

劉柏宏 (2021)。
論數學文化與數學教育的關係。
臺灣數學教育期刊, 8 (1), 79-88。
doi: 10.6278/tjme.202104_8(1).004

論數學文化與數學教育的關係

劉柏宏

國立勤益科技大學基礎通識教育中心

數學自身是人類諸多文化中的一種次文化,某一地區社會的數學文化對於該地區的數學教育有著舉足輕重的影響,因此本文從人類學、歷史與社會、和哲學的角度闡述數學文化的意涵,並透過一些與數學文化相關的教育研究,論述數學文化在數學教育上的價值。本文主張,「文化中的數學」和「數學中的文化」兩者的互動融滲不僅關係到該社會中數學知識的形成過程,更會影響其數學教育的現實面。因此若要提升數學的教與學,必須在數學文化的大架構下一方面在學習數學過程中實踐「數學中的文化」,另一方面必須時時關照「文化中的數學」取向。

關鍵詞：數學文化、數學文化的價值、數學教育

通訊作者：劉柏宏，e-mail：liuph@ncut.edu.tw

收稿：2021 年 3 月 15 日；

接受刊登：2021 年 4 月 9 日。

壹、前言

一個社會所強調的文化價值觀就代表著該社會群體文化的核心特徵（Hofstede, 1980; Schwartz, 2006）。毫無疑問地，社會群體的文化價值取向無形之中會影響其中的個體對待特定人事物的信念和行動目的，但個體實際的行為表現卻不見得完全是依據內在所抱持的信念而行，而係與其所處的外在現實環境條件有關，也就造成信念與行為兩者間之落差。一個地區或民族的文化基本核心係由透過歷史演繹與選擇所形成的一種傳統觀念，特別是與它們所附帶的價值所組成。綜合考量這些因素，如圖 1 所示之「文化-行為關係圖」，圖中顯示出整體文化型塑出個體與群體的信念並造就現實脈絡，而個體與群體的行為是信念與現實折衝妥協的結果，最終表現則視信念與現實兩者折衝之後其個別所占比例之多寡決定。值得注意的是，文化系統某一方面可以視為行動的產物，另一方面又可視為進一步行動的機制元素（Kroeber & Kluckhohn, 1952），因此圖一的關係圖並不是靜態的，而是呈現一種「由外而內」與「由內而外」的動態演變過程。數學是人類文化中偉大的智識成就之一，自身也形成一種次文化，而這種數學文化對於數學的教與學自然會產生相當的影響。

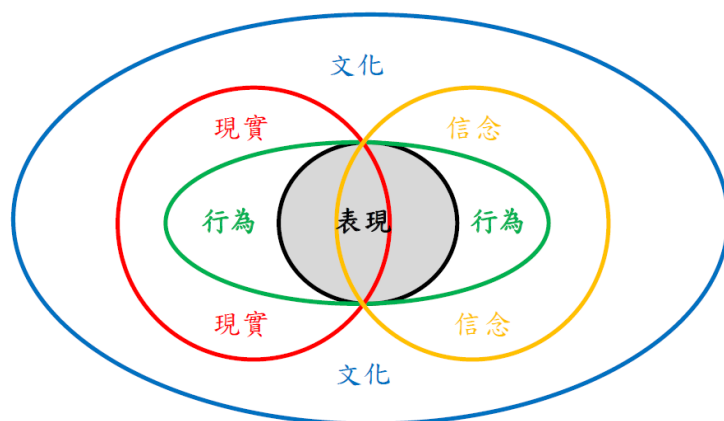


圖 1 「文化-行為關係圖」

貳、數學文化的三種視角

一、數學文化的內涵

早期具體提出數學文化（mathematical culture）概念的當屬數學家懷爾德（Raymond Wilder, 1896-1982）。他於 1950 年的國際數學家大會中以「數學的文化基底」（cultural basis of mathematics）為題發表演講，闡述數學文化的內涵和重要性。懷爾德（Wilder, 1950）強調，唯有認識數學的文化基底，才能對數學本質有更深入的理解。只是「文化」一詞極端抽象，從任何單一學術領域解

