
謝豐瑞、吳原榮、吳嵐婷（2024）。
國中生數學符號運算素養的創造思考表現。
臺灣數學教育期刊，11（1），1-36。
doi: 10.6278/tjme.202404_11(1).001

國中生數學符號運算素養的創造思考表現

謝豐瑞 吳原榮 吳嵐婷
國立臺灣師範大學數學系

本研究從二維面向探測一般國中生在解決國中層級文字符號運算的素養導向題目時創造思考的表現，其中一維乃數學過程，含形成、應用、詮釋三個過程，另一維乃創造思考，含流暢性、變通性、獨創性三個指標。研究樣本採立意抽樣，由台灣 4 所學校 32 個班級 8 年級學生中隨機抽取共 210 位學生參與研究。研究採問卷調查法，以與實際生活相關的情境設計開放性問題，題目設計以激發學生創造思考力為標的，每個題目都可以有無限多個可能的適當答案。研究結果發現，在形成、應用、詮釋這三個數學過程中，學生在各創造思考指標表現皆依流暢性、變通性、獨創性的順序下降。針對流暢性思考，學生在各數學過程表現差異不大；針對變通性思考，學生在詮釋階段表現最佳，針對獨創性思考，學生在形成階段表現最佳。本研究另發現當學生被鼓勵提出具有高差異度和獨特性的答案時，許多學生展現出色的結合元素產生新產品的創造思考力，提供了遠超出預期的創新答案。

關鍵字：形成、詮釋、數學創造思考、數學過程、應用

通訊作者：吳原榮，e-mail：jongmath@gmail.com
收稿：2024 年 2 月 17 日；
接受刊登：2024 年 4 月 12 日。

Hsieh, F. J., Wu, Y. J., & Wu, L. T. (2024).

Middle school students' performance in creative thinking of the literacy-oriented mathematical symbolic operations. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, 11(1), 1–36.

doi: 10.6278/tjme.202404_11(1).001

Middle School Students' Performance in Creative Thinking of the Literacy-oriented Mathematical Symbolic Operations

Feng-Jui Hsieh Yuan-Jung Wu Lan-Ting Wu

Department of Mathematics, National Taiwan Normal University

This study developed a two-dimensional framework to examine the performance of creative thinking of general middle school students in solving literacy-oriented problems of symbol operations with unknown variables. The first dimension is the mathematics process, including formulate, employ, and interpret. The second dimension contains three indicators of creative thinking: fluency, flexibility, and originality. This study adopts purposive sampling, and a total of 210 students from 8th grade students in 32 classes from 4 schools in Taiwan were randomly selected to participate in the study. This study uses a questionnaire survey method. Open-ended questions are designed based on real-life situations. The questions are designed to stimulate students' creative thinking, and each question can have infinite possible appropriate answers. The results showed that in the process of formulate, employ, and interpret, the performance of students in each process decreased in the order of fluency, flexibility, and originality. For fluency, there was little difference in students' performance across mathematics processes. For flexibility, students performed best in the interpret process. For originality, students performed best in the formulate process. The study also found that when students were encouraged to come up with highly differentiated and unique answers, many students demonstrated excellent creative thinking skills in combining elements to produce new products, providing novel answers that far exceeded expectations. innovative answers that far exceeded expectations.

Keyword: formulate, interpret, mathematical creative thinking, mathematics process, employ

Corresponding author : Yuan-Jung Wu , e-mail : jongmath@gmail.com

Received : 17 February 2024;

Accepted : 12 April 2024.

壹、緒論

美國 Partnership for 21st century skills (2011) 公布的 21 世紀數學技能地圖中，第一個技能就是創造與創新 (Creativity and Innovation)。我國教育部也明確指出應在學校課程中培養學生創造力。經濟合作暨發展組織 (Organisation for Economic Cooperation and Development [OECD]) 最新舉辦的 2022 年國際學生能力評量計畫 (Programme for International Student Assessment [PISA]) 更將創造力納入數學素養評量架構中 (OECD, 2023)；可惜的是，PISA 2022 並未根據創造力命題，而只是將之做為配角在命題時融入，不過在 OECD 為 2030 年數學素養評量做準備的計畫中，創造力不再是配角，而是作為主角來分析數學課程 (Schmidt et al., 2022)。鑒於數學創造力日益重要的趨勢，本研究認為應從前瞻的觀點，在數學素養的評量上根據創造力進行命題，進而探測學生在素養題型上的創造力。針對創造力、數學創造力，學界已有豐富的研究探討，然而針對素養導向的數學創造力，則仍是一個貧瘠待開發的領域。

貳、文獻探討

一、學校教育中的創造力與數學創造力

創造力的概念在 Guilford (1950) 大力提倡下開始被廣泛重視，但及至目前為止學界對其內涵與探測結構仍未有一致的共識 (劉宣谷, 2015; Mann, 2006; Sriraman, 2005)。從創造力的內涵來看，學者普遍認為新穎與有用是創造力最重要的內涵，也是創造力與其他相近概念 (例如想像力) 在根本上最大的不同 (Amabile & Tighe, 1993; Barron, 1955; Guilford, 1950; Stein, 1953)，而新穎與有用的判定在學校教育中與社會或專業領域中有所不同。OECD (2023) 提出，在學校教育中通常會期望「創造力不是對世界來說是新穎的，而只是對學生來說是新穎的，或是超出預期表現的」而有用的標準則是從是否「適當的」(appropriate) 來看。這樣的看法與 Kaufman 與 Beghetto (2009) 提出的大 C (Big-C) 和小 c (Little-c) 看法相同，大 C 關注的是卓越創造力，是在社會或專業領域中產生可能永久改變社會或某一領域的新穎產品，而小 c 則關注日常創造力，即大多數人都能體驗和表達的創造行為，也是普通學校教育中可以發展的能力。小 c 的觀念與 Cropley (1992) 所提的觀念雷同，Cropley 認為在教育現場中「獲得想法的能力，尤其是原創的、發現的和新穎的想法」(p. 6)，這種看法著重在創造思考 (creative thinking)，在論及學校教育中的創造力時，學界往往視「創造力」與「創造思考」為同義詞 (Guilford, 1956)。

Guilford (1956, 1968) 在創造力內涵上做出了巨大的貢獻，他提出的智力結構 (Structure of Intellect) 包含了二大類：思考 (thinking) 與記憶 (memory)，創造思考乃其中一重要部分，他提出發散產出 (divergent-production) 這種產生大量不同想法或答案的思考與創造思

考學習相關。Cropley (1992) 延續類似的想法，認為在學校教育中，創造思考的本質就是發散思考，Volle (2018) 與 Sternberg (2003) 認為發散思考來源於概念間的新聯結，是一種再生性思考形式，他們所強調的聯結或再生概念與 Mednick (1962) 及 Poincaré (1952) 所強調創造/發現中的組合性有共同的核心思想，乃將創造視為一種結合不同元素或想法，產生有用或符合要求的新組合產物的過程，結合的元素或想法彼此關聯越遙遠則創造性越高。綜上所述，學校教育中創造思考在內涵上可視為一種透過結合遠端元素或想法產生發散性思考，進而產生新穎且適當產品的能力。

在創造思考的探測架構上，Guilford (1956) 也做出了巨大的貢獻。他在描述發散產出思考時，提出發散產出思考包含了「流暢性」(fluency)、「變通性」(flexibility)、「獨創性」(originality)，和「精進性」(elaboration)。在 1956 年的文章中他也指出對問題的「敏覺性」(sensitivity) 能力為發現 (discover) 的一個重要因素。後繼諸多學者常以此五項思考能力中的某幾項作為探測學生創造力的指標架構 (Torrance, 1970; Williams et al., 1971)，這樣的做法顯示學界普遍認同發散思考 (divergent thinking) 雖然不是創造力的同義詞，但乃是衡量創造思考能力的一項良好估計 (Albert & Runco, 1998; Haylock, 1987a)。

以上述五項指標作為學校教育中創造思考的探測架構仍需面對如何界定這些指標的問題。學界多以快速連續產生思考的能力來表示流暢性，產生多類型思考的能力來表示變通性，產生新穎獨特思考的能力來表示獨創性，產生能改善或擴展想法的思考能力來表示精進性，評論問題或解法的能力來表示敏覺性 (Hollands, 1972; Kim et al., 2013)。在這五個指標上，以採用前三個指標 (例如：彭淑玲等人，2015；Haylock, 1987b; Kim et al., 2004; Lee et al., 2003; Leikin, 2009; Leikin & Lev, 2013; Mann, 2005; Molad et al., 2020) 或前四個指標 (例如：林碧珍，2020；Guilford, 1956) 為學界較常使用的做法。

對於創造力究竟屬於一般性的能力，或是與特定領域 (例如：數學) 相關的能力之問題，兩者都各有支持的學者 (Schoevers et al., 2020)。在學校教育階段，越來越多的研究結果支持創造力、數學創造力、數學能力是相關 (正相關) 但不相同的能力 (Jeon et al., 2011; Kattou et al., 2013; Leikin, 2013)。雖然學者認為數學創造力有其自我的地位，但如同一般創造力的情況，它仍沒有一致認可的定義 (Mann, 2005; Sriraman, 2005)。研究數學創造力的學者在界定數學創造力時，往往會同時兼顧數學能力與創造力 (Schoevers et al., 2020)。有的學者界定數學創造力為數學解題進路中剖析、區辯相似性和差異性的能力 (Laycock, 1970)；有的學者認為數學創造力是結合舊數學觀念產生新數學組合或發現數學事實間的關係之能力 (Ervynck, 2002)；有的學者主張數學創造力是啟動發散思考產生多元新穎數學解答的能力 (Silver, 1997)。綜上所述，當從解題的角度來看時，數學創造思考能力可視為在數學領域中透過結合遠端元素或想法產生發散思考，進而得出多元新穎而適當數學解答的能力。

二、數學創造力評量

早期針對 K-12 數學創造力的評量，主要聚焦於數學資優生，其中以 Krutetskii (1976) 研究資賦優異學生最具代表性，Krutetskii 認為數學創造力是一種解釋和概括數學問題的能

力，涉及變通性思考、找出數學結構以發展多元解題策略的能力，並據此設計了許多題目，例如，訊息不足或有多餘訊息的題目。Sriraman (2005) 認為數學創造力非專屬於資賦優異生，針對一般學生來說，是一種能對數學問題或類題產生非尋常（新穎）、具洞察力的解答過程。針對一般學生的創造力評量上，學者通常應用發散思考測驗來評估發散思考的產物（Haylock, 1997; Leikin, 2009; Sari & Hidayat, 2019; Silver, 1997）。這些測驗的共同特質是所有問題或任務都可有多樣化回應的空間以提供學生自由表達想法的機會（Haylock, 1987b; Krosnick, 2018）。

在評量數學創造力的問題類型上，Haylock (1987a) 提出了三種在研究上常用的問題類型：問題解決（problem solving），一題多解、重新定義（redefinition）、和擬題（problem posing）。臺灣目前關於數學創造力的研究，大都採用這些題型，且研究較聚焦於國小階段（例如：吳昭容、陳如珍，2008）。近年來，以素養試題來探測創造力研究思想開始萌芽，Novita 與 Putra (2016) 讓 10 位小學六年級學生解類似 PISA 題目的數學問題，以此來探測此類題目是否能提高學生解決問題時的創造力，結果顯示類似 PISA 題目的問題有助刺激學生解題時的創造思考。此研究的立場是在解類似 PISA 這種真實問題情境時，單純的數學知識已不足以解題，因而需要新的想法或「認知跳躍」（cognitive jump）這種具創造性或發散性的思考才能解題，故研究並未特別根據創造力命題。

