
蘇意雯（2021）。
中小學數學史教案開發與實作研究。
臺灣數學教育期刊，8（1），27-53。
doi: 10.6278/tjme.202104_8(1).002

中小學數學史教案開發與實作研究

蘇意雯

臺北市立大學數學系

本研究主要由研究者及在職教師共同規畫開發十二年國教的數學史素材，以及進行實作。整個研究執执行程序包含文件分析與文本研讀、教案發展以及教案成效評量。本研究針對數學主題，蒐集、研讀與討論相關的數學史文獻，完成托勒密定理與和角公式、最大公因數、分數與十進位制小數等中小學數學史素材的開發及相關教案設計。從研究的過程及實作成果，發現所開發之中小學數學史教案獲得教師和學生的正面肯定，顯見數學史素材融入中小學數學教學之可行性。本研究希望能提供國內數學教育社群相關參考資訊，也可以充實數學史素材資料庫，以利各階段教師之用。

關鍵詞：數學文化、數學史、數學教學

通訊作者：蘇意雯，e-mail：yiwen@utapei.edu.tw
收稿：2021 年 1 月 25 日；
接受刊登：2021 年 4 月 9 日。

Su, Y. W. (2021).

Research on the development and implementation of lesson plans for the history of mathematics in primary and secondary schools.

Taiwan Journal of Mathematics Education, 8(1), 27-53.

doi: 10.6278/tjme.202104_8(1).002

Research on the Development and Implementation of Lesson Plans for the History of Mathematics in Primary and Secondary Schools

Yi-Wen Su

Department of Mathematics, University of Taipei

This study primarily represents a collaborative effort between researchers and in-service teachers in designing teaching activities and developing history of mathematics lesson plans for primary and secondary school students. At first, we studied and analyzed relevant literature documents for 12-year basic education to identify available and valuable materials. The development of lesson plans was followed by a validity check, on-site teaching, and result evaluation. The research aimed to collect, discuss, and investigate the related history of mathematics literature to develop materials and resources for teaching in primary and secondary schools the following topics: Ptolemy's theorem and trigonometric identities, the greatest common factor, fractions and decimals. The research process and results demonstrated that the developed history of mathematics materials had a positive effect on the students and also displayed the feasibility of integrating the history of mathematics into primary and secondary school mathematics teaching. We hope this study can provide valuable information to practitioners in mathematics education and enrich the database for the history of mathematics.

Keywords: mathematical culture, history of mathematics, mathematics teaching

Corresponding author : Yi-Wen Su , e-mail : yiwen@utapei.edu.tw

Received : 25 January 2021;

Accepted : 9 April 2021.

壹、前言

數學家 Richard Courant 在 Morris Kline《西方文化中的數學》(Mathematics in western culture)一書中提到，許多世紀以來，人們一直遵循數學是文化的組成部分之傳統，但在我們這個教育普及的時代，這一傳統卻被拋棄了。大量枯燥乏味、商業氣十足的教科書和無視智力訓練的教學風氣，在教育界掀起了一股反數學的浪潮。然而，我們深信公眾依然對數學有濃厚的興趣(Kline, 1953/1995)。日本數學史研究學者平山諦在《東西數學物語》中也說，不管東方還是西方，兩千年以來數學一直被人類所喜愛，誠然這不是為了考試，也不是為了單純的應用，而是因為人類有追求真理、提高教養的慾望所致，於是數學就成了文化的一個基準(平山諦, 1956/2005)。近年所提倡素養導向的教育，對於數學教師而言，如何在數學領域提升學生國民素養？給予學生機會嘗試感受數學的創造歷程，在教學中融入數學文化素材的方法，提升學生的學習興趣，豐富學生對數學的認識，感受數學在人類歷史上的貢獻，及其文化魅力和人文價值，正是一個可行的方式(李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏, 2013)。

教育部在之前國民中小學九年一貫課程綱要曾強調：「在教師教學裡，引進與主題相關的數學史題材，對學童的學習會有很正面的意義，尤其能協助學童將抽象觀念具體化。」(教育部, 2008)。至於現行的十二年國民基本教育數學領域課程綱要中也提及數學是一種人文素養(教育部, 2018, p. 1)：

人類各種族文明造就出不同的思維文化，例如，古代東方數學偏向具象方式的歸納推理，而西方則傾向抽象方式的演繹思考，數學史能夠幫助我們理解數學發展在不同時期與不同文化的差異，更能協助教師釐清數學學習的主軸。所以適時地在數學教學之中融入適當的數學史內容，可以提升數學教學品質與學生的學習成效。