讀都難以一窺堂奧。論述數學文化的內涵至少可以從以下三個視角出發。

（一）人類學視角

從人類學解讀數學發展本質的第一人非懷爾德莫屬。身為一位職業數學家，懷爾德（Wilder, 1968）不是從數學知識的結構或數學思維的過程談數學文化，也不是從數學歷史演變的角度談數學文化，而是從人類學的觀點。他指出，假設一位數學史家 A 君生於公元 1200 年代的中國，他（她）記載的內容不外乎數字計算和解方程，不會談類似古希臘的幾何學，因為當時中國數學偏重計算之學，並沒有幾何論證的風氣。同樣地，若 A 君成長於公元 200 年的希臘，他（她）所寫的數學史必定涵蓋歐幾里得幾何學，而甚少著墨於代數，甚至數字計算。不過若 A 君是當代歷史學家，他（她）撰寫的內容必定同時包含幾何和代數，因為當今這兩者都是數學的一部份。從這一段敘述可以看出懷爾德深信人類文化脈絡對知識發展有著關鍵性的地位，學術的發展很明顯受當時文化的制約。懷爾德（Wilder, 1968）更明確指出，只有在強大的環境壓力和內部壓力作用下，才能有效改變數學演變的進程，例如當孕育知識所在地區的宿主文化（host culture）有重大改變，或是數學知識本身面臨危機時，數學演變的路徑才會產生明顯的改變。例如，古代的中國和中世紀的歐洲，其宿主文化的狀態穩定或停滯，而導致數學發展缺乏突破。相對的，二戰前後大量歐洲數學家移居美國，引發美國數學研究的重大進展。對懷爾德來說，從人類文化學檢視數學發展本質的好處是，某些對整個社會的文化演變中不十分明顯也沒有重大意義的形式和過程，對數學而言可能就變得相當重要。值得注意的是，懷爾德十分強調數學歷史（history）和數學演變（evolution）的不同，例如「馬的歷史」和「馬的演變」就是不同的概念，數學演變的概念接近於相當於生物演化的概念。

懷爾德於 1981 年進一步闡述數學和人類社會的文化演變之間的關係（Wilder, 1981）。他指出，歷史紀錄發生的事件是一種特殊化（particularizing）的過程，而演變則是一種一般化（generalizing）的過程。演變重視引發變化的作用張力（如遺傳張力、環境外部張力和知識內部張力），以文化演變的觀點看待歷史經常會獲得新的認識。在此我們以微積分和非歐幾何來理解懷爾德的論點。從數學知識來看，十七世紀微分的誕生是為了計算行星瞬間速率和切線斜率，但從文化角度來看，是為了回應十六世紀哥白尼的《天體運行論》對整個科學界所產生的外部環境張力。另一方面，非歐幾何的出現並沒有因為任何外部張力，而是源於數學家長期對歐幾里德平行公設存疑所累積的內部張力。

（二）歷史和社會視角

克萊恩的《西方文化中的數學》（Kline, 1954）表明了數學是整個人類主文化中的一種次文化，但他更大的企圖在於揭示數學是「西方文明中一個主要的文化推動力量」（a major cultural

force in Western civilization, p. ix)。這種聽起來似乎不可思議的企圖當然會引來批評，不過克萊恩認為這是由於長期以來大眾對於數學本質錯誤的認知所致。他主張數學雖然是一個知識體，但不包含真理 (truths)。科學確實在追求物理世界的真理，而數學只是扮演烽火台的角色，指引科學到達它的目的。推進數學發展的動力除回應社會所需的問題外，最重要的就是對美的追尋 (over and above all other drives to create is the search for beauty, p. 5)，這些論點都顛覆一般人對數學的認知。