臺灣在數學創造力的實徵研究尤其稀少，許多學者的研究以國小學生為主（吳昭容、陳如珍，2008；林碧珍，2020；陳李綢，2006；陳嘉皇，2005）。針對國中數學創造力的研究，彭淑玲等人（2015）在其有關發散性思考研究這部分，探究研究工具的有效性，並建立台灣學生常模。針對發散性思考指標計分，該研究在流暢性、變通性上分別依正確答案個數、類別數給分，前者得分介於 0~40 分，後者介於 0~24 分；獨創性則依學生答案落在全體答案出現頻率範圍給分，落在全體答案 5% 以上、2%~2.99%、1.99% 以下分別給 0、1、2 分，將各題得分加總為獨創性分數。此部分研究結果顯示研究工具對於評測個體流暢性、變通性、與獨創性之表現具理想校度。可惜的是此研究結果著重在效度、信度、效標關聯度等等計量，而未把焦點放在學生的創造內容表現上，同時使用的題目如九點區域（給上下左右相距為 1 的 $3 \times 3 = 9$ 個點，要學生在其上畫出面積為 2 的圖形）等，牽涉到的數學概念乃國小層級的概念。

綜上所述可知目前臺灣關於數學創造力的實徵研究以國小學生為主，對於國中層級的研究則未使用國中層級的數學，題目的設計上也並未考量目前國際所著重的素養觀點。

三、PISA 數學素養問題解決過程與數學符號表徵

由上述文獻探討可知，數學創造思考的評量往往是以數學問題/任務解決來執行，當代國際最大規模數學問題/任務解決評量應屬 OECD 舉辦的 PISA 數學素養評量（OECD, 2023），PISA 2022 認為數學素養是個體在三個數學過程：形成（formulate）、應用（employ）、詮釋（interpret）中進行數學推理以解決真實生活情境問題的能力。數學過程會因數學不同領域而有不同的樣貌，Douglas 等人（2020）提出，數學中的符號具有傳達功能，並有助表

達數學思考、形成新概念、進行多重分類、解釋、反思性思考等。Azis 與 Nurlita (2017) 與 Woodrow (1982) 認為理解和操作數學符號通常需要推理和邏輯推斷，這是數學能力的重要組成部分。PISA 也同時認為應在基礎數學概念如數量、代數、抽象與符號表徵中進行數學推理與解題 (OECD, 2023, p. 50)。本研究檢視我國的 108 數學課程內容發現國中階段有 75% 的小節牽涉到數學符號運算，顯示其在此階段的重要性。

綜合上述文獻探討可知，對於增進國中生數學創造力表現的教材研發或建立適合我國學生的數學創造力評量工具的相關研究缺乏，且仍未有以 PISA 數學素養中生活情境問題命題的研究，同時在解決數學問題/任務上並未考量素養導向的數學過程。

四、研究目的與架構

本研究擬從二維面向探測一般國中生（不含資優生）的創造思考表現，其中一維乃創造思考，另一維乃數學過程。關於創造思考，本研究採用 Leikin (2009)、Leikin 與 Lev (2013) 與 Silver (1997) 使用的結構，即創造思考包含三個指標：流暢性、變通性、獨創性，其中流暢性著重於產生多個想法的能力，變通性強調產生多類型想法的能力，而獨創性則突顯產生新穎獨特想法的能力。

關於數學過程，本研究採用了 PISA 2022 數學素養評量界定，包含形成、應用和詮釋三個數學過程；其中形成過程指的是生成數學方式來表達情境脈絡中的狀況；應用指的是使用概念、過程、事實、推理來解決情境脈絡中的問題；詮釋指的是評鑑與解釋數學結果¹ (OECD, 2023)。

在數學內容的選取上，則選用我國國中課程重視之數學運算符號。

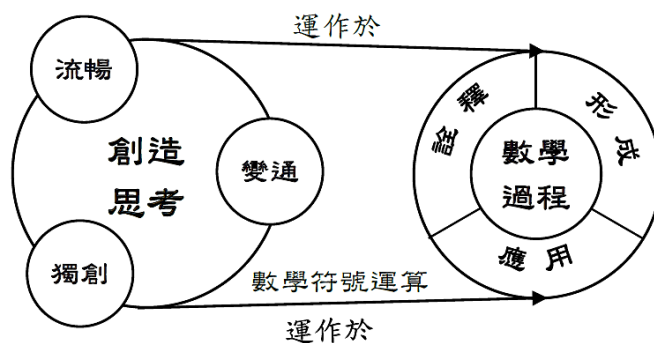
本研究的目的是探測一般國中生在符號運算的數學過程中產生創造思考產物之表現情形。具體研究問題如下：

- (一) 國中生在面對激發創造思考技能之任務時，在形成、應用、詮釋數學符號運算此三個數學過程中產生的答案分別有何特質？
- (二) 國中生在形成、應用、詮釋數學符號運算此三個數學過程中，在創造思考的流暢性、變通性、獨創性指標表現為何？

¹ PISA 在詮釋該項的說明是：Interpret refers to interpreting, applying, and evaluating mathematical outcomes。因學生作答時間限制，本研究並未涵蓋使用（applying）數學結果此面向。

本研究的理論架構如圖 1 所示。

圖 1
研究理論架構



參、研究方法

本研究採問卷調查法，透過與現實生活相關的情境設計開放性數學題目對學生施測。

一、研究工具

本研究根據研究理論架構發展研究工具，研究工具乃名為「密碼防盜遊戲」之問卷，採用猜密碼此與實際生活相關的情境，在此情境中另分為三個子情境，各子情境分別對應一個數學過程。每個數學過程中，設計最少 3~4 個要求學生完成的任務。

本研究解題任務設計採取結果開放任務，在形成與詮釋兩個數學過程中，並無標準答案；在應用過程中，學生經歷一題多解的創造過程，所提供的答案須正確。所有題目經過特殊設計，都與傳統數學創造力測驗僅能有固定個數正確答案不同，本研究每個題目都可以有無限多個適當答案；除此，為了刺激學生達到創造思考三指標的評判標準，在試題題幹上要求學生給出不只一個答案，差別越大越好的答案，以及其他同學較無法想到的獨特答案，據以探測學生在數學創造思考三個指標：流暢性、變通性、獨創性的表現。

此研究工具的發展乃經過十次焦點團體討論，每次討論包括至多三位教授、兩位平均教學經驗超過 20 年的博士，以及三位碩士學生，每次焦點團體討論至少歷經三小時，故本問卷兼具內容效度及專家效度。

在問卷發展完成後，整份問卷先由兩位學生作答，以初步找出較明顯的錯誤或不恰當之處，並記錄作答時間，修改後，由超過 20 名學生進行預試，以測試問題的可行性和答題所需的時間，並據以修改問卷後定稿。

研究工具的具體內容簡述如下：

（一）密碼防盜遊戲情境

題目敘述某班同學兩兩玩猜密碼遊戲，遊戲方式是每位同學都設計一個黑盒子動作，將真密碼透過黑盒子動作轉換為假密碼，告訴對手假密碼後讓對手猜真密碼，遊戲規則是誰的真密碼先被猜出就輸了。為了使受測學生了解題意，題目舉了小平的黑盒子動作，並用數值實例說明，之後告訴學生，若用 x 代表真密碼，小平的黑盒子動作是真密碼加 1，可以記成「 $x + 1$ 」。

（二）形成過程的情境與題目

探測形成過程創造力使用的情境即為前項所述情境。透過下列題目要求受測學生提供 3 個答案：「請你設計二個比小平設計的難被猜到的黑盒子動作。這兩個黑盒子動作要差別越大越好。」（題目代號 F1a、F1b，參考表 1 說明。）「現在你要發揮天馬行空的想像力，設計一個獨特、別人較難想到的黑盒子動作。加油！」（題目代號 F2，參考表 1 說明。）

（三）應用過程的情境與題目

探測應用過程的情境延續第 1 點所述情境，額外加入一個子情境，子情境說明這題是第二階段的遊戲，謝老師告訴同學她設定的真密碼是 10，假密碼是 88，目標是要同學猜她的黑盒子動作，根據此情境，要求學生提供 2 個答案：「請找出二個謝老師可能設計的黑盒子動作，這兩個黑盒子動作要差別越大越好。」（題目代號 E1a、E1b，參考表 1 說明。）另外以兩個有限制條件的題目，要求學生提供另 2 個答案，第 1 個題目是：「小安偷看到謝老師一部分的答案，他發現老師有寫到『平方』，請根據這個資訊寫出一個和第（1）題越不同越好的黑盒子動作。」（題目代號 E2，參考表 1 說明。）第 2 個題目是：「謝老師說她的設計非常獨特，請寫出一個非常獨特又用到『平方根』的可能黑盒子動作。」（題目代號 E3，參考表 1 說明。）

（四）詮釋過程的情境與題目

探測詮釋過程的情境延續第 1 點所述情境，額外加入一個子情境，子情境說明隔壁班畢老師也加入遊戲行列，同學要給老師一個真密碼的數值，例如 5，然後二位老師要告訴同學經過他們的黑盒子動作後得到的假密碼，謝老師的黑盒子動作是 $x^2 + 1$ ，得到的假密碼是 26、畢老師的黑盒子動作是 $x \times 2 + 11$ ，得到的假密碼是 21，根據此情境，透過下列題目要求受測學生提供三個答案，第 1 個題目是：「請用二個原因來說明你覺得二位老師誰的黑盒子動作比較容易被猜出來。這二個原因要差別越大越好。」（題目代號 I1a、I1b，參考表 1 說明。）第 2 個題目是「現在你要發揮自己獨一無二的思考力，請寫出一個獨特、別人較不容易想到的原因來說明誰的黑盒子動作比較容易被猜出來。」（題目代號 I2，參考表 1 說明。）

在此問卷中，共有 7 個題目，要求學生給出 10 個答案，有 3 題是以一個題目要求學生給出 2 個答案，其原因是為了讓學生一次思考兩個越不同越好的答案²，為方便對應，這 3 題每題可視為有 2 個小題，據此，本研究的題目規畫結構如表 1 所示。由表中可看出，規畫上，形成、應用、詮釋過程分別各有 3、4、3 小題；流暢性、變通性、獨創性的探測題目各有 6、7、3 小題；需要說明的是，雖然規畫如此，但學生在探測流暢性或變通性題目之答案中也可能出現獨創性，故在評判創造思考指標表現時，同一過程的 3 或 4 小題答案皆一起分析。

表 1

不同數學過程中探測創造思考各指標能力之題目分布規畫

數學過程 創造思考	形成 (F)	應用 (E)	詮釋 (I)
流暢性	F1a, F1b	E1a, E1b	I1a, I1b
變通性	F1a, F1b	E1a, E1b, E2	I1a, I1b
獨創性	F2	E3	I2
總小題數	3	4	3

二、研究樣本

本研究採立意抽樣，在台灣北部與南部各取兩所學校 8 年級學生為樣本。因為數學創造是高階認知層次，需到對數學有一定的認識與經驗 (Baer, 2016)，在此探測階段，以中等程度以上的學校為主，避免收集的資料太多空白，造成時間與人力上的浪費，根據台灣國中階段採區域就學的情況，即使在中上或中等學校內，仍會有不少比例程度較低的學生（國中教育會考待加強的學生）。本研究北部兩所學校學生程度在全國分別約為上、中上程度，南部兩所學校分別約為中上、中。因北部人口多於南部人口，故北部選取較多班級參與，合併共有 32 班參與，再從各班隨機選取四分之一學生參與（另外四分之三的學生作其他情境的創造力問卷³），本研究樣本共 213 位學生，其中有效樣本為 210 位（3 份無作答），男生 104 位、女生 106 位。研究樣本分布如表 2 所示。

² 原始問卷設計是先要求學生給 1 個答案，再以另 1 小題要求另 1 個越不同越好的答案，發現學生第 2 小題往往不答，經修改為一次給 2 個答案後，增加了學生的作答意願。