可見，數學史素材在數學教學中正可以扮演正向的輔助角色。

但是就實際面而言，數學史相關素材搜尋不易，就算教師有心想要實施，第一個面臨的便是素材何處尋的問題(蘇意雯, 2011a)。Panasuk 與 Horton (2012) 針對 367 位中學數學教師所做的線上調查顯示，雖然大部分的教師都認同數學史在數學學習上的價值和地位，但是數學史相關資源的缺乏卻是他們沒有在課堂上運用數學史的主要原因之一。另一個同樣針對 38 位中學數學教師所做的研究顯示，大多數老師沒有在他們的課程中使用數學史，使用數學史的那些教師是在課堂開始時，藉由提及數學家的生平故事以及古代文明對數學的貢獻，引起學生的動機。另外該研究也發現，總體而言，教師只擁有較低層次的數學史知識，那些在課堂上沒有使用數學史的教師在數學史知識上的得分比在課堂上有使用數學史的教師為低(Bütüner, 2018)。

對照國內狀況，上文提過目前實施的十二年國教課綱強調「數學是一種人文素養，宜培養學生的文化美感」（教育部，2018）。針對 1992 年至 2017 年間的碩博士論文分析，有 143 篇涉及數學史與數學教育相關議題之學位論文（蔡文榮、張鈞淇、劉柏宏，2019）。有數學素養的人必應具備某種程度的數學文化內涵，透過數學文化融入教學，可以引領學生領略數學實境，進而欣賞數學與文化的關係（劉柏宏，2016）。對於強調素養取向的新課綱而言，鼓勵教師運用數學史融入數學教學正是一個值得關注的議題。

因此，本研究由師資培育者及在職教師共同規畫開發十二年國教的數學史素材，希望能方便現場教師擷取運用，也希望經由此一進路，讓學生在數學思維發展的脈絡鋪排中，更能清楚所學的數學主題，增進學習興趣和概念理解。目前國內已開發之數學史教案多為需要數節課實施（蘇意雯，2011b；蔡文榮等人，2019），而有心嘗試數學史融入數學教學的現場教師也容易由於教學時數的限制及教學進度的考量而裹足不前（蘇意雯，2011a）。有鑒於此，本研究團隊視單元需要，將搜尋到之素材串連成一節課的教案形式，所開發之數學史素材，包含了原始文本，也鋪排數學家生平事蹟介紹，包含學生之學習工作單，方便現場教師使用。此外目前數學史融入數學教學多為針對特定年級發展相關教案的研究（蔡文榮等人，2019），並沒有透過縱貫多個年齡層的教案研發來歸納共同點或是需要考量的面向，因此，本研究配合十二年國民基本教育數學課綱內容，發展出高中、國中及國小各階段的數學史教案，並透過實地教學、觀察、與分析，檢測數學史教案之成效。本研究之主要目的為：開發配合十二年國教數學課綱內容之數學史教案，並檢驗所開發出的數學史教案之成效。與之對應之研究問題如下：

- 一、如何開發配合十二年國教數學課綱內容之數學史教案？
- 二、所開發出的中小學數學史教案之成效為何？

貳、文獻探討

一、數學文化探討

在西方文明中，數學一直是主要的文化力量，數學在使人賞心悅目和提供審美價值方面，可與任何一種文化媲美（Kline, 1953/1995）。數學文化不是數學與文化，而是一種由數學物件的形式建構而成的特殊文化，是人類文化系統中的一個子系統；是人類文化中一個有機組成部分，與其他各種成分密切相關，並在相互影響中共同發展（童莉，2006）。數學文化是人類探索數學知識時其行為的外顯和內隱模式，並藉由人類群體，特別是數學家社群，所創造獨特成就的符碼（符號、圖形或文字）來傳遞。數學文化可說是人類探索數學知識的各種外顯和內隱行為的模式，而數學知識就是藉由數學家社群所創造的獨特符碼，它可能以符號、圖形或文字的形式來傳遞（劉柏宏，2016）。也就是說，數學以數學家和數學知識為中心去發展，其邊界與民族、