在克萊恩眼中數學知識發展背後的原因難以個別區分開來，舉凡實用的、科學的、美感的和哲學等等的因素都型塑出今日所見到的數學，所以數學不僅僅是一種思維方式、一種藝術，或一種語言。數學能滿足自然科學家、社會科學家、邏輯學家、藝術家、音樂家、甚至神學家的需求，所以克萊恩在《西方文化中的數學》一書中談論數學如何與哲學、宗教、天文學、繪畫、音樂、建築、文學等領域互動，尤其是牛頓所引發的論戰。詩人波普 (Alexander Pope, 1688-1744) 曾寫下讚頌牛頓的雋永名句：「自然和自然的法則隱藏在黑夜之中。上帝說：讓牛頓去吧，於是一切變得光明。」法國哲學家伏爾泰 (1694-1778) 和情人合著的《牛頓哲學的原理》(*Elements of the Philosophy of Newton*) 一書的扉頁是一幅銅版畫，正是描寫牛頓所引來的智慧之光，用此表達對牛頓最崇高的敬意。不過十八世紀英國詩人畫家布雷克 (William Blake, 1757-1827) 在其畫作中將牛頓描繪成一位身體肌肉如幾何般僵硬，只知用圓規屈身埋首於測量的科學家，卻完全無視於背後巨石上發散出有如彩虹般的燦爛光輝。這是在諷刺牛頓的稜鏡實驗將太陽光析離成多彩顏色的組成，破壞文人對彩虹的想像，所以這幅畫是對牛頓在光學研究的諷刺與鄙視，布雷克並指稱推理是惡魔，而牛頓是最高級的祭司。可見在西方文化中，對待科學的態度並不如我們想像般全然是理性的，其中充滿許多智識文化的衝突與妥協。

(三) 哲學的視角

1980 年之前由於受到實證主義思想的影響，數學哲學的研究偏向形式邏輯，強調數學知識結構之嚴謹與絕對性。數學哲學界約莫從 1980 年代開始重視數學的經驗性，其中的代表作有二，一是拉卡托斯 (Imre Lakatos, 1922-1974) 的《證明與反駁》(*Proofs and Refutations*) (Lakatos, 1976)，另一是克萊恩的《數學：確定性的失落》(*Mathematics: The loss of certainty*) (Kline, 1982)。1960 年代英國數學家拉卡托斯眼見當時英國大數學家哈第 (Godfrey Hardy, 1877-1947) 主張的數學形式主義 (formalism) 蔚為數學哲學的主流，因此開始改寫他的博士論文成為《證明與反駁》一書。書中採蘇格拉底辯證方式，藉由師生交叉辯詰與對話探究多面體的「點 (V)、邊 (E)、面 (F)」關係式，也就是歐拉多面體公式 $V-E+F=2$ 。全書展現出一個數學概念如何「琢磨」(polishing) 的歷程。拉卡托斯強調「思想實驗」(thought experiment) 與「準實驗」(quasi-experiment)，以突顯數學方法論中「觀察特例→猜想規律→建構反例→修正猜想→提出證明」

的精髓。克萊恩在《數學：確定性的失落》一書中直陳“數學的發展歷程其實很不邏輯”，其中包含錯誤的證明、推理的疏漏、概念的認知錯誤等等，這番論述顛覆一般人對數學的印象。事實上，克萊恩的論斷有其歷史依據，許多數學概念的產生不是根據理性的邏輯推理，甚至有些時候數學家具有「反智」傾向，只為固守信念而不願接受邏輯上並不矛盾的新概念。例如畢達哥拉斯堅持宇宙間只存在正整數和由正整數所形成的比例數（ q/p ），也就是有理數，類似 $\sqrt{2}$ 這種無理數是不存在的。往後一千多年的數學主流思想一直堅持畢氏的想法，直到十六世紀文藝復興時期才接受根號運算，但仍拒絕 $\sqrt{-1}$ 的存在（雖然運算中會使用到它），再等到十七世紀的笛卡爾才承認 $\sqrt{-1}$ 是一個數字，不過他還是不太願意大方承認它是個真實的數（real number），而是個想像的數（imaginary number），中文翻譯以縹緲的「虛數」稱之。

