japanese lower secondary school teaching. *Educação Matemática Pesquisa*, 22(4), 173–188. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i4p173-188>
- Lim, S. Y., & Chapman, E. (2015). Effects of using history as a tool to teach mathematics on students’ attitudes, anxiety, motivation and achievement in grade 11 classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, 90(2), 189–212. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9620-4>
- Miyakawa, T., & Winsløw, C. (2013). Developing mathematics teacher knowledge: The paradidactic infrastructure of “open lesson” in Japan. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(3), 185–209. <https://doi.org/10.1007/s10857-013-9236-5>
- Miyakawa, T., & Winsløw, C. (2019). Paradidactic infrastructure for sharing and documenting mathematics teacher knowledge: A case study of “practice research” in Japan. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 22(3), 281–303. <https://doi.org/10.1007/s10857-017-9394-y>
- Radford, L., & Santi, G. (2022). Learning as a critical encounter with the other: Prospective teachers conversing with the history of mathematics. *ZDM—Mathematics Education*, 54(7), 1479–1492. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01393-z>
- Solis, D., & Isoda, M. (2023). Comparing elementary school textbooks of China, Japan, and Malaysia: A praxeological and developmental progression analysis regarding length measurement. *Research in Mathematics Education*, 25(3), 359–378. <https://doi.org/10.1080/14794802.2022.2103022>
- Takeuchi, H., & Shinno, Y. (2020). Comparing the lower secondary textbooks of Japan and England: A praxeological analysis of symmetry and transformations in geometry. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18(4), 791–810. <https://doi.org/10.1007/s10763-019-09982-3>
- Tzanakis, C., Arcavi, A., de Sa, C. C., Isoda, M., Lit, C. K., Niss, M., de Carvalho, J. P., Rodriguez, M., & Siu, M. K. (2002). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In J. Fauvel, & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 201–240). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47220-1_7

- Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human development*, 52(2), 83–94. <https://doi.org/10.1159/000202727>
- Wang, C., Shinno, Y., Xu, B., & Miyakawa, T. (2023). An anthropological point of view: Exploring the Chinese and Japanese issues of translation about teaching resources. *ZDM—Mathematics Education*, 55(3), 705–717. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01477-4>
- Wijayanti, D., & Winsløw, C. (2017). Mathematical practice in textbooks analysis: Praxeological reference models, the case of proportion. *REDIMAT*, 6(3), 307–330. <https://doi.org/10.17583/redimat.2017.2078>

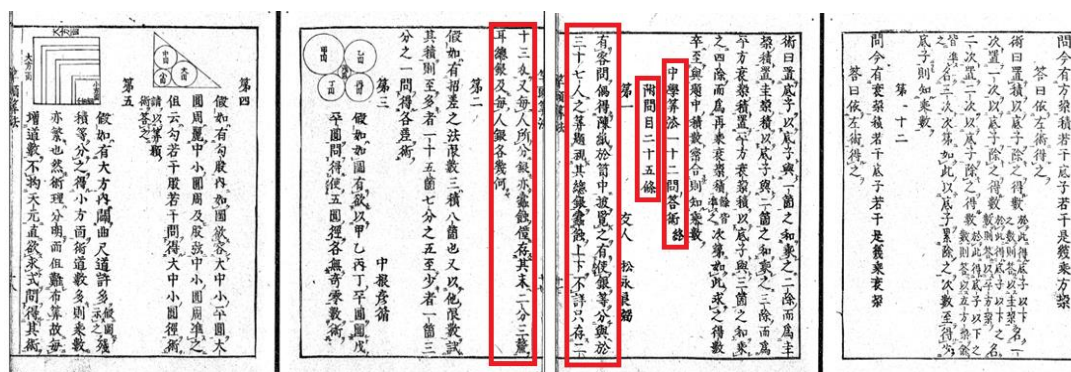
附錄

「蟲蛀算」學習工作單

班級： 座號： 姓名：

「蟲蛀算」的問題首次被印刷出版是因為日本「遺題繼承」之傳統。和算家中根彥循為了解答青山利永於 1719 年出版的《中學算法》的 12 條提問，於 1738 年出版了《竿頭算法》一書，並於解答之後又附上了 25 條問題，其中的第一問就是有關紙條被蟲蠹蝕的問題：

「有客問，偶得陳紙於笥中。披覽之，有使銀等分與於三十七人之算題。視其總銀蠹蝕上下不詳，只存二十三匁，又每人所分銀亦蠹蝕，僅存其末二分三釐耳。總銀及每人銀各幾何。」。