社會、歷史、文化相互作用、時時滲透，文化在歷史上發揮了一定的重要作用（李國偉，2013）。de Lange（2003）認為從歷史、哲學和社會觀點欣賞數學是當務之急，Niss 與 Højgaard（2011）也認為不能只把數學當做一個理論學科看待，也應該重視與其他領域的連結，特別是和文化與社會的連結，尤其是數學史和統計史。從歷史角度來看，數學最初只是人類文化的一部分，但之後隨著數學本身和人類文明的進步，數學逐漸表現出相對的獨立性（張維忠，2011），數學的歷史面向正是我們所不可忽視的。

部分數學知識因應社會所需而社會化，而社會問題數學化的成果也反饋到數學本身。數學依社會進步而發展，社會因數學發展而進步（方延明，2007）。赫希（R. Hersh）有一段關於數學知識風貌的比喻，他形容數學就像一個出色的餐廳，在前面的用餐區，顧客們享用著乾淨且精心烹製的數學菜餚。可是在火熱的廚房中，數學家卻在看起來雜亂無章的環境中，烹調著他們的「新知識」（引自 Hellman, 2006/2009）。過程是掌握知識本質一個不可或缺的環節（洪萬生，2009），在社會文化的脈絡下，社會團體及社會氛圍正會影響數學的發展以及數學家之間的互動，數學家所處的學術環境會影響數學家之研究，數學知識的發生也與當代社會之進展有著交互關係。介紹數學的社會面向，正有助於學生體認數學知識與社會之關聯（蘇意雯，2015）。

數學知識經常被視為超越種族地域的真理，但客觀事實也說明，數學知識的發展仍具有民族的歧異性。近年興起的民族數學（ethnomathematics）研究可看成是一種關於數學的人類文化學（張維忠、唐恒鈞，2008）。什麼是民族數學呢？根據 Borba（1990）的說法，所謂的民族數學就是特定文化族群所表現出來的獨特數學概念。值得注意的是，在這裡的「ethno」和「mathematics」應該用更宏觀的角度來考量。也就是說，「ethno」不再如過去般僅僅代表生物性的「種族」，而是意指「文化族群」。此外，舉凡做算術、歸類、排序、遞推、統計等等一系列的活動都可稱為「mathematics」。在不同的時代、不同的地點，人們由於生活的需要，或者為了對周遭的現象尋求解釋，會隨著各自的文化環境，發展出一套解決問題的工具、技術和理論，民族數學是不同文化背景所體現的數學概念，不同民族的文化遺產都值得珍視，也是後代子孫的寶藏（蘇意雯，1994）。因此，讓學生了解數學的民族面向，也是不可或缺的一環。

美國歷年來的數學課程指引一向重視數學知識的人文面向。例如美國數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]）早在 1989 年就指出，要瞭解數學的價值就必須讓學生認知到數學與歷史情境間之互動，與此兩者互動結果對我們文化與生命的影響（NCTM, 1989）。2000 年則再次強調在此快速更替的世界中，數學是人類最偉大的文化和智識成就之一，公民應發展對此成就的珍視和理解，包括其美感甚至娛樂面向（NCTM, 2000）。透過數學文化融入教學，正可以引領學生領略數學實境，進而欣賞數學與文化的關係（劉柏宏，2016）。

至於為何在數學教學現場，需要布置數學史素材呢？Heiede（1992）認為教數學還必須教數

學史，因為一個學科的歷史也是該學科的一部份，就像是如果沒有意識到即使是對數也有自己的發展軌跡，你也像沒有學過對數一樣。這樣的認知對於小學和國中階段的教師更為重要，因為孩子們對數學所形塑的第一個印象往往也是非常持久的。對於國小師資培育過程中的分數主題教學，Park、Güçler 與 McCrory (2013) 雖然不強調分數的歷史發展應該是課程的一部份，但是認為一個很重要的面向就是，讓師資生從中了解到即使是對過去的數學家或是目前的學生而言，「視分數為一個數」都不是一件顯而易見的事，讓這些未來的國小教師能有足夠的機會充實他們自身的學科內容知識，也更能理解將來任教的學生對於分數的思考。Mann (2011) 發現英國數學史社群的多樣性面貌，也影響了數學史學科本身的發展，例如在大學教學上，由於質量保證機構 (Quality Assurance Agency [QAA]) 關注於發展溝通以及批判性思考等畢業技能，也鼓勵了對於數學系學生教授數學史模組。同樣的，也有許多熱情的學校數學教師被歷史所吸引，並使用歷史資料來激勵他們的學生。資格和課程發展機構 (Qualifications and Curriculum Development Agency [QCDA]) 最近也將「歷史和文化脈絡」納入學校數學課程，這也顯示了數學史是有價值的教育工具 (Mann, 2011)。事實上，早前 Fasanelli (2000) 分析中國、希臘、義大利、荷蘭、波蘭、澳洲、巴西、丹麥、法國、紐西蘭、挪威等等國家的課程綱領，就發現數學史可以在情意、認知、文化活動相關部分的啟發上佔有一席之地。下一節，我們將探討如何將數學史融入數學教學。