我們可以發現無論是克萊恩或是拉卡托斯，都是從數學家的思維歷程出發，而不是以最後的知識結構做為探究數學本質的依歸，也就是如赫許（Ruben Hersh）所說，數學哲學的工作應該聚焦於“職業數學家的工作哲學”（working philosophy of professional mathematicians）（Hersh, 1997, p. 31）。在此基礎之上，數學哲學出現兩派相關的主張，分別是拉卡托斯的經驗主義觀（empiricist view）（Lakatos, 1978）和厄尼斯特的可謬主義觀（fallibilist view）（Ernest, 1991），這兩種觀點強調數學的經驗性，不強調（但不是否定）數學的絕對性，反而著重數學知識的動態過程，主張數學知識不是先驗的（*a priori*），也不必擁有絕對的真理性（absolute validity）。反而，它是可以調整的，永遠對於修正持開放態度，表明出一種數學知識建構的文化。

從以上三種關於數學文化的論述我們可以發現，不同視角對於數學文化的闡述都有其基本立場。人類學視角以類似生物演化的觀點探究決定數學知識演變的各種張力；歷史與社會視角著重數學如何與其他學科的互動進而引發自身的發展；哲學視角則從職業數學家的工作哲學理解數學知識如何建構。三種視角有不同程度的交集，也彼此互補。若以觀察尺度區分，人類學視角偏向宏觀，比較不探究個別事件等細節，而是注重演變趨勢。哲學視角偏向微觀，關心數學概念的發生、建構與辯證過程，甚少觸及外部環境變化對數學知識的影響；而歷史與社會視角約莫居中，依據歷史走向和社會需求觀察數學知識發展的大方向，但必要時也談論個別事件與細節。這三種知識觀（或稱認識觀，epistemological view）對數學教育也產生重大影響，1990年代科學教育與數學教育之所以引入根基建構主義（radical constructivism）和社會建構主義（social constructivism），也與此三大數學文化思潮密切相關。

參、數學文化在數學教育中的價值

一、數學文化的定義

懷爾德和克萊恩雖然是論述數學文化的先驅者，但兩人都未正式給予數學文化一個具體的

定義。當中的困難可能是因為，數學本身就是人類發展過程中所伴隨產生的一種文化，而「數學文化」一詞是否重複定義？「數學文化」的內涵究竟所指為何？由於「數學文化」很容易與「數學史」畫上等號，因此一般人直覺上認為「數學文化」就是指「數學史」，但事實上兩者是不同的概念，就如同「文化」和「歷史」是兩個相關但不同的概念一般。有鑒於此，劉柏宏（2016）參酌 Kroeber 與 Kluckhohn（1952）關於文化的定義後，將數學文化定義如下：

數學文化就是人類探索數學知識時其行為的外顯和內隱模式，並藉由人類群體，特別是數學家社群，所創造獨特成就的符碼（符號、圖形或文字）來傳遞。（p. 61）

他並從數學文化的人類學、歷史與社會、和哲學視角，建立一個縱橫雙向構面，其中「數學文化」（mathematical culture）係由「文化中的數學」（mathematics in culture）和「數學中的文化」（culture of mathematics）兩個構面組成。前者是以宏觀角度看待數學知識演變的歷程，觀察人類發展過程中，數學在其所屬社會文化所扮演的角色；後者從微觀角度探究數學概念從無到有歷程，觀察數學知識從醞釀到成熟的過程中，個體與群體所顯現的思維模式。我們可以約略地說，「文化中的數學」在概念上大部分較接近懷爾德和克萊恩的主張，而「數學中的文化」則與赫許的“職業數學家的工作哲學”有關，但兩個構面並非獨然而立，而是兩者呈現一種交錯的有機互動發展。

二、數學文化的價值

目前已有不少學者和機構直接討論數學文化在教育上的價值，或是在教學上如何呈現數學與文化的關係（Barta, 2014; Burton, 2009; D'Ambrosio, 1990; Nasir, Hand, & Taylor, 2008; Liu, 2018）。其中最廣為人知的就是「民族數學」（ethnomathematics）。「民族數學」一詞是由 D'Ambrosio（1985）所提出，用於描述一個可識別的文化群體之數學實踐的過程與內容，探究在多元文化中所能找到的數學思想。D'Ambrosio 進一步提出「民族數學」一詞字義的解釋：