³ 本研究為一大型 21 世紀思考技能研究中的子研究，有關創造思考部分，仍有另外三個情境的相關研究。

表 2
研究樣本分布

區域	北部		南部	
學校	校 A	校 B	校 C	校 D
程度	上	中上	中上	中
參與班級數	6	13	7	6
各校樣本數	78	38	47	47
男生、女生	34、44	17、21	29、18	24、23

三、資料收集與分析

本研究資料收集於 2023 年五月中旬至下旬之間，資料收集乃由任課數學教師於課堂發放問卷，施測時間為一節課 45 分鐘，

（一）學生答題特質資料分析與編碼

針對學生作答之內容，採歸納分析法分析資料，第一階段先從 30 份答案中找出資料裡浮現的主題向度與其下的類別，將這些主題向度與類別編碼 (Bruner, 1966)，第二階段再分析另外 30 份答案，找出無法歸入第一階段主題向度與類別之案例，據以修改主題向度、類別及編碼，第三階段再進行全部資料的編碼，由兩位編碼者獨立編碼，如果頻繁出現非第二階段主題向度與類別的答案，則提出由一位專家決定是否修改主題向度與類別，新增編碼，若出現零星特殊的適當答案，則編入「其他」類別，此類別在判斷獨創性時尤為重要。兩位編碼者最後核對編碼，針對不一致的編碼進行討論，若有一方同意另一方的思路，則取得一致的編碼，若無法取得一致，則由另一專家決定編碼。本研究在全部項目的編碼者一致性為 (95.2%)。

在三個數學過程中，根據學生答題內容所浮現出的主題向度與類別數量並不一致，主題向度的數量介於 4~5 個，各主題向度下的類別數量介於 2~8 個。編碼的規則如下：各答案的第一碼位表示「答案適當性」此主題向度：「1」為適當答案、「7」為數學錯誤、「8」為無意義答案、「9」為空白；第二碼位表示主題向度一的類別編號；第三碼位表示主題向度二的類別編號，依此類推。資料分析得到的這些主題向度與類別可展現出學生答案的特質，因為本文篇幅有限，故將於研究結果中選擇部分主題向度與類別進行報導；另外，這些向度與類別將作為評判學生創造思考三指標表現的參考準則。根據表 1 的題目分布，每位學生都有 10 個編碼，形成、應用、詮釋過程各有 3、4、3 個編碼。

（二）創造思考指標表現分析

在評判學生創造思考三指標的表現時，雖然問卷題目設計規畫分為刺激學生展現流暢性與變通性的「二個差別越大越好的答案」，以及展現獨創性的「非常獨特的答案」，但是

在判斷流暢性時，即使在刺激學生展現獨創性該題寫出的答案，也能以此作為評判其流暢性（適當答案數量的多寡）的根據，反之，即使在刺激學生展現流暢性與變通性的題目中，學生答案若為獨特的，也可以評判其為獨創性的答案。根據文獻中研究的做法，學生答案需要是適當的（OECD, 2023），本研究以兩個準則判斷學生答案是否為適當答案，一為無數學錯誤，一為符合情境的有意義答案。舉例來說：在應用過程中要求學生找出含有平方根的「黑盒子動作」又可將 10 轉換為 88 時，學生給出「 $x^3 - 45$ 」（C 校 S1）的答案，視為數學錯誤，非適當答案；又在形成過程中要求學生設計「黑盒子動作」，當學生給出的答案是：「假密碼－（假密碼－真密碼）＝真密碼」（D 校 S1），可知其並未理解題意，此答案無意義，非適當答案。

在創造思考的表現評判上，部分研究以答案數量（流暢性、變通性）或答案稀有性（獨創性）計分（例如：彭淑玲等人，2015），這種計分方式在不同的創造思考指標上，可能會有不同的分數，PISA 以 0、1、2 三個等級計分（OECD, 2023），著重在群體表現的比較，本研究與 PISA 的重點相近，著重群體表現在不同數學過程中的比較，故採用各數學過程固定等級數量的方式評判學生的表現，研究團隊分析學生作答反應後，決定以四個等級來表示學生各指標的表現，分別為「無」、「低」、「中」、「高」。

下面針對創造思考三指標的評判標準說明：

1. 流暢性的評判

由於數學屬於較困難的學科，只要學生的答案被判定為適當的答案都可視為具有流暢性。若學生提供的答案皆為不適當答案（數學錯誤或無意義）或未提供答案，則將其歸類為「無流暢性」；若學生僅提供 1 個適當答案則將其歸類為「低流暢性」；若學生提供 2 個或 3 個適當答案則需判斷這些答案是否視為相同答案，根據 Haylock（1978）的做法，相同想法的不同答案不重複計算；舉例來說，當學生給出「 $x - 1$ 」、「 $x + 5$ 」這兩個答案時，雖然常數項不同，但在國中層級都是相同的數學想法「 $ax + b$ 」，仍應視為 1 個答案。據此，當學生提供 2 個或 3 個答案且得到相同編碼（將在研結果該節報導各題的編碼），表示想法相同，本研究僅視其為 1 個適當答案，仍是「低流暢性」；若學生提供的兩個適當答案在某主題向度中得到不同編碼，則視為有 2 個適當答案，將其歸類為「中流暢性」；依此類推，當學生提供的 3 個適當答案彼此得到不同的編碼，則將其歸類為「高流暢性」。

2. 變通性的評判

流暢性以計算適當答案個數來評判，變通性原則上以計算答案所屬類群個數來評判。本研究透過焦點團體討論，將類別群組為類群，類群的判斷原則上為學生學習經驗中數學概念的相近性、題目刺激與答案間思考的遠近（Guilford, 1950; Mednick, 1962）、答案的複雜度三者，當學生的答案跨不相近的數學概念（學習經驗中較無串聯對比的概念）或較不易由題目刺激聯想到或答案較複雜都能展現出思考的變通性，符合此三者任何之一都歸為不同群。原則上，當學生提供的 3 個答案符合都分屬於不同群且與題目刺激「 $x + 1$ 」的一次多項式不同群，則歸類為「高變通性」，依此類推，2、1、0 個符合歸類為「中」、「低」、

「無」變通性。舉例來說，在題幹給定的「黑盒子動作」為一次多項式「 $x + 1$ 」的情況下，若學生設計的「黑盒子動作」使用二次多項式，此答案雖然跨概念，但乃是學生容易透過數學概念相近性及題目刺激聯想到之答案（此二概念在學生學習經驗中有對比串聯且接觸頻繁），同時答案並不複雜，這個答案無法展現思考的變通性，故本研究將一次與二次多項式歸為同一群；相對來看，若學生設計的「黑盒子動作」使用「倒數」，可知此答案跨不相近的數學概念（在學習經驗中並不會串聯一次多項式與倒數概念），故本研究視此二類分屬於不同群。

上述依不同群個數判斷變通性乃依量變化度所做的判斷，仍需額外考慮質變化度的問題，部分群可能質性上變化度較高（例如，答案與題目的刺激關聯較遠），則變通性就會升級，舉例來說，在形成過程的主題向度二「數學物件的使用」中（參考下方研究結果），當學生使用的數學物件屬於第（7）項「混合上述兩種以上」時，可知學生除了必定會跨與「 $x + 1$ 」不相近的概念外，同時混合了不同的概念在同一個式子中，式子的形式有可能變通性較高，非國中生容易接觸到或想到的式子，此時本研究認為其展現出較「低變通性」為高的變通性，將其歸類為「中變通性」；在變通性的判定上，本研究先以量做初步判斷，再輔以質做確認判斷。

3. 獨創性的評判

許多研究以統計上出現頻率在 5% 以下的答案作為判斷準則（例如：彭淑玲等人，2015；Haylock, 1997），此做法容易受樣本數影響；學者 Silvia 等人（2008）認為可以藉助主觀計分法（subjective scoring methods）讓評測者依據個體答案的不尋常（uncommon）、遠距離聯想（remote）當指標來改善。本研究採主觀計分法的精神，將答案依獨創性分等級。當答案為適當答案時，原則上以不尋常出現（罕見）、答案使用的概念、型式等與題目所給的刺激關聯遠（remote）、與學生所學習過的內容差異大為判斷標準，判斷標準因各題而異；實際執行時對於是否罕見、關聯遠、差異大乃透過焦點團體討論逐題訂定之，但原則上，以（1）主題向度下罕見或屬於「其他」類，（2）未學習過或與題目刺激關聯遠，（3）結合多種類型（通常也較罕見）來判斷獨創性；原則上，當答案符合前述所有三個標準時，歸類為「高獨創性」、符合二個標準為「中獨創性」、僅符合其中之一標準為「低獨創性」；在此原則下仍需考慮「極端」情形，當極罕見、關聯極遙遠、差異極大時，仍會由較低等級獨創性升級為較高等級獨創性，舉例來說，在形成過程的主題向度一中，若學生有一個適當答案被歸類為「真密碼位數重組、運算或變換」時，此答案符合第①點及第②點的極端情形，直接歸類其為「高獨創性」。

本研究在判定學生各答案之創造思考指標等級後，統計「無」、「低」、「中」、「高」指標之出現次數百分比。另進一步將數學思考指標的等級轉換為分數，「無」、「低」、「中」、「高」指標依序以「0」、「1」、「2」、「3」計分後計算平均分數，此分數概括稱為創造思考指標分數或特定時稱對應指標分數，如流暢性分數。

肆、研究結果

本研究發現學生回答本問卷題目的意願頗高，各題的空白率分別如下：形成 3 題：0%、1%、4.8%，應用 4 題：2.9%、3.3%、6.7%、16.2%，詮釋 3 題：6.7%、11%、13.8%。此結果顯示各題空白率不高，學生答題意願不低。本節根據前述研究問題分項報導。

一、形成、應用、詮釋數學符號運算下的創造思考特質

學生答案的特質將以歸納出來的主題向度及類別報導，下面的報告並未涵蓋本研究所有歸納出來之主題向度及類別，每個數學過程僅選擇 2 個重要的主題向度及其下的所有類別進行報導，並在第 1 個主題向度中選擇較多學生提供或較特別的答案型態以 1 個例說明，第 2 個主題向度則僅作類別報導，不逐類提供示例與說明。至於「其他」類僅在表 3、表 5、表 7 中顯示人次百分比，部分「其他」類學生答案將在報導獨創性時介紹。

因為每題都僅報導 2 個主題向度，故下面的示例都僅提供答案適當性之主題向度及答案在所報導的 2 個主題向度之編碼，編碼皆為 3 碼位，編碼原則請參考資料收集與分析該節之說明。

（一）形成過程

在形成過程，我們要求學生設計差異越大越好或獨特難被猜出來的「黑盒子動作」。題目給出的「黑盒子動作」範例是學生在國一上學期即學習過的基本運算 $x + 1$ （其中 x 代表真密碼）。在此數學過程中，學生被要求提供 3 個答案（參考表 1），第 1、2、3 個答案為適當答案的比例分別為 93.8%、91.0%、84.3%。針對形成過程本研究共歸納出 5 個主題向度，最主要的 2 個主題向度為轉換方式及數學物件的使用。

轉換方式向度從個別學生完整答案來看其所提出的「黑盒子動作」使用了何種範疇的數學將假密碼轉換為真密碼，共有 5 類：（1）多項式函數、（2）含平方根的式子、（3）多樣數學式的組合、（4）真密碼位數重組、運算或變換、（5）其他。數學物件的使用向度擷取學生答案中使用的個別數學物件，共有 8 類：（1） x^n ， $n = 1$ 、（2） x^n ， $n = 2$ 、（3）平方根、（4） x^m ， $m > 2$ 、（5）絕對值、（6）含 x 的倒數、（7）混合上述 2 項以上、（8）其他。學生答案歸屬於各類別的出現次數（人次）百分比如表 3 所示。