二、數學史與數學教學

承上所述，我們得知數學史素材的引用，可以涵蓋情意、認知及文化活動等面向。對教師而言，適當的史料剪裁及文本的提供，正可以當作教學上的範例，幫助學生對於數學重要概念的體會和啟發，於數學教學時適當引入 (洪萬生, 2002; 蘇意雯, 2011a, 2011b, 2018; 蘇意雯、黃俊瑋、陳靜惠、林明怡, 2014)，開發數學史教案，讓學生知曉數學之歷史脈絡，領略數學文化面向，將素材與更多社群同儕分享，正是研究者執行本研究之目的。

本研究所開發的數學史教案，主要關注於數學思維發展的歷史脈絡以及各民族文化的數學知識產物。教師在課堂中，可以就多元面向，向學生分享數學文化的關懷，以下研究者將分別加以敘述並舉實例詳細說明。

教師可在講課中穿插介紹數學家的生平事蹟以及奮鬥過程，例如祖沖之父子竭盡心力割圓，終於提出圓周率近似值，領先世界的傑出成就，讓學生興起向大師學習的壯志，以及「有為者亦若是」的豪情。另外也可以讓學生經由認識各民族所呈現之各具特色的數學發展，進而珍視數學的文化性 (洪萬生, 1998、2002; 蕭文強, 1992; Tzanakis & Arcavi, 2000)。例如介紹日本數學家如何藉由繪馬傳統，衍伸出算額，從而促進日本本土數學的發展，形成日本數學的獨特樣貌，讓學生明白地域的不同，會孕育出不一樣的數學風情 (蘇意雯, 2007, 2011b)。

教師也可以對數學符號或是數學概念的源起，加以整理，適度介紹，幫助學生知曉數學知識與人類活動之關聯。也就是透過對數學文化遺產的緬懷、追溯、獵奇與探索，讓學生得以認識古算家的數學思維與發展軌跡，進而領會文化交融的啟發與創意。例如從歷史源流看虛數思想發展的過程，由 Cardano (1501-1576) 到 Bombelli (1526-1572) 解三次方程式時第一次不得不正視複數，到 19 世紀數學上接納這些數，經過相當長一段時間的發展，數學家花了幾世紀才解決了這個問題。此外，在強調跨領域的現代，教師也可以從數學史中搜尋能與其他領域連結之素材，讓數學的學習更為豐富。例如安排數學詩題材，進行數學與文學之結合，從古代數學詩解題到現代數學詩賞析，並讓學生嘗試數學詩創作，此教案正可以和國文領域連結，達到跨領域的學習目標。

對於數學知識內容的闡釋，教師可以妥善運用古文本上的問題，作為啟蒙例之用，讓學生古今觀照，比較現行策略和原始文獻之異同。也就是說我們可以在數學發展史中，找出與教科書的單元有關之適當的歷史素材，使學生有所參照。例如在高中階段雖然用三角形面積公式和餘弦定理可以導出海龍公式，但是教師也可以補充被譽為初等幾何中最高明的數學證明之一的海龍公式原始證法，或是中國秦九韶等價於海龍公式的三斜求積術。此外還可以藉由文本讓學生比較各種不同的解題方法或思考方向，解放對數學的單一思考方式。例如提供畢氏定理的多種證法，從希臘歐幾里得的《幾何原本》中利用全等三角形的想法，到中國趙爽直接由面積看出關係的弦圖等等。事實上，恰當運用古代文本，也能造成學生的認知衝突，進而釐清學生的觀念，例如在機率教學時，提供賭金分配問題，藉由數學家佩西歐里 (Luca Pacioli, 1445-1517)、卡爾連奇 (Filippo Calandri, 1467-1512)、費馬 (Pierre de Fermat, 1601-1665)、巴斯卡 (Blaise Pascal, 1623-1662) 的不同想法，提供學生討論及探索的機會 (洪萬生, 1998, 2002; 蕭文強, 1992; 蘇意雯, 2007, 2011b; 蘇意雯等人, 2014; Tzanakis & Arcavi, 2000)。