字首 Ethno 如今已經廣義地指稱社會的文化脈絡，因此包含語言、術語、行為準則、神話和符號。而演繹 mathema 這詞比較困難，但通常意指解釋、認識、理解、加密、測量，分類，推斷和建模等活動。字尾 tics 源自 techné，和技術有相同的字根。（D'Ambrosio, 1990，引自 Rosa & Orey, 2011, p. 35）

換句話說，‘ethno’是指一個文化環境中以文化傳統、代碼、符號、神話以及用於推理的特定方式來識別某個群體的成員。‘Mathema’的意思是解釋和理解世界，以便超越、管理和應對現實，以便這文化團體的成員能夠生存和發展。而‘tics’是指諸如計數、排序、測量、加密、分類、推斷和建模之類的技術。簡言之，「民族數學」（ethnomathematics）意指在種族背景下為解決人們每天

遭遇的日常問題和人類為創造更有意義的世界所發展的數學技術（Rosa & Orey, 2011）。D'Ambrosio（2005）指出，由於全球化和西方古希臘式數學思維成為當代數學知識典範，當今數學教學已經「去知識脈絡化」，少數民族和非主流文化的數學文化多樣性在數學教學中已被犧牲，他們被強迫學習主流文化（例如歐美白人）的數學思維，這種教學取向嚴重忽略數學曾在各地區民族中扮演文化推進力量的事實，不利學生學習數學的自我認同。如此一來將衝擊學生數學學習的真實性和個別性。

Nasir、Hand 與 Taylor（2008）強調數學知識必須融入文化脈絡，才能激發學生的有感學習以增進學習成效。以計算數值的比例和平均值問題為例，他們觀察一群加州的非裔美國學生，若要求他們直接計算（1） $7/11=?\%$ 和（2）（15, 20, 10）三數之平均值，許多學生的解題策略就是直接用算術規則，卻頻頻出錯，表現並不理想。但是若將第（1）題改寫為：「假設你站在罰球線上投了 11 顆球，命中 7 顆。你的投球命中率是多少？」；第（2）改寫為：「假設你第一場球賽得 15 分，第二場得 20 分，第三場得 10，這三場的平均得分是多少？」，學生則呈現截然不同的解題表現。許多學生雖受限於算術計算能力無法直接算出答案，但是他們會嘗試發展出估算的解題策略。以第（1）題為例，學生假設投了 10 顆球，每進一顆就是占 10%，估計投進 7 顆球的命中率是 70%。由於總共投了 11 顆球，總命中率不可能是 110%，所以學生估算真正的命中率稍低於 70%。至於第（2）題，不會除法的學生會先觀察猜測出一個大概的數字，然後去檢驗這數字和 10, 20, 15 的差是否都相等。或許這些解題策略不見容於傳統的教學現場，但這結果顯示出將文化脈絡融入數學教學的重要性。因為傳統的數學教學只關心數學知識本身，卻忽略數學知識所源起的文化脈絡。一旦一個數學問題脫離賦予其意義的文化脈絡，將很難引起學生的有感學習。基於類似的考量，Liu（2018）檢視臺灣、中國大陸和美國的高中數學教科書中數學文化元素的分布情形和其內涵。研究發現，臺灣、中國大陸和美國的教科書版本在「文化中的數學」方面最強調「社會」面向的生活應用題目，但對於數學概念在不同民族產生的原因、數學方法在不同民族的呈現方式和數學概念和當時哲學思想等方面幾乎完全略而不談。在「數學中的文化」方面，最常出現的是以直覺說明問題的觀念和藉由觀察分析解題，幾乎不談數學知識社群辯證的過程，只有美國教科書偶爾提到某一數學概念或性質不同年代的演變。與中國大陸和美國教科書相較，臺灣的高中數學教科書在選擇數學文化題材時，比較忽略數學在政治與經濟方面的應用，而且所選擇的應用問題，在內涵上與前述兩個地區有所差距，許多所謂的應用題與真實生活不符，其情境過於牽強，整個編排方式也大都採平鋪直述的演繹方式，雖然方便教師教學，但缺乏引發學生進行猜測、歸納、推理和論證的數學文化素材。若以 Nasir、Hand 與 Taylor 的研究結果來看，臺灣的高中數學教科書在激發學生有感學習方面相當不足。