表 3

形成過程主題向度之類別人次百分比(%)

主題向度	類別								不適當	空白	總和
	1	2	3	4	5	6	7	8			
轉換方式	69.5	4.0	11.8	3.5	2.1						
數學物件的使用	58.7	8.6	2.4	2.2	1.4	1.2	14.3	2.1	7.2	1.9	100

註：類別編號純為流水號（見內文對應編號），同一欄的數據不宜上下比較。

1. 多項式函數

學生提出的轉換方式最主要為一次及二次多項式函數，這兩種都是八年級學生已在課程中學習過的內容。在形成過程 3 個題目的所有答案中，一次、二次多項式函數出現人次分別占所有人次的 58.7%、8.6%，另也有 2.2% 人次的學生給出 3 次以上的多項式。

有些學生為了給出越不同越好的答案，會在係數或常數上做較多樣的變化，包括：使用括號、加項或減項運算、乘或除係數或未知數運算。例如，表 4 的 B 校 S1 之答案除使用括號外，同時使用了乘係數、乘常數以及加項運算。

2. 含平方根的式子

有少數學生（4.0%）使用了形如 $\sqrt{ax+b}$ 、 $ax+\sqrt{b}$ 、 $\sqrt{ax}+b$ 、或是 $\sqrt{ax}+\sqrt{b}$ 的平方根式子，或是將這類式子與一次或二次多項式函數結合。這些式子雖然可視為布於無理數環的一次多項式，但國中生並未學過 x 係數或常數為無理數的多項式，這種想法的產生乃如 Mednick（1962）所述，是學生組合不同元素創造出新產物的案例，如表 4 的 A 校 S1 例子所示。

3. 多樣數學式的組合

有 11.8% 人次的學生會將各式各樣的式子串聯起來，以提供差別越大越好或獨特的轉換方式。他們把學過的概念或運算，例如平方根、絕對值串聯結合起來，將舊經驗中學過的分數，擴展連結到使用 x 在分母的未學習過之分式（或是除以 x ）。表 4 的 A 校 S2 例子中，可看出學生使用了簡單的係數與常數，但卻使用了不容易連結到的絕對值。

4. 真密碼位數重組、運算或變換

有 3.5% 人次的學生跳脫真密碼為可運算變數或數值的想法，針對真密碼的各個位數的數字做重組、運算或變換。在題目情境所給的案例為 $x+1$ 之運算式的刺激狀況下，很難連結到數值位數變換是可能的「黑盒子動作」之思考，此類答案需將數學元素解構後再結合其他的數學元素或方法（例如，運算或對應），建構出新的產物。表 4 的 A 校 S3 以實例說明其黑盒子解構為各個位數再相加得出假密碼的運作方式。

表 4

學生在形成過程之表現

學生編號	答案編碼	學生表現
B 校 S1 第 1 個答案	111	$(x + 5) \times 7 + 4$
A 校 S1 第 3 個答案	127	$(7x+6)\sqrt{x}$
A 校 S2 第 3 個答案	137	$\left \frac{\sqrt{20x-30}}{40} \right $
A 校 S3 第 3 個答案	148	真密碼每個數字相加 ex: 123 (真密碼) $\Rightarrow 1+2+3=6$

(二) 應用過程

在應用過程，我們要求學生找出可能的黑盒子動作，將真密碼 10 轉換為假密碼 88，學生共需提供 4 個答案，第 1、2 個答案僅要求差別越大越好，第 3 個答案則要求使用到平方，第 4 個答案要求使用到平方根。因為真密碼、假密碼皆為已知，故學生提供的轉換方式須符合正確將 10 轉換為 88 才視為適當答案，此題可視為一題多解的題目，但可以有無限多的可能答案，同時也沒有專家解法，學生需要透過應用數學嘗試、檢驗的歷程才能給出適當答案。研究結果顯示，第 1、2 個答案（未要求應用平方或平方根）為適當答案的比例分別為 81.4%、74.7%，此數據明顯比形成過程的數據低。

研究預期此應用過程答案的發散性應不如形成過程高，因為有限制條件及要求正確答案時解題思考受到較大的限制，研究結果顯示，雖然學生無法使用如形成過程中非常複雜的算式，但仍產生多種不同的解題策略。本過程第 1、2 個答案共歸納出 4 個主題向度。最主要的 2 個主題向度為轉換方式及數系使用。

第 1、2 個答案的轉換方式向度從個別學生答案來看其所提出的黑盒子動作使用了何種數學物件，共有 6 類：(1) 應用一次多項式函數、(2) 應用除法概念、(3) 應用二次多項式函數、(4) 應用因數分解、(5) 應用完全平方式、(6) 其他。數系使用向度擷取學生答案中使用的最大數系，共有 3 類：(1) 整數、(2) 有理數、(3) 無理數。學生答案歸屬於各類別的出現次數（人次）百分比如表 5 所示

表 5

應用過程主題向度之類別人次百分比(%)

主題向度	類別 ^a						不 適 當	空 白	總 和
	1	2	3	4	5	6			
轉換方式	54.1	7.5	7.1	6.4	2.8	0.2	18.8	3.1	100
數系	67.8	9.6	0.7						
平方算式結構 ^b	38.1	6.2	4.3	3.8	10.5	5.8	24.6	6.7	100
平方根算式結構 ^b	12.9	12.4	5.3	5.3	2.4	3.1	42.8	16.2	100

註：

a 不同题目的類別編號純為流水號（見內文對應編號），同一欄的數據不宜上下比較。

b 此處為題目要求使用平方或平方根，主題向度為算式結構。

1. 應用一次多項式函數

應用一次多項式函數乃出現頻率最高的轉換方式，有 54.1% 人次的學生給出這類答案。在第一個答案中許多學生直接寫出單一加法運算即可得的轉換式子 $x+78$ ，然而也有許多學生會寫出係數非 1 的一次式，以簡單拆解 88 為 $8 \times 10 + 8$ 為主，得出 $8x+8$ ，另部分學生會寫出較少出現的分解方式，如表 6 的 D 校 S2 所示。

2. 應用除法概念

有 7.5% 人次的學生會應用除法概念，主要以假密碼除以真密碼，找出其倍數關係，此種解法是找出兩數值關係較易聯想到的方法，如表 6 的 A 校 S4 案例所示，這類學生的答案往往會呈現 $\frac{44}{5}x$ 或是 $8.8x$ 。

3. 應用二次多項式函數

在題目情境的描述下，此題以二次多項式函數為轉換方式的思考脈絡並不如一次多項式般容易出現，但研究結果發現，仍有 7.1% 人次的學生解此題時應用了二次多項式，如表 6 的 A 校 S5 所示。

4. 應用因數分解

雖然根據題目所給一次式的範例，因數分解並非學生直接可聯想到的概念，但仍有 6.4% 人次的學生應用了此方法，這類的答案多半是先分解假密碼 88，根據因數分解的結果，以 $x = 10$ 之數值帶入得出其黑盒子動作。舉例來說，如表 6 的 D 校 S3 分解 $88 = 11 \times 8$ ，再將 11 改寫為 $(x + 1)$ 。

5. 應用完全平方式

僅 2.8% 的學生應用形如 $(x+a)^2 + bx + c$ 或 $(x+a)^2 + b$ 這類的式子，在思考上偏向數學式的平方運算，與二次多項式不同，如表 6 的 C 校 S2 所示。

表 6
學生在應用過程之表現

學生編號	答案編碼	學生表現
D 校 S2 第 1 個答案	111	$5x+38$
A 校 S4 第 2 個答案	121	$10x \frac{88}{x}$
A 校 S5 第 2 個答案	131	$x^2 - x - 2$
D 校 S3 第 2 個答案	141	$(x+1) \times 8$
C 校 S2 第 2 個答案	151	$(x-1)^2 + 7$

6. 要求須使用平方或平方根的答案特質

僅應用過程的第 3 個答案要求學生的黑盒子動作需要使用平方，第 4 個答案要求黑盒子動作需要使用平方根，學生在答題上受到更多的限制，且前面已經提供了 2 個答案，故空白率較高，非適當答案的比例也較高，這兩題有嘗試答題的百分比分別為 91.9% 及 83.9%，然而適當答案的比例僅分別為 67.6% 及 41.0%（見表 5）。

在需使用平方的算式中歸納出 5 個主題向度。第 1 個主題向度為算式結構，分為下列類型：

- (1) $x^2 - 12$ 型
- (2) 平方在常數的型式。
- (3) $ax^2 - k$ ， $a \neq 1$ 型
- (4) $ax^2 + bx + c$ ， $ab \neq 0$ 型
- (5) 完全平方 $(x-a)^2 + b$ ， $ab \neq 0$ 型

在需使用平方根的算式中歸納出 5 個主題向度。第 1 個主題向度為算式結構，分為下列類型：

- (1) x 的一次或二次式，根號在常數型
- (2) $\sqrt{x^2}$ 或 $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$ 或 $\sqrt{x^4}$ 型
- (3) 根號內為「 x 湊出的完全平方數」+ k （ k 為常數）型
- (4) 因數分解假密碼型
- (5) 根號內為「 x 湊出的完全平方數」+ 一次式型

(三) 詮釋過程

詮釋過程的情境中，我們給學生兩位老師的「黑盒子動作」，謝老師的為 $x^2 + 1$ ，畢老師的為 $x \times 2 + 11$ ，並且舉例讓學生想像學生任給一個真密碼如 5，兩位老師告知個別得到的假密碼讓學生猜老師「黑盒子動作」的歷程。題目要求學生詮釋他們覺得哪個老師的「黑盒子動作」較容易被猜出來。這種題目在我國對學生來說是頗陌生的題目，因為無標準答案，而且是針對情境給出詮釋，牽涉到學生可能給老師甚麼真密碼，以及經過轉換後假密碼的形式是否容易倒推出真密碼，另牽涉到數學及自然語言的表達與說理。研究者原預期學生空白率會增加，但結果顯示空白率並未明顯提高，3 個小題有嘗試答題的比例依序為 93.3%、89.0% 及 86.2%；適當答案的比例依序為 80.9%、72.4%、44.3%。本過程共歸納出 5 個主題向度。最主要的 2 個主題向度為詮釋的切入點及關注之數學焦點。

詮釋切入點向度從大方向區分學生詮釋時使用的是概念或實例，共有 3 類：(1) 以運算結構特質說明、(2) 以實際數值舉例說明/觀察規律、(3) 僅用題目提供的真、假密碼、(4) 其他。關注之數學焦點向度擷取學生詮釋時提及之數學物件、關係或特徵，共有 7 類：(1) 題目所給函數形式、(2) 運算複雜度、(3) 回推運算之可行性或難易度、(4) 真假密碼數值特徵、(5) 常數特徵、(6) 提及上述 2 項以上、(7) 其他。學生答案歸屬於各類別的出現次數（人次）百分比如表 7 所示。

表 7
詮釋過程主題向度之類別人次百分比 (%)

主題向度	類別							不 適 當	空 白	總 和
	1	2	3	4	5	6	7			
詮釋切入點	47.5	13.6	3.2	1.0				24.2	10.5	100
關注之數學焦點	18.3	14.1	10.2	6.3	5.9	3.2	7.3			

註：類別編號純為流水號（見內文對應編號），同一欄的數據不宜上下比較。

1. 以運算結構特質說明

最多人次的學生（47.5%）以運算結構的特質為切入點詮釋。這類答案的詮釋切入點主要有兩種方向，一種是直接評論題目所給「黑盒子動作」的運算結構，例如：以平方或乘法運算是否容易被猜出，轉換式中常數是否容易被猜出，或是式子正推、反推運算的歷程是否容易被猜出等等來詮釋；另一種是學生自己創造非題目所給的數學式來說明該式也可能符合真假密碼關係，此時學生「以自己創造的式子」來說明「原運算式的不唯一性」，這兩個括號中的想法與題目的刺激關聯遠，且並非學生學過或熟悉的想法。如表 8 的 C 校 S3 學生選擇畢老師的轉換方式較易被猜出來，學生詮釋關注之焦點為回推運算之難易度，而此難易度根源於運算為乘與除或平方與開根號