荷蘭數學家也是數學教育大師 Freudenthal (1973) 認為數學是人類的活動，數學必須與現實連結、接近孩童的經驗、與社會相關。Gravemeijer (1989) 提出引導式再發明、教學現象學以及必要的建模三個啟發式的教學設計。再發明原則首先建議教學設計者關注數學史以明瞭在時間長河中，確切的數學實作發展，也建議必須探究從學生非形式化的解釋以及解法是否可能預期更多的形式化數學實作，如果答案是肯定的，那麼學生初始的非形式化推理就可以當成再發明過程的起點。利用歷史資源，教師也能有效提供、支持不同狀況的學生學習 (Michalowicz, Daniel, FitzSimons, Ponza & Troy, 2000)。事實上，數學不同部分的諸多連結確實存在，關注歷史是察覺這些連結的一種方法，對於我們以及學生而言，知道一個概念的歷史，可以導向更深層的理解，且經由學生的積極參與，可以提升他們的數學成就感 (Berlinghoff & Gouvêa, 2004/2008)，數學史之重要性可見一斑。

對於數學史融入數學教學的方式，除了以說故事口語講述方式實施、以學習工作單方式實施、以數學史動畫或影片輔以學習工作單方式實施（蘇意雯，2011b；蔡文榮等人，2019），數學史料還能結合現代科技，以電子繪本的形式賦與學生更新的感受及多樣化的選擇（蘇意雯，2020），不過在數學課堂上，教師口述數學史以及學習工作單輔助和課程結合，是較為常用的方式。

如前文所述，目前實施的十二年國教數學課綱提到「數學史能夠幫助我們理解數學發展在不同文化的差異」、「教科用書之編寫可適當編入數學史、民族數學及數學家介紹，以引發學生興趣、培養其欣賞數學發展的素養，並了解不同性別者的成就與貢獻。」（教育部，2018），可見數學史在國內數學教學上所受到的關注。事實上，國際數學教育學界早在 1970 年代起，就開始注意在數學教學上輔以歷史取向。數學史與數學教學的關聯之國際研究群（International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics）也因此應運而生。此研究群關切數學史與數學教學之關聯，致力於數學史學對數學教育的應用，目的是利用數學史的研究成果，以及數學史與數學教育的互動，進而提升數學教師的教學品質與學生的學習成效（洪萬生，1998）。研究者身為此研究群諮詢委員會之成員，也嘗試發展臺灣本土中小學數學史教案，期能與國際學界交流分享。

參、研究設計

一、研究方法

本研究為質性研究，研究團隊共同討論搜尋適用於十二年國教數學課程的數學史素材，編製成教案，進而實施於教學現場，並觀察學生的反應。針對數學史教案的開發及實作，主要是依循研究者從詮釋學的理念出發，沿用由 Jahnke 的「雙圈」(twofold circle)之概念（Jahnke, 1994），考慮文本、脈絡和讀者的關係，以及 Horng（2006）的詮釋學（循環）四面體所發展出來的 HPM（History and Pedagogy of Mathematics）實作之模型（如圖 1 所示）（蘇意雯，2004，2007，2011b；Su, 2006）。在此模型中上方的 T 代表教師教學；左圓中 E 代表教科書編者；S 代表課程標準；K 代表數學知識；C 代表教科書內容；M 是古代數學家；右圓中 O 是數學物元；T 是數學理論；I 則是體會各循環之後的自我詮釋。由 E、S/K 和 C 這三者的循環組成了 C₁ 的圓，M、O 及 T 三者的循環則組成了 C₂ 的圓。研究團隊經過 C₁ 循環，詮釋了解教學內容和目標之後，再到 C₂ 尋找史料，詮釋所蒐集到的數學史素材是否符合 C₁ 的內涵，若覺得在史料上有所欠缺，必須再回到 C₂ 搜尋，再經過自我詮釋後編製成教案，實施於教學。