由於教科書必須考量市場接受度，前述各地區教科書中對於數學文化元素不同的詮釋方式會受當地社會文化價值取向的影響。又由於教科書編輯的召集人幾乎都是數學家，因此數學文化的質量成分和呈現方式也與該社會中數學家的數學知識觀有關。Burton (2009) 就曾探究英國職業數學家的數學知識觀，以觀察「內嵌」於職業數學家心中的「數學文化」是否與一般數學學習者的學習傾向有著密切的鏈結。必須提醒的是，雖然 Burton 對於數學文化的詮釋方式與劉柏宏 (2016) 大致類似，但在英文的用詞上有些差異。Burton 並未給「數學文化」一個特定的詞彙，她的數學文化概念包含「culture of mathematics」和「mathematical culture」，其中「culture of mathematics」的內涵與劉柏宏相同，係指稱數學知識形成過程所含括的思維、策略與方法等元素。而 Burton 的「mathematical culture」接近劉柏宏的「mathematics in culture」，泛指引領數學家和學生在各種環境中如何體驗數學的社會政治態度、價值與行為 (the socio-political attitudes, values and behaviours that constitute how mathematicians, and their students, experience mathematics in the settings of conferences, classrooms, tutorials, etc., p. 157)。在訪談了 35 位男性數学家和 35 位女性數学家之後，Burton 發現 83% 的受訪者提到直覺 (intuition) 在思考數學中的重要性，61% 提到美學 (aesthetics) 的重要性。至於數學知識的特點，56% 認為是其知識結構 (structure)，41% 提到嚴謹性 (rigour)，37% 提到數學美 (beauty)，31% 提到規律 (pattern)，這些都是「數學中的文化」的特徵。Burton 的研究某種程度上支持劉柏宏 (2019) 的結果。劉柏宏分析英國高中教科書中數學文化元素的質與量後發現，與臺灣、中國大陸和美國的高中數學教科書相較，英國教科書最強調數學規律的探究。書中問題與「歸納猜想」相關的指標在所有「數學中的文化」各項指標中占了 54.2%，而「直覺說明」指標也占了 33.7%，這與 Burton 所觀察發現英國數學家強調數學思考中的直覺和數學知識中的規律不謀而合。不過 Burton 也指出，這些數學家心中內嵌的一些數學文化元素並沒有轉移到一般學生心中，例如結構、嚴謹性和數學美。

肆、結論

本文一開始就表示，文化系統某一方面可以視為行動的產物，另一方面又可視為進一步行動的機制元素，這可以說明數學文化中「文化中的數學」與「數學中的文化」兩者互動融滲的關係，如同劉柏宏 (2021) 以「柏拉圖立體」和「哥尼斯堡七橋問題」為例所強調的，許多數學問題都是從「文化中的數學」出發，然後遵循「數學中的文化」發展成數學知識的一環，而這些數學知識又進一步影響其他領域，形塑成另一種文化，而這兩者的互動融滲不僅關係到數學知識的形成過程，更會無形中影響數學教育的現實面。比方說，如果社會大眾只是將數學視為一種解決問題的工具，這種觀點會誤導大眾對於數學本質的認知。誠如 Burton (2009) 所指出的，一個地區「文化中的數學」的取向可能構成了某些族群進入學習數學的障礙，也影響大眾對於

「數學中的文化」的理解，所以 Burton 認為必須關注「文化中的數學」，也就是社會中對於數學的社會政治態度、價值與行為。不過反過來說，如果一個社會或群體對「數學中的文化」缺乏理解，甚至誤解（例如認為數學知識必須非常強調嚴謹與邏輯），這些信念也會逐漸形成偏頗的知識觀與價值觀，進而形塑出一種狹隘的「文化中的數學」觀。所以本文的觀點主張，若要提升數學的教與學，必須在數學文化的大架構下「小處著手，大處著眼」。「小處著手」是指在學習數學過程中實踐「數學中的文化」，「大處著眼」則是時時關照「文化中的數學」取向。

誌謝

本文是科技部專題研究計畫 MOST 105-2511-S-167-001-MY3 研究成果之一部份，感謝科技部之經費支助。本文所表達之論述係作者個人觀點，不代表科技部或本刊之立場。