2. 僅用題目提供的真、假密碼

有 13.6% 人次的學生會以題目提供的真、假密碼詮釋哪一個老師的運算式較易被猜出。學生在詮釋的過程中，所串聯的元素多是根據題目情境敘述直接可聯結到的。如表 8 的 A 校 S6 學生直接用謝老師對應的假密碼數值詮釋容易猜出其真密碼。

3. 以實際數值舉例說明/觀察規律（不含真密碼為 5 之原始例）

有 3.2% 人次的學生會以實際數值舉例或觀察實際數值規律為切入點，說明根據這些數值由假密碼猜真密碼時會有甚麼狀況產生；此類答案含蓋了整個遊戲的程序。如表 8 的 B 校 S2 學生設想了同學可能給兩位老師的 3 個真密碼，根據這些真密碼得出 2 組 3 個假密碼數值，由各組數值規律來看，哪一組數值的特徵較可能不被猜出其「黑盒子動作」。

表 8
學生在詮釋過程之表現

學生編號	答案編號	學生表現
C 校 S3 第 2 個答案	113	可以除回去，但平方要開，較難算 謝老師的
A 校 S6 第 2 個答案	123	26 可能想到 25 比較容易猜出來 $25 = 5^2$ $26 = 25 + 1$
B 校 S2 第 3 個答案	134	獨特的原因：如果又問三次，數字是 1、2、3 的話，謝老師就會回答 2 和 5 和 10，這樣同學就會發現是 1^2+1 , 2^2+1 , 3^2+1 ；畢老師會回答 13、15、17，同學們可能會以為是有關質數，便會先被誤導。

二、形成、應用、詮釋數學符號運算下的流暢性、變通性、獨創性

此處針對創造思考指標表現的報導分為學生創造思考產物在各指標中的樣貌及描述統計。樣貌報導採立意取樣報導，礙於本文篇幅，針對流暢性及變通性指標搭配形成、應用、詮釋過程各取兩個例子報導，一個是在該指標中低創造思考力的例子，另一個是在該指標中高創造思考力的例子。獨創性指標各過程各取一個高獨創性的例子報導。表 9 顯示學生在各數學過程、各創造思考指標中之人數與百分比分布。

表 9

數學過程×創造思考指標之人數百分比(%)

數學過程	具創造思考力				無	總和
創造思考	低	中	高	共		
形成過程						
流暢性	39.5	33.3	21.4	94.3	5.7	100
變通性	23.8	11.4	15.7	51.0	49.0	100
獨創性	16.7	12.9	12.9	42.4	57.6	100
應用過程						
流暢性	16.2	43.3	26.2	85.7	14.3	100
變通性	40.5	12.4	8.1	61.0	39.0	100
獨創性	6.2	1.0	4.3	11.4	88.6	100
詮釋過程						
流暢性	18.1	30.5	35.2	83.8	16.2	100
變通性	21.9	30.5	18.1	70.5	29.5	100
獨創性	8.1	5.7	6.7	20.5	79.5	100

註：「無」表示在對應的數學過程中沒有任何 1 題答案展現出具有對應之創造思考指標能力。

(一) 形成過程中創造思考指標的樣貌

1. 形成過程—流暢性

在形成過程中，高達 94.3%的學生思考具有流暢性，最多學生的思考為低流暢性（39.5%），其次為中流暢性（33.3%）、最少學生的思考屬於高流暢性（21.4%）（見表 9）。表 10 中 C 校 S4 給出的 3 個答案編碼相同，表示想法相同，為低流暢性。C 校 S5 給出的 3 個黑盒子編碼皆不相同，雖然第 1 個展開後會是二次多項式，但學生寫出此型式表示思考的是兩個一次式的相乘，為多樣數學式子的組合，第 3 個答案則是兩個一次式的相減，這 3 個答案想法不同，此學生為高流暢性。

表 10

形成過程—流暢性之學生表現

學生編號 流暢性	第 1 個答案	第 2 個答案	第 3 個答案
C 校 S4 低流暢性	$x-3$ 答案編碼 111	$x+15$ 答案編碼 111	$x-51$ 答案編碼 111
C 校 S5 高流暢性	$(x+3)(x-4)$ 答案編碼 132	$\frac{2x+3}{x}$ 答案編碼 137	$(x+1023)-2x$ 答案編碼 131

2. 形成過程—變通性

在形成過程中，有 51.0% 的學生思考具有變通性，最多學生的思考為低變通性(23.8%)，其次為高變通性(15.7%)、最少學生的思考屬於中變通性(11.4%)(見表 9)。上述 C 校 S5 第 1 和第 3 個答案屬於相同類群，但與題目刺激的式子「 $x+1$ 」(編碼 111)分屬不同類群，第 2 個答案又屬於另 1 類群，此生思考為中變通性(參考變通性的編碼)。表 11 中 C 校 S6 的 3 個答案中僅有第 2 個答案與題目刺激屬於不同類群，此生思考為低變通性。而 C 校 S7 的第 3 個答案已達中變通性的等級，其另外 2 個答案在轉換方式、數學物件的使用上屬於不同類群，此生的思考為高變通性。

表 11

形成過程—變通性之學生表現


學生編號 變通性	第 1 個答案	第 2 個答案	第 3 個答案
C 校 S6 低變通性	$2(x+6)-13$ 答案編碼 111	$3(x+6)-\frac{7}{x}+11$ 答案編碼 137	$(3x-37)+29$ 答案編碼 111
C 校 S7 高變通性	$(5x+81) \times 10 - 6$ 答案編碼 127	$[(10x-10) \times \frac{1}{2}]^2$ 答案編碼 111	$ \sqrt{4(10x+\frac{x}{2})} $ 答案編碼 137

3. 形成過程—獨創性

在形成過程中，有 42.4% 的學生思考具有獨創性，最多學生的思考為低獨創性(16.7%)，中獨創性與高獨創性的學生比例相當(皆為 12.9%)(見表 9)。表 12 的這位學生跳出以數學式轉換的思考而改以九宮格此二維表格進行真假密碼的轉換，轉換時也會根據不同位置的格子進行不同的數值與運算，此答案與題目所給一次式的刺激關聯極遠，是獨創性高的創造思考，單以這一個答案，此學生即被歸類為高獨創性。

表 12

形成過程—獨創性之學生表現

學生編號 獨創性	第 3 個答案
B 校 S3 高獨創性	<p>獨創的黑盒子動作： 假想天空中有一個九宮格(用手在空中畫一個給他看)</p> <p>讓他指一個格子，指到單數就加相應數字，指到雙數則減相應數字</p>  <p>答案編碼 148</p>

4. 形成過程—創造思考指標

本研究形成過程題目的特質是學生僅需「生成」數學方式而不需對其生成物進行解題。由 94.3% 的學生能至少生成 1 個轉換方式（流暢性），51.0% 能至少生成 1 個與題幹中 $ax + b$ 不同類群的轉換方式（變通性）來看，學生生成不同數學方式表達情境脈絡的能力不差；從 42.4% 的學生具備獨創性的數據來看，學生用數學符號自由發想的創造能力頗高。研究結果顯示單獨看形成過程時，學生在不需要後續解出答案的壓力下，創造思考能力不差。

（二）應用過程中創造思考指標的樣貌

1. 應用過程—流暢性

在應用過程學生共需給出 4 個答案，前 2 個無要求，答案共用相同的編碼，第 3 個需有平方，第 4 個需有平方根，後 2 個答案都各自有其編碼方式。流暢性取前 3 個答案分析，仍以不同想法個數為適當答案個數。此過程中，高達 85.7% 的學生思考具有流暢性，最多學生的思考為中流暢性（43.3%），其次為高流暢性（26.2%）、最少學生的思考屬於低流暢性（16.2%）（見表 9）。表 13 的 B 校 S4 給出的第 1、2 個答案得到相同的編碼，第 3 個答案在題目要求使用平方的情形下，其答案為與題目刺激相同的想法（ $X - b$ ，其中 X 為平方），此學生思考為低流暢性。D 校 S4 的 3 個答案都得到不同的編碼，其思考為高流暢性。

表 13
應用過程—流暢性之學生表現

學生編號 流暢性	第 1 個答案	第 2 個答案	第 3 個答案 (需有平方)
B 校 S4 低流暢性	可能為：真 $\times 8 + 8 = 88$	真 $\times 10 - 12 = 88$	$10^2 - x = 88$ $100 - x = 88$ $x = 12$ 所得的答案為：12 A 執行動作： $10^2 - 12 = 88$
	答案編碼 111	答案編碼 111	答案編碼 111
D 校 S4 高流暢性	$x + 78$	$\frac{x}{5} \times 44$	$x^2 - 2x + 8$
	答案編碼 111	答案編碼 122	答案編碼 121

2. 應用過程—變通性

在變通性部分，取應用過程所有小題的答案一起分析。此過程中，有 61.0% 的學生思考具有變通性，其中多數學生的思考為低變通性（40.5%），中、高變通性的學生比例不高（分別為 12.4%、8.1%）（見表 9）。表 14 的 D 校 S5 僅給出前 3 個適當的答案，第 4 個答案為不適當（數學錯誤）的答案，其給出的前 3 個答案中，第 1 個和第 3 個（題目要求平方）思考類群相同，第 2 個應用因數分解的思考與前面不同，這 3 個答案僅有一個具差異

的思考類型，此學生的思考為低變通性。C 校 S6 在第 1、3 個答案給出的是一次、平方的基本轉換方式，是由題目刺激而得，不視為變通，然而第 2 個答案在轉換方式屬於其他類，得到中變通，再加上第 4 個答案得到不同類群編碼，此生思考為高變通性。

表 14

應用過程—變通性之學生表現

學生編號 變通性	第 1 個答案	第 2 個答案	第 3 個答案	第 4 個答案
D 校 S5 低變通性	$8x+8$	$(x-2) \times 11$	x^2-12	x 真密碼 10 20 $2x^2$ 黑盒子動作 $2 \times 10^2 - 10$ $2 \times 20^2 - 20$ 假密碼 190 780
	答案編碼 111	答案編碼 141	答案編碼 111	答案編碼 777
C 校 S6 高變通性	$8x+8$	$12 \left(\frac{x}{2} + \frac{30}{x} \right) - 8$	x^2-12	$4(\sqrt{10x} + 12)$
	答案編碼 111	答案編碼 162	答案編碼 111	答案編碼 133

3. 應用過程—獨創性

在應用過程中，僅有 11.4% 的學生思考具有獨創性，最多學生的思考為低獨創性（6.2%），其次為高獨創性（4.3%）、最少學生的思考屬於中獨創性（1.0%）（見表 9）。表 15 的這位學生結合了分式、平方根（內含一次式）、雙重根號、多樣的括號、乘除加減運算，而此式子又能正確將真密碼轉換為假密碼 88，單以此一答案此生即被歸類為高獨創性。

表 15

應用過程—獨創性之學生表現

學生編號 獨創性	第 4 個答案
C 校 S8 高獨創性	$\frac{\{(x+80)-2\}180}{x} \times \frac{1}{3\sqrt{x-1} \times \sqrt{16}}$
	答案編碼 161

4. 應用過程—創造思考指標

學生在解本研究應用過程的題目時，需透過數值轉換的推理，找出數值關係的可能關係式。由 85.7% 的學生能提出至少 1 個適當答案，69.5% 的學生能提出至少 2 個想法不同的適當答案，以及 61.0% 的學生能提出至少 1 個與題幹中 $ax + b$ 不同類群的適當答案之結果