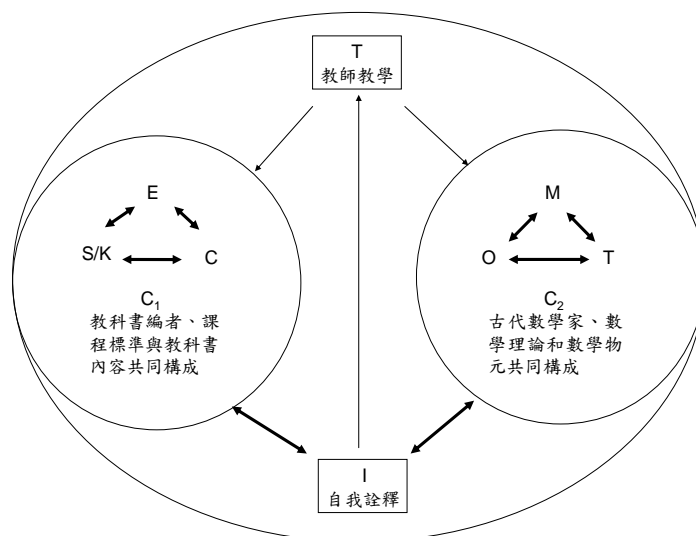


圖 1 HPM 實作之模型。引自「運用古文本於數學教學—以開方法為例」，蘇意雯，2007，台灣數學教師(電子)期刊，9，65。

本研究開發適於十二年國教數學課程之數學史教案實施於教學，進而明瞭學生之學習成效。參與研發及教學實驗教師共 8 人，教學實驗對象及人數分別為國小學生 46 人、國中學生 160 人以及高中學生 166 人。教學實驗之研究工具為學習工作單以及課程實施學生學習意見表和教師的回饋意見表。本研究資料收集方式，主要以「觀察」、「文本收集」、「問卷」等方式取得，藉由資料來源與蒐集方法的多元性，探究數學史教案融入數學教學之成效，提高研究資料的可信度。由「觀察」所收集到的資料，是指教學現場之觀察記錄，「文本收集」包含學生的學習單，以及參與教師的實作心得。「問卷」指的是學生和教師的回饋意見表，從這些資料中，我們可以更清楚得知所開發出數學史教案之適切性。

二、研究步驟

本研究為中小學數學史教案開發以及教學實踐，研究者依照上述 HPM 實作之模型發展中小學數學史教案，並加以實踐。Fink (2003, 2005) 提出在課程規劃之前，必須考慮三大情境因素，那就是學習目標：「我想要讓學生學習什麼？」、教學和學習活動設計：「為了達成學習目標師生應該如何做？」，以及回饋及評量：「師生如何知道達成了學習目標？」。這三大要素應形成一個設計迴圈，彼此支持及增強。本研究的目標是分析數學史相關文本，從中擷取資源，開發中小學數學史教案，並進行教學，讓學生經由數學文化面向，學習到相關之數學知識內容，藉由學習工作單以及問卷等研究工具加以評鑑。研究者參考密西根大學教學研究中心 (Center for Research on Teaching and Learning) 所揭示的準則 (http://www.crlt.umich.edu/gsis/p2_5)，教案設計遵照 1. 列出學習目標、2. 準備開場白、3. 規劃學習活動、4. 測試學生的理解程度、5. 準備

結語與預告以及 6. 設定進程時間表等六個步驟進行。本研究開發適合中小學使用之數學史教案，為方便教師教學使用，每個教案設定教學時間為一節課。

在教師教學階段，也就是研究團隊將所編製之中小學數學史教案經過專家諮詢及修改後，研究者延請現場教師於中小學數學課堂，進行教學。針對教學實驗的結果，提供研究者對於主題選擇、順序邏輯性、素材呈現方式、估計時間、學生反應等方面加以反思及改進，使下一次再度進行的 HPM 實作能更為完整成熟。

肆、研究結果與討論

本研究開發了高中階段的「托勒密定理與和角公式」教案、國中階段的「最大公因數」教案、國小階段的「分數與十進位制小數」教案，皆依照 HPM 實作之模型進行。以「托勒密定理與和角公式」教案的開發為例，一般教師教學都聚焦在 C_1 循環，在單元擷取的過程，研究團隊認為三角學及其相關公式的主題，往往是學生學習困難的單元，學生們對於許多三角公式的了解和使用都有障礙，此時正是數學史融入數學教學的適當時機。在數學的發展歷程中，希臘天文學家及數學家托勒密（Claudius Ptolemy）用數學捕捉星空的規律，其所發想的托勒密定理可以說是三角學的結晶（蔡聰明，2003），因此研究者與研究團隊進行文本分析，進入 C_2 循環尋找相關史料，針對「托勒密定理與和角公式」教案，研究團隊首先藉由數學普及讀物《數學拾貝》（蔡聰明，2003）中的相關章節，對托勒密定理脈絡有一個通盤概略的了解，接著直接搜尋數學史文本，藉由網路資料（http://www.univie.ac.at/hwastro/rare/1515_ptolemae.htm），查閱托勒密 *Almagest*（1515 年版）著作，做更細緻的布置鋪排。在自我詮釋階段，研究團隊考量十二年國教數學課綱以及相關數學史料，思索如何將數學史料轉化為教學素材，編製成教案後再進行於教學。關於詳細教案內容及實施情況，研究者將於以下篇幅分別加以闡述。