參考文獻

- 劉柏宏（2016）。從數學與文化的關係探討數學文化素養之內涵—理論與案例分析。**臺灣數學教育期刊**，3（1），55-83。doi: 10.6278/tjme.20160413.001 【Liu, Po-Hung (2016). Discourse on the constituent of literacy for mathematical culture in terms of the relationship between mathematics and culture - Theoretical and case analysis. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, 3(1), 55-83. doi: 10.6278/tjme.20160413.001 (in Chinese)】
- 劉柏宏（2019）。**數學文化融入十二年國教數學課程-總計畫**。行政院科技部專題研究計畫成果報告（MOST 105-2511-S-167-001-MY3）。臺北：科技部。【Liu, Po-Hung (2019). *Integrating mathematical culture into math curriculum of 12-year basic education-Main project*. Achievement report of research projects of the Ministry of Science and Technology (MOST 105-2511-S-167-001-MY3). Taipei, Taiwan: Ministry of Science and Technology. (in Chinese)】
- 劉柏宏（2021）。怎識數學真面目？談數學文化與素養。**科學研習月刊**，60-02。【Liu, Po-Hung (2021). How to know the true face of mathematics? *Science Study Monthly*, 60-02. (in Chinese)】
- Barta, J. (2014). Introduction: The crossroads of mathematics and culture. In J. Barta, R. Eglash, & C. Barkley (Eds.), *Math is a verb: Activities and lessons from cultures around the world* (pp. 1-7). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Burton, L. (2009). The culture of mathematics and the mathematical culture. In O. Skovsmose, P. Valero, & O. R. Christensen (Eds.), *University science and mathematics education in transition* (pp 157-173). New York, NY: Springer. doi: 10.1007/978-0-387-09829-6_8
- D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 5(1), 44-48.
- D'Ambrosio, U. (1990). *Etnomatemática* [Ethnomathematics]. São Paulo, Brazil: Editora Ática.
- D'Ambrosio, U. (2005). Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. *Educação e Pesquisa*, 31(1), 99-120. doi: 10.1590/S1517-97022005000100008

- Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London, UK: Falmer Press. doi: 10.4324/9780203497012
- Hersh, R. (1997). *What is mathematics, really?* New York, NY: Oxford University Press.
- Hofstede, G. (1980). *Culture's consequences: International differences in work-related values*. Beverly Hills, CA: Sage.
- Kline, M. (1954). *Mathematics in western culture*. London, UK: George Allen & Unwin.
- Kline, M. (1982). *Mathematics: The loss of certainty*. New York, NY: Oxford University Press.
- Kroeber, A., & Kluckhohn, C. (1952). *Culture: A critical review of concepts and definitions*. Cambridge, MA: The Museum.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. New York, NY: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9781139171472
- Liu, P.-H. (2018). An international comparative study on how mathematical culture is implemented in the textbooks. In E. Barbin, U. T. Jankvist, T. H. Kjeldsen, B. Smestad, & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of the Eighth European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education* (pp. 345-354). Oslo, Norway: Oslo Metropolitan University.
- Nasir, N. S., Hand, V., & Taylor, E. V. (2008). Culture and mathematics in school: Boundaries between “cultural” and “domain” knowledge in the mathematics classroom and beyond. *Review of Research in Education*, 32(1), 187-240. doi: 10.3102/0091732X07308962
- Rosa, M., & Orey, D. C. (2011). Ethnomathematics: The cultural aspects of mathematics. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 4(2), 32-54.
- Schwartz, S. H. (2006). A theory of cultural value orientations: Explication and applications. *Comparative Sociology*, 5(2-3), 137-182. doi: 10.1163/156913306778667357
- Wilder, R. L. (1950). The cultural basis of mathematics. In L. M. Graves, E. Hille, P. A. Smith, & O. Zariski (Eds.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Vol. 1, pp. 258-271). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Wilder, R. L. (1968). *Evolution of mathematical concepts: An elementary study*. New York, NY: Wiley.
- Wilder, R. L. (1981). *Mathematics as a cultural system*. New York, NY: Pergamon Press.