來看，學生在應用過程中，一題多解的能力不差。然而僅有 11.4% 的學生能夠找出獨創的關係式，此百分比遠低於形成過程的獨創性。

(三) 詮釋過程中創造思考指標的樣貌

1. 詮釋過程一流暢性

在詮釋過程中，高達 83.8% 的學生思考具有流暢性，特別的是最多學生的思考為高流暢性 (35.2%)，其次為中流暢性 (30.5%)、最少學生的思考屬於低流暢性 (18.1%) (見表 9)。表 16 的 B 校 S5 詮釋切入點都是運算結構，而關注的數學焦點都在平方或加減乘除這種函數形式，此生的詮釋為低流暢性。C 校 S9 給出的 3 個答案關注的數學焦點都不同，其中第 3 個答案以概括性描述猜密碼活動過程中他會採用的數學策略 (把真密碼乘到和假密碼接近)，是屬於「其他」這一類的答案，此生的詮釋為高流暢性。

表 16

詮釋過程一流暢性之學生表現

學生編號 獨創性	答案 編碼	給出的 3 個答案
B 校 S5 低流暢性	111	我認為畢老師的黑盒子動作比較容易被猜出來，因為國小三年級就會加減乘除了
	111	因為平方比較難
	111	猜題目這種遊戲，只要每一次輪到我，我腦中都一片空白，所一定想不到還有平方這個方法，因此畢老師的比較簡單
C 校 S9 高流暢性	114	我覺得真密碼和假密碼的數字差越大越不容易猜出來。
	111	假密碼和真密碼的平方、倍數越相關越容易猜出來。
	147	謝老師，因為我看到真密碼和假密碼的數字時第一個會想到先把真密碼乘到和假密碼相近的數字再去加減。

2. 詮釋過程—變通性

在詮釋過程中，高達 70.5% 的學生思考具有變通性，最多學生的思考為中變通性（30.5%），其次為低變通性（21.9%）、最少學生的思考屬於高變通性（18.1%）（見表 9）。表 17 的 C 校 S10 關注的數學焦點都不同，但焦點 1、2 屬於同一類群，此生僅有一次類群的變化，其詮釋為低變通性。B 校 S6 給出的 3 個詮釋中，3 個切入點都不同，分屬 3 類群，此生的詮釋為高變通性。其中第 2 個答案以自己提出來的 3 個運算結構切入來詮釋，與另 2 個答案想法差異頗大，顯示其思考的變通性頗高。

表 17

詮釋過程—變通性之學生表現

學生編號 變通性	答案 編碼	給出的 3 個答案
C 校 S10		
低變通性	112	謝老師，因為並無轉大數字
	111	x^2 很容易連想到
	115	因為是老師雖然只有 x^2 但有再加了 11 11 這個數比較不易想且不太會被 try。 反觀謝老師 x^2 有點太好猜
B 校 S6		
高變通性	121	$5^2 = 25$ ，接近假密碼答案，較容易被猜出。
	147	第二個原因：11 可再用 5 整除，所以就算有想到先乘後加也可能會想到「 $3x+6$ 」或「 $4x+1$ 」或「 $5x-4$ 」...
	113	數字較複雜，無法快速推論，可能性較多。

3. 詮釋過程—獨創性

在詮釋過程中，有 20.5% 的學生思考具有獨創性，最多學生的思考為低獨創性（8.1%），其次為高獨創性（6.7%）、最少學生的思考屬於中獨創性（5.7%）（見表 9）。表 18 的 A 校 S1 支持謝老師較易被猜出來，給出的詮釋同時說明兩位老師的可能情形，在支持老師與論述方向之主題向度（上述並未報導此主題方向）上屬於較罕見的類型，詮釋中又將真密碼的可能數值分成 3 類，以此 3 類分別說明假密碼可能出現的數值特質，同時做出多次邏輯推論，得出謝老師運算式的次方應為偶數且常數項為 1，整體切入點及關注的數學焦點多樣，單以此一答案此生即被歸類為高獨創性。

表 18

詮釋過程—獨創性之學生表現

學生編號		第 3 個答案		
獨創性				
A 校 S1 高獨創性	獨特的原因：			
	$X=0$	70	40	
	謝村	1	接近平方	正數,接近平方
	畢	11	不易判斷	正可負
		由上表可見,無論 X 值是正是負,謝老師的假密碼均為 70 \Rightarrow 使用假數作為二次冪 \Rightarrow 因其數值近平方,可推測其平方為合 $X^2 \Rightarrow$ 整全第一本即可得出 (X^2+1) \Rightarrow 畢老師的假密碼位置不一,只可判斷其為 $aX+11$ (不知 a 值)		
答案編碼 147				

4. 詮釋過程—創造思考指標

本研究在詮釋過程題目中給出 2 個代數式，使學生不需自行生成代數式，而能聚焦於解釋哪一個代數式較容易被猜出來。由 83.8% 的學生能至少提供 1 個適當答案，65.7% 能提供至少 2 個想法不同的適當答案，可知學生詮釋的流暢性不差，而由高達 70.5% 的學生能提供至少 1 個不同類群的適當答案來看，學生在切換不同類型觀點來詮釋的變通性不差，有 20.5% 的學生能夠給出獨創的詮釋，此百分比高於應用過程的獨創性。

三、各數學過程中創造思考指標統計描述

礙於篇幅受限，下面僅從 2 個面向來報導根據表 9 的研究發現。

（一）具備創造思考指標之研究發現

從是否具備創造思考指標能力的面向來看：

從數學過程來看，不論是形成、應用或是詮釋，都有最多的學生具備流暢性思考（94.3%、85.7%、83.8%），其次是變通性（51.0%、61.0%、70.5%），最少的是獨創性（42.4%、11.4%、20.5%）。

從創造思考指標來看，具備流暢性的人數在數學過程中由多到少依序為形成、應用、詮釋，但應用與詮釋比例接近；具備變通性的人數百分比以詮釋最高（70.5%），應用次之（61.0%），形成最低（51.0%），但最低者已超過 50%。

在「數學過程×創造思考指標」二維架構 $3 \times 3 = 9$ 項組合中，最低的 3 個組合都落在獨創性，其中以應用過程最低（11.4%），其次為詮釋過程（20.5%），而形成過程已有高達 42.4% 的學生具獨創性。

（二）創造思考指標程度之研究發現

從「低」、「中」、「高」等級創造思考指標的面向來看：

在「數學過程×創造思考指標」的 9 項組合中，僅 2 組合有依「低」、「中」、「高」創造思考力順序逐項遞減的趨勢；其他組合中比較特別的是詮釋過程的流暢性乃依「低」、「中」、「高」的順序遞增。

在「數學過程×創造思考指標」×「低、中、高」的 27 項組合中，應用過程的中流暢性組合擁有最高的百分比（43.3%）；次高為此過程的低變通性。此現象顯示學生在有明確的條件規範下可應用不同數學方法解題，但此過程中僅有 8.1% 的學生具有高變通性，顯示這些方法的變化不大。

詮釋過程的中與高流暢性合計 65.7%，中與高變通性合計 48.6%，此現象超出研究團隊原本的預期，本研究所命的詮釋題應該是學生未經歷過的任務，預期上能展現多樣方法，流暢思考的學生比例應該不高。

在上述 27 項組合中，最低的幾個百分比都落在獨創性指標，其中應用過程的中獨創性（1.0%）、高獨創性（4.3%）為最低的 2 個組合，顯示學生應用數學時較不易想出獨創的方法。較為特別的是形成過程的低、中、高獨創性皆有超過 10% 的比例。

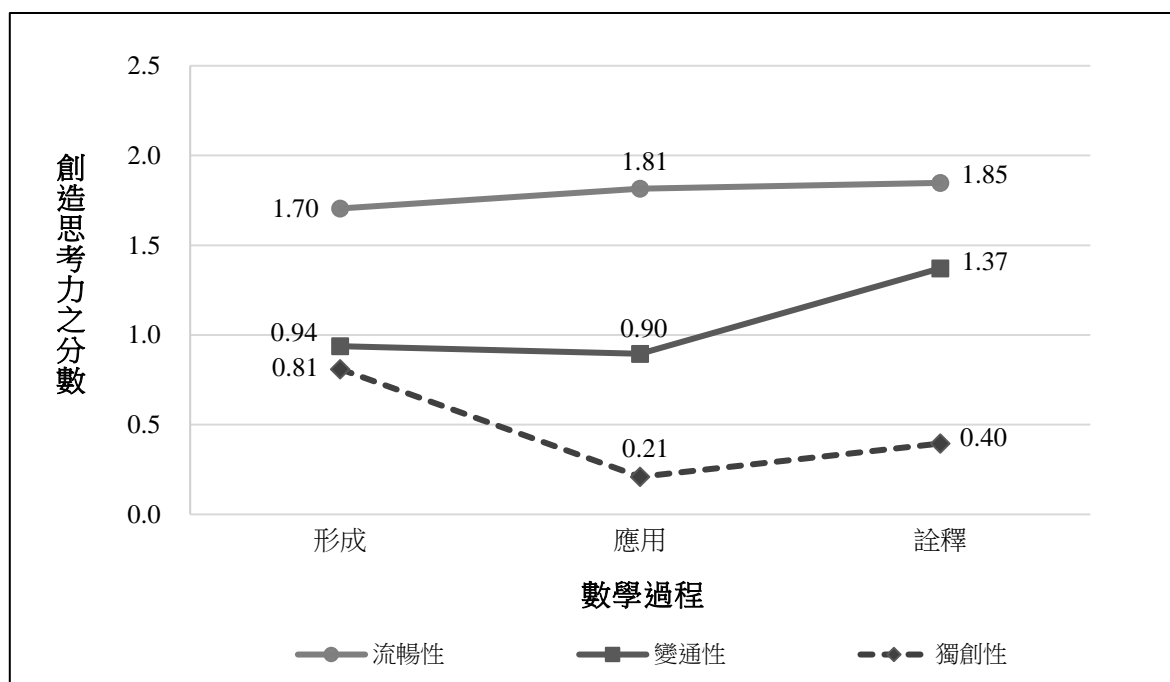
（三）創造思考指標分數之研究發現

各數學過程中各創造思考指標分數的結果如圖 2 所示。由圖 2 可得下列數點研究發現：不論在哪個數學過程中，創造思考分數都是依流暢性、變通性、獨創性的順序下降中。在創造思考分數變化中，並未依某固定的形成、應用、詮釋順序變化。

形成、應用、詮釋過程的創造思考分數變化以流暢性變化最小（1.70~1.85）。變通性在詮釋過程的分數明顯高於形成與應用過程。獨創性則是在形成過程的分數明顯高於其他過程。獨創性僅在形成過程中得到 0.81 分（靠近低獨創性 1 分）的數據，其他過程獨創性分數皆低於 0.5 分（靠近無獨創性 0 分）。

圖 2

數學各過程與創造思考各指標組合得分



伍、研究結論

本研究從二維面向探測一般國中生在符號運算的創造思考表現，其中一維乃數學過程，含形成、應用、詮釋三個過程，另一維乃創造思考，含流暢性、變通性、獨創性三個指標，此二維共形成 9 個組合面向。研究採問卷調查法調查了 210 位中等程度以上學校的國中 8 年級學生。問卷情境為密碼遊戲，以生成數學轉換方式將真密碼轉換為假密碼來探測形成過程，以應用數學找出真假密碼的關係式來探測應用過程，以說明 2 個數學式何者較易被猜到來探測詮釋過程。在資料分析上，先透過歸納分析找出學生答題的主題向度及其下類別，作為判斷流暢性的依據，再將這些類別群組得出類群，作為判斷變通性的依據，獨創性則根據是否罕見性、思考遠近、及複雜度進行判斷。在量的資料上，本研究參考 OECD (2023) 創造思考評量的 3 等級計分方式，改以 4 等級共 0、1、2、3 級分對應無、低、中、高創造思考力指標。以此計算各數學過程各創造思考指標等級的人次百分比及創造思考指標分數。