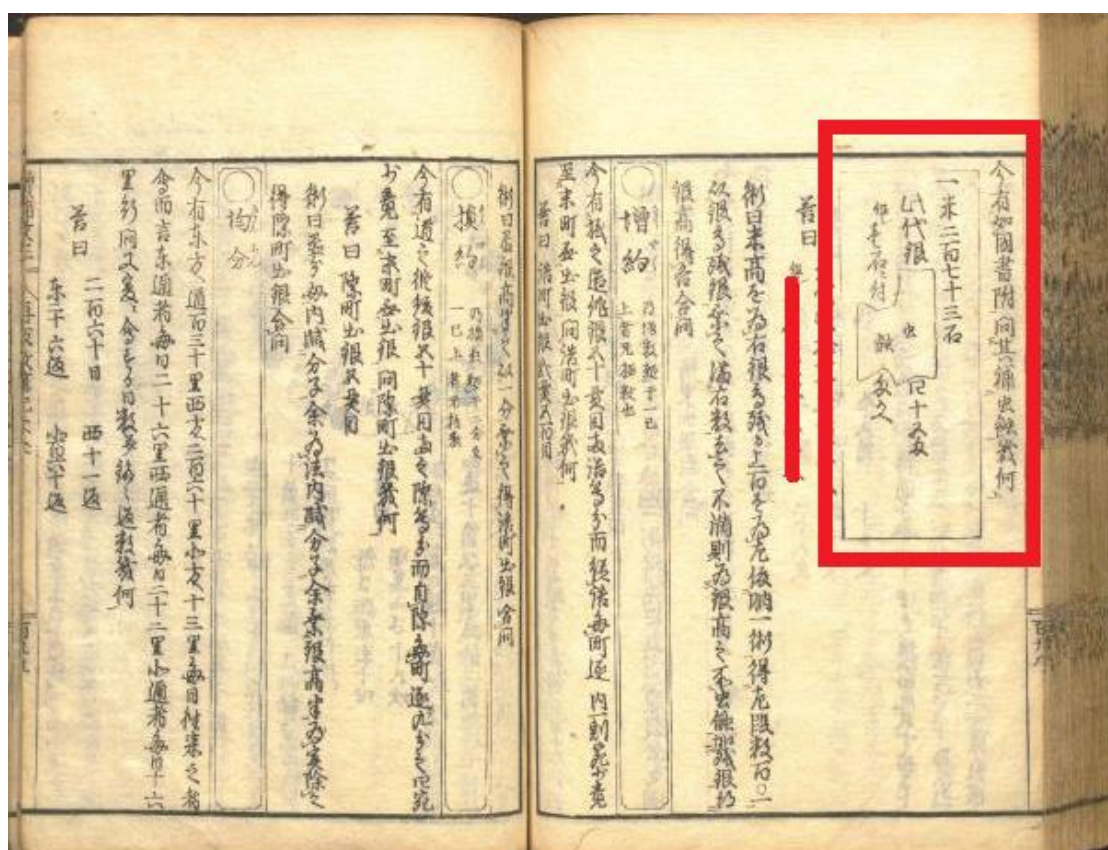


(<https://kokusho.nijl.ac.jp/biblio/100234659/1?ln=ja>)

此題的文意是敘述偶然在方箱中得到一張陳舊的紙，打開閱覽只知道是分銀給 37 人，銀的總量上下被蠹蝕了只看到 23 匁(もんめ)，而且每個人所分到的銀量也被蠹蝕了，只看到最後是二分三釐(0.23 匁)，問總銀及每人所分銀各是多少。匁為日本以前的重量單位，1 匁為 3.75 克。這個問題的答案在後來神谷保貞於 1745 年出版的《開承算法》中被解答出來。

問題一：請解出此問題之答案（例如：總銀_____貫_____百_____十_____匁_____分_____厘，每人銀_____十_____匁_____分_____厘。）

隨著和算的蓬勃發展，很多流派也風起雲湧。1808 年發行，於 1861 年五刻的宅間流五世松岡能一之著作《算學稽古大全》中，將題目設計成一張以賣米換取銀兩的字據，但此字據被蟲蛀了一個大洞，如下圖所示。字據的意思是「二百七十三石的米可換取銀□□□四十五匁，每石米要付銀□□匁。」。



(<http://codh.rois.ac.jp/iiif/iiif-curation-viewer/index.html?pages=200021598&pos=124&lang=en>)

問題二：請解出此問題之答案（例如：代銀_____貫_____百_____十_____匁，另一石米需付銀_____十_____匁。）

問題三：請設計出屬於你自己的蟲蛙算，並邀請一位同學挑戰。

題目設計	挑戰同學姓名 做法	解答

問題四：請寫下對於「蟲蛙算」的學習心得。