一、由研究結果反思研究架構與工具設計

本研究發現不論在哪一個數學過程，學生思考具流暢性的比例皆很高（超過八成），雖然具流暢性比例有依形成、應用、詮釋遞減的趨勢，但幅度不大，頭尾差距僅約 10%。低流暢性則以形成過程有最高的學生比例，應用與詮釋過程比例相近，此結果與我國學生在 PISA 2012 數學素養表現的結果（臺灣 PISA 國家教育研究中心，2015）相當，該研究中學生的數學素養表現以形成過程最佳，應用與詮釋過程相同。然而，當考慮到中流暢性以上，即以 2 個以上不同想法解題時，就不再有上述趨勢；達中流暢性以上等級的學生以形成過程最少，僅五成多，詮釋過程次之，應用過程約七成為最多。此研究結果可看出來，生成 1 個想法這種偏向數學能力的表現，與生成多個想法這種偏向數學創造能力的表現，在各數學過程中的相對優劣趨勢不相同。這個結果也支持了學者專家研究發現數學能力與數學創造思考力不同的論點（Haylock, 1997）。

具變通性學生普遍較具流暢性的學生少，但形成、應用、詮釋過程中，學生具變通性的比例都至少達到五成，且由達五成、六成、七成依序遞增，此變化趨勢恰與具流暢性相反。本研究變通性是根據類群判斷，具變通性表示學生可以產生跨類群的想法，此研究結果顯示產生跨類群的想法與產生不同的想法，在跨數學過程中的變化有相反的趨勢。如果本研究僅將解題視為一個整體而未將各數學過程獨立探測，則將無法獲得此研究結果。

獨創性表示產生新穎獨特的想法，在數學領域本來就較難，但有高達四成的學生在形成過程中思考具獨創性，詮釋、應用過程則分別有二成、一成。此結果顯示，在形成過程學生的獨創性頗高，但此比例仍低於 Tabach 與 Friedlander（2017）研究數學式變形中 9 年級具獨創性的學生比例，然而該研究除純粹從數學的內容探測外，其判斷獨創性的標準也與本研究差異頗大，例如，該研究判定將「 $7 - 2(x - 3)$ 」變形為「 $-2x + 13$ 」為中獨創性，變形為「 $2(-x + 3) - 7$ 」為高獨創性，考量台灣學生的學習經驗，本研究認為前者僅作展開與化簡，非變通性也非獨創性，後者僅會被視為變通性而非獨創性。不同國情在判斷創造思考指標上，是否應有其自我因應的準則，而非一味的採用它國研究的方法乃一個值得探討的問題。

形成過程著重在生成數學方式以表達情境脈絡中的狀況，本研究聚焦「生成」主軸，學生僅需提供其創造思考的產物，不須對其產物進行後續的解題過程，由研究結果來看，此題的高流暢性顯示題目單獨看形成過程時，學生在不需要後續解出答案的壓力下，產生不同想法的能力頗高。應用過程的題目若牽涉到應用國中數學，頗容易讓學生產生尋求專家解法的思維，成為對一般學生來說困難的一題多解問題，降低了創造的空間，未了免於落入此窘境，本研究剖析應用與創造的交融，發展出讓學生自己透過數值轉換的「推理」與「探究」，以找出數值關係的可能關係式（可有無限多種）。由研究結果來看，約七成的學生能提出少 2 個以上不同的想法，超過六成的學生想法具跨類群的變通性，此研究結果顯示在應用過程中加入探究的元素，學生在流暢性與變通性的表現都不差。詮釋過程著重在評鑑與解釋數學結果，本研究在題目中即給出 2 個代數式，學生不需自行生成代數式，

而能聚焦於評鑑比較所給代數式的差異，解釋哪一個代數式較容易被猜出來。由超過八成學生能至少提供 1 個想法，且高達七成的學生想法具跨類群的變通性來看，學生只專注於詮釋時，流暢性與變通性的表現都不差。

本研究在命題情境的選取上依素養導向的原則進行命題。此題密碼情境的設計與國中數學課程、學生生活經驗、資訊科技領域習習相關，解題時牽涉到數學物件的生成（形成）、數學物件的探找與應用（應用）、數學物件的解析評論（詮釋）等等。由學生的低空白率來看，題目提供學生良好的答題意願，而由上述研究結果來看各題目也提供學生良好的創造思考空間。

學者針對數學創造思考的評量研究，多數強調想出多元而新穎的解法，在中學階段數學概念較難，未免學生無法解題，往往只能使用國小所學內容（例如：面積公式、切割圖形），這些從中學階段來看較類似智力測驗題目，除此許多評量題目的設計會採用前人研究中的題目，優點是已經受到認可，缺點則是測的題目重疊性較高，例如彭淑玲等人（2015）所使用的題目與 Haylock（1987a, 1987b, 1997）題目就有重疊的部分；相對來看，本研究採用素養導向及二維命題架構，產生發展與前輩學者不同題目的需求，進而發展出根據各數學過程以我國中學階段的符號運算概念命題之作法。由上述研究結果來看，獨立出數學過程的研究架構與命題方式是可以繼續嘗試、發展與研究的方向。

二、創造思考與數學過程交織之表現

由學生的創造思考（平均）分數來看，在形成、應用、詮釋這 3 個數學過程中，創造思考分數皆依流暢性、變通性、獨創性的順序下降。此結果符合研究的預期，越能遠距連結物件越有機會得到變通或獨創的產物，也就越不容易出現，同時也符合其他學者專家研究的結果（Kwon et al., 2006）。

從流暢性、變通性、獨創性這三個指標來看創造思考分數，發現在形成、應用、詮釋過程中，這些指標分數的高低並沒有一致的趨勢。（一）流暢性：流暢性在三個過程中的分數相差不大，顯示學生不管在哪個數學過程，都能流暢地產生多個想法。（二）變通性：變通性在詮釋過程的分數較其他兩個過程高出許多，這顯示當要學生解釋數學式在情境中功用的差異時，學生很容易切換不同的角度，例如一個角度以數學式運算的難易度解釋，另一個角度以數學式結構或概念上的難度解釋，而在要形成數學式/方法或應用數學找出數學式上，學生就較難切換到不同的角度。（三）獨創性：獨創性則以形成過程分數最高，應用過程分數最低，此現象顯示，當學生面對形成過程中可以「天馬行空」生成數學式/方式時，正如同面對「桌子」的功用這種社會領域題目，很容易產生許多適當的答案；然而在應用過程這種較接近數學課程的題目時，學生可能因學習經驗較豐富，思考較為固著，較難產生獨創性的思考。

整體來說，三個數學過程中，學生在應用過程的創造思考表現較差，平均流暢性接近中流暢性、平均變通性接近低變通性，平均獨創性接近無獨創性。除此，本研究最高空白

率的題目落在應用過程的第 4 題，該題要求學生寫出獨特、含有平方根且能將 10 轉換到 88 的數學式，平方根對學生來說困難度本就較高，上述結果可能顯示與數學課程越接近的題目，學生創造思考表現越差，然而這樣的假設，仍需要更多的研究加以證實。

若能將之應用在數學課堂中，將可開闊學生與教師的視野，同時由創造所產生的喜悅將可增加學生上課的意願及參與度。

三、未來應用與研究限制

我國 108 課綱著重素養導向的課程，與國際上 PISA 的素養導向評量趨勢一致，國內學者專家因應這樣的趨勢，在研究上納入符合素養導向的教學活動，例如臆測活動或數學遊戲以探討數學創造力的培養與評量（林碧珍，2020；陳嘉皇，2005）；另吳昭容與陳如珍（2008）則也以擬題這種素養導向的試題探討學生的數學創造力。本研究在因應素養導向的趨勢上，並未跟隨這些前輩的腳步，嘗試開創新的研究思路，將 PISA 著重素養與推理的數學過程獨立來看，產生了本研究使用的二維結構。此結構可使我們由數學過程中不同的子過程來看學生的創造思考力。

這樣的研究作法開創了不同的研究思路，也使得研究能以更豐富的角度看學生在數學解題中創造思考力，進而引發更深入的研究構想。舉例來說，本研究上述發現，具流暢性與具變通性學生在跨數學過程中比例增減具有相反的趨勢，本研究群認為應可有更多的研究探測此結果的正確性及其背後的原因；是否可能因為學生在情境中能流暢地想出數學產物時，較不須深入思考以致雖能產出不同的想法，但想法較不易跨類群？或者是否因為這些不同數學過程的特質使得學生的思考在各過程中本就會有較易產生流暢想法或較易產生跨類群想法的差異？而在詮釋過程中看創造力是一個新的主題，較相近的研究乃融入與詮釋有關的活動於教學中，其中 Novita 與 Putra（2016）應用類似 PISA 試題的題目於國小教學活動中並要求學生解釋理由，但此研究並未特別報導學生詮釋或解釋的內容或學生創造思考指標表現；而林碧珍（2020）在國小課堂的臆測活動也含有詮釋成分，但她的研究並未以獨立的紙筆測驗評量，也未聚焦於詮釋過程面向，由此可知學界需要有更多獨立探討詮釋過程數學創造力的研究以便更了解學生的詮釋行為。

由學生在本研究題目的表現可知學生答題意願及創造思考表現皆不差，這樣的作法可以應用到實際教學中，例如：呼應本研究形成過程中具獨創性學生高達四成的結果，教師不需要每次都讓學生解一個完整的題目，而是由學生針對題目先生成各式各樣的解題想法，即使有獨創想法不易解出也可接受，再選擇一種想法進行解題；又如，呼應本研究詮釋過程高變通性的結果，教師可考慮給出不同的解法，由學生從不同的角度詮釋解法的優缺點或特點，增加學生的思考面向。針對傳統評量較常出現的應用數學解題，呼應本研究七成學生達中流暢性以上等級的結果，教師可融入本研究命題中的探究元素，使學生在解題時能產生多個且跨類群的想法。除此，類似本研究中的素養導向數學創造力題目，可用在課堂上作為創造力培養活動的題材。學者專家研究結果顯示，納入開放式、探索式、創造性

問題教學策略後，學生在數學創造力的分數表現都有統計上顯著的增加（Kwon et al., 2006; Silver, 1997）。

本研究受限於題目新穎，閱讀量大，學生要發想新穎的想法需要時間與耐性，故解題任務僅限縮在解密碼的單一情境，每個過程也僅涵蓋少數題目，後續研究可朝發展更多情境任務並應用國際研究以題群來施測的方式努力。除此，由本研究在詮釋提供的答案來看，部分學生未以代數符號表達數學式，部分學生答案簡略，一個值得研究的問題是如果將精進性加研究議題，學生的詮釋產物是否不具或是僅具低精進性？除此，如果把精進性也加入研究指標架構中，是否能在不同的過程中都發展出良好創造空間的試題？這些都是值得嘗試的研究領域。

誌謝

感謝國家科學及技術委員會提供經費補助專題研究計畫「21 世紀技能的評量與調查研究：以數量相關素養為內容 & 子計畫 1：創造思考技能的評量與調查研究：以數量相關素養為內容」（編號：MOST 110-2511-H-003-007-MY3）。感謝參與研究計畫的所有數學教師、中學生、研究生與助理的協助與支持。

參考文獻

- 吳昭容、陳如珍（2008，10 月 4 日）。從擬題看三年級學童的數學創造力（口頭發表論文）。台灣心理學會第 47 屆年會，台北，臺灣。[Wu, C.-J., & Chen, R.-J. (2008, October 4). *Exploring the mathematical creativity of third graders through problem posing* (Paper presentation). 47th Annual Meeting of the Taiwan Psychological Association, Taipei, Taiwan. (in Chinese)]
- 林碧珍（2020）。學生在臆測任務課堂表現的數學創造力評量。科學教育學刊，28（S），429-455。[Lin, P.-J. (2020). Assessment of students' mathematical creativity in speculative task classroom performance. *Journal of Science Education*, 28(S), 429-455. (in Chinese)] https://doi.org/10.6173/CJSE.202012/SP_28.0002
- 陳李綢（2006）。國小數學創造力診斷與認知歷程工具研發。教育心理學報，38（1），1-17。[Chen, L.-C. (2006). Developing test tools to analyze and diagnose mathematical creativity in elementary students. *Bulletin of Educational Psychology*, 38(1), 1-17. (in Chinese)] <https://doi.org/10.6251/BEP.20060503>
- 陳嘉皇（2005）。數學遊戲及其在課堂上的應用。台灣數學教師電子期刊，1，22-29。[Chen, C.-H. (2005). Mathematics games and their application in the classroom. *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*, 1, 22-29. (in Chinese)] <https://doi.org/10.6610/ETJMT.20050301.04>

- 彭淑玲、陳學志、黃博聖（2015）。當數學遇上創造力：數學創造力測量工具的發展。*創造學刊*，6（1），83–107。[Peng, S. L., Chen, H. C., & Huang, P. S. (2015). When mathematics encounters creativity: The development of a measuring tool for mathematical creativity. *Journal of Creativity*, 6(1), 83–107. (in Chinese)]
- 臺灣 PISA 國家研究中心（主編）（2015）。**臺灣 PISA 2012 結果報告**。心理出版社。[Taiwan PISA National Center. (Ed.). (2015). *Taiwan PISA 2012 national report*. Psychological Publishing Co., Ltd. (in Chinese)]
- 劉宣谷（2015）。數學創造力的文獻回顧與探究。*臺灣數學教育期刊*，2（1），23–40。[Liu, H.-K. (2015). Survey and discussion of mathematical creativity. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, 2(1), 23–40. (in Chinese)]
<https://doi.org/10.6278/tjme.2050313.002>
- Albert, R. S., & Runco, M. A. (1998). A history of research on creativity. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook of creativity* (pp. 16–32). Cambridge University Press.
<https://doi.org/10.1017/CBO9780511807916.004>
- Amabile, T. M., & Tighe, E. (1993). Questions of creativity. In J. Brockman (Ed.), *Creativity* (pp. 7–27). Simon & Schuster.
- Azis, A., & Nurlita, M. (2017). *Symbol language in learning math in school*. Proceedings of the International Seminar 2017 on Management, Education and Entrepreneurship for Global Competitiveness (ISMEEGC 2017), 101–105. <https://doi.org/10.17605/OSF.IO/M8YH6>
- Baer, J. (2016). Creativity doesn't develop in a vacuum. In B. Barbot (Ed.), *Perspectives on creativity development. New Directions for Child and Adolescent Development*, 151, 9–20. <https://doi.org/10.1002/cad.20151>
- Barron, F. (1955). The disposition toward originality. *Journal of Abnormal and Social Psychology*, 51(3), 478–485. <https://doi.org/10.1037/h0048073>
- Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Harvard University Press.
- Cropley, A. J. (1992). *More ways than one: Fostering creativity*. Ablex Publishing Corporation.
- Douglas, H., Headley, M. G., Hadden, S., & Lefevre, J. A. (2020). Knowledge of mathematical symbols goes beyond numbers. *Journal of Numerical Cognition*, 6(3), 322–354. <https://doi.org/10.5964/jnc.v6i3.293>
- Ervynck, G. (2002). Mathematical Creativity. In D. Tall (Ed.), *Mathematics education library, vol 11. Advanced mathematical thinking* (pp. 42–53). Kluwer Academic.
https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_3 (Original work published 1991)
- Guilford, J. P. (1950). Creativity. *American Psychologist*, 5(9), 444–454. <https://doi.org/10.1037/h0063487>
- Guilford, J. P. (1956). The structure of intellect. *Psychological Bulletin*, 53(4), 267–293. <https://doi.org/10.1037/h0040755>
- Guilford, J. P. (1968). *Intelligence, creativity, and their educational implications*. Robert R. Knapp.
- Haylock, D. W. (1978). An investigation into the relationship between divergent thinking in non-mathematical and mathematical situations. *Mathematics in School*, 7(2), 25. <https://www.jstor.org/stable/30213375>
- Haylock, D. W. (1987a). A framework for assessing mathematical creativity in school children. *Educational Studies in Mathematics*, 18(1), 59–74. <https://doi.org/10.1007/BF00367914>

- Haylock, D. W. (1987b). Mathematical creativity in schoolchildren. *The Journal of Creative Behavior*, 21(1), 48–59. <https://doi.org/10.1002/j.2162-6057.1987.tb00452.x>
- Haylock, D. W. (1997). Recognizing mathematical creativity in schoolchildren. *ZDM–Mathematics Education*, 29(3), 68–74. <https://doi.org/10.1007/s11858-997-0002-y>
- Hollands, R. (1972). Educational technology: Aims and objectives in teaching mathematics [Cont.]. *Mathematics in School*, 1(6), 22–23. <https://www.jstor.org/stable/30210845>
- Jeon, K. N., Moon, S. M., & French, B. (2011). Differential effects of divergent thinking, domain knowledge, and interest on creative performance in art and math. *Creativity Research Journal*, 23(1), 60–71. <https://doi.org/10.1080/10400419.2011.545750>
- Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2013). Connecting mathematical creativity to mathematical ability. *ZDM–Mathematics Education*, 45(2), 167–181. <https://doi.org/10.1007/s11858-012-0467-1>
- Kaufman, J. C., & Beghetto, R. A. (2009). Beyond big and little: The four C model of creativity. *Review of General Psychology*, 13(1), 1–12. <https://doi.org/10.1037/a0013688>
- Kim, H., Cho, S., & Ahn, D. (2004). Development of mathematical creative problem solving ability test for identification of the gifted in math. *Gifted Education International*, 18(2), 164–174. <https://doi.org/10.1177/026142940301800206>
- Kim, S., Chung, K., & Yu, H. (2013). Enhancing digital fluency through a training program for creative problem solving using computer programming. *The Journal of Creative Behavior*, 47(3), 171–199. <https://doi.org/10.1002/jocb.30>
- Krosnick, J. A. (2018). Questionnaire Design. In D. L. Vannette, & J. A. Krosnick (Eds.), *The palgrave handbook of survey research* (pp. 439–456). Palgrave Macmillan. https://doi.org/10.1007/978-3-319-54395-6_53
- Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. University of Chicago Press.
- Kwon, O. N., Park, J. H., & Park, J. S. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pacific Education Review*, 7(1), 51–61. <https://doi.org/10.1007/BF03036784>
- Laycock, M. (1970). Creative mathematics at Nueva. *The Arithmetic Teacher*, 17(4), 325–328. <https://doi.org/10.5951/AT.17.4.0325>
- Lee, K. S., Hwang D. J., & Seo, J. J. (2003). A development of the test for mathematical creative problem solving ability. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education*, 7(3), 163–189. <https://koreascience.kr/article/JAKO200311921974337.page>
- Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 129–145). Brill. https://doi.org/10.1163/9789087909352_010
- Leikin, R. (2013). Evaluating mathematical creativity: The interplay between multiplicity and insight. *Psychological Test and Assessment Modeling*, 55(4), 385–400.
- Leikin, R., & Lev, M. (2013). Mathematical creativity in generally gifted and mathematically excelling adolescents: What makes the difference? *ZDM–Mathematics Education*, 45(2), 183–197. <https://doi.org/10.1007/s11858-012-0460-8>
- Mann, E. L. (2005). *Mathematical creativity and school mathematics: Indicators of mathematical creativity in middle school students* [Unpublished doctoral dissertation]. University of Connecticut.

- Mann, E. L. (2006). Creativity: The essence of mathematics. *Journal for the Education of the Gifted*, 30(2), 236–262. <https://doi.org/10.4219/jeg-2006-264>
- Mednick, S. A. (1962). The associative basis of the creative process. *Psychological Review*, 69(3), 220–232. <https://doi.org/10.1037/h0048850>
- Molad, O., Levenson, E. S., & Levy, S. (2020). Individual and group mathematical creativity among post-high school students. *Educational Studies in Mathematics*, 104(2), 201–220. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-09952-5>
- Novita, R., & Putra, M. (2016). Using task like PISA's problem to support student's creativity in mathematics. *Journal on Mathematics Education*, 7(1), 31–42. <https://doi.org/10.22342/jme.7.1.2815.31-42>
- Organisation for Economic Cooperation and Development. (2023). *PISA 2022 assessment and analytical framework*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/dfc0bf9c-en>
- Partnership for 21st Century Skills. (2011). *21st century skills map* (ED543032). ERIC. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED543032.pdf>
- Poincaré, H. (1952). *Science and method*. Thomas Nelson and Sons.
- Sari, V. T. A., & Hidayat, W. (2019). The students' mathematical critical and creative thinking ability in double-loop problem solving learning. *Journal of Physics: Conference Series*, 1315, 012024. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1315/1/012024>
- Schmidt, W. H., Houang, R. T., Sullivan, W. F., & Cogan, L. S. (2022). When practice meets policy in mathematics education: A 19 country/jurisdiction case study. *OECD education working papers* (No. 268). OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/07d0eb7d-en>
- Schoevers, E. M., Kroesbergen, E. H., & Kattou, M. (2020). Mathematical creativity: A combination of domain-general creative and domain-specific mathematical skills. *The Journal of Creative Behavior*, 54(2), 242–252. <https://doi.org/10.1002/jocb.361>
- Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM—Mathematics Education*, 29(3), 75–80. <https://doi.org/10.1007/s11858-997-0003-x>
- Silvia, P. J., Winterstein, B. P., Willse, J. T., Barona, C. M., Cram, J. T., Hess, K. I., Martinez, J. L., & Richard, C. A. (2008). Assessing creativity with divergent thinking tasks: Exploring the reliability and validity of new subjective scoring methods. *Psychology of Aesthetics, Creativity and the Arts*, 2(2), 68–85. <https://doi.org/10.1037/1931-3896.2.2.68>
- Sriraman, B. (2005). Are giftedness and creativity synonyms in mathematics? *Journal of Secondary Gifted Education*, 17(1), 20–36. <https://doi.org/10.4219/jsge-2005-389>
- Stein, M. I. (1953). Creativity and culture. *The Journal of Psychology*, 36(2), 311–322. <https://doi.org/10.1080/00223980.1953.9712897>
- Sternberg, R. J. (2003). Creative thinking in the classroom. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 47(3), 325–338. <https://doi.org/10.1080/00313830308595>
- Tabach, M., & Friedlander, A. (2017). Algebraic procedures and creative thinking. *ZDM—Mathematics Education*, 49(1), 53–63. <https://doi.org/10.1007/S11858-016-0803-Y>
- Torrance E. P. (1970). *Encouraging creativity in the classroom*. W. C. Brown Company.
- Volle, E. (2018). Associative and controlled cognition in divergent thinking: Theoretical, experimental, neuroimaging evidence, and new directions. In R. E. Jung & O. Vartanian (Eds.), *The Cambridge handbook of the neuroscience of creativity* (pp. 333–360). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781316556238.020>

- Williams, J. D., Harlow, S. D., & Borgen, J. S. (1971). Creativity, dogmatism, and arithmetic achievement. *The Journal of Psychology*, 78(2), 217–222. <https://doi.org/10.1080/00223980.1971.9916906>
- Woodrow, D. (1982). Mathematical symbolism. In R. R. Skemp (Guest Ed.), *Understanding the symbolism of mathematics*. *Visible Language*, 16(3), 289–302. <https://journals.uc.edu/index.php/vl/article/view/5349/4213>