一、「托勒密定理與和角公式」教案實施分析

三角學的發展源於人類的需求，現今高中階段所討論三角比的許多性質和公式，其實遠在希臘時期就被發現並且使用。「托勒密定理與和角公式」教案的設計理念就是想回歸到三角學發展的歷史脈絡，讓學生理解三角學的發展來自人類對於量天測地的需求，希望透過有脈絡意識的問題設計，讓學生體會三角學的幾何面向。

研究團隊成員蒐集、研讀與討論相關的數學史文獻，希望透過學習工作單的設計和引導，讓學生了解本單元。本份「托勒密定理與和角公式」教案的主要目標在於托勒密定理的性質與證明，以及利用托勒密定理證明和角公式。在發展階段中，本教案在介紹和角公式的主題上，就以托勒密的天文學為背景，闡述在編製弦表的需求下，自然而然會需要和角公式。接著教師提問托勒密究竟如何解決這個問題，推導出和角公式？引動學生的好奇心，順勢介紹托勒密定

理，再延伸出和角公式事實上就是托勒密定理的應用。

此份學習工作單共設計六個問題。首先描述歷史脈絡，希臘的天文學家托勒密（西元前 110 年到 170 年），在西元 150 年左右出版十三冊的數學文集，蒐集當時已知的數學與天文學知識，成功地描述行星運動現象，鞏固了地心說。後來，這套書傳到阿拉伯，被阿拉伯人稱為《天文學大成》（*Almagest, The Great Treatise*），又再傳回歐洲，直到文藝復興初期，托勒密的地心說都是天文學的典範。當時的希臘人已經體認到，不管是天文學「測星」或幾何學「測地」都需要知道各種圓心角所對應的弦長。問題一到問題三，是讓學生了解圓的弦長和圓心角、圓周角的彼此對應關係，強化他們所學的三角函數定義和正弦定理的幾何意義，進而在弦表編製的目的下，知道和角公式的必要性。

問題四則是托勒密定理的介紹，這個定理所需的知識是國中所學習的歐氏幾何，設計成閱讀填空的形式，引導學生一步步完成填答，就能理解托勒密定理的證明。問題五和問題六就是利用托勒密定理推導出和角 $\sin(\alpha + \beta)$ 、 $\cos(\alpha + \beta)$ ，以及差角 $\sin(\alpha - \beta)$ 、 $\cos(\alpha - \beta)$ ，學習工作單詳細內容請參閱附錄。

在課堂實施情形上，研究團隊依照班級學生特性，以兩種方式施行。第一種是問題一到問題三，以課堂發問，學生回答，由於這些問題和前面單元相關，學生很快就回答出正確答案。問題四關於托勒密定理的證明，由於設計成閱讀問題，學生只要能順著文章引導下來，都能了解托勒密定理的內容和證明，因此本題是讓學生分組討論，再請學生上臺說明答案和解釋原因。問題五由老師進行講解，帶領學生完成各小題的回答。問題六再由學生分組討論，並上台說明答案和解釋原因。同時，教師在課堂全程使用電腦輔助圖形的呈現，讓學生能直接看到教師或同學講解所指涉的圖形，能順利溝通，並且於過程中不需重新畫圖，節省時間，將本教學活動控制於一節課完成。由於此六個問題都是有正確答案的選擇或填充題，教師在課後收回進行批閱，由學生作答的狀況來看，都充份理解整個學習單的問題。學生也在之後的學習意見表寫下「比起純粹背下公式，這樣的學習方式似乎更加有趣，也讓人有較深印象。」、「第一次知道可以用別的定理證和角公式，引發我們思考。」、「比課本寫得更容易理解。」等回饋。

第二種教學方式是由於教師認為班級學生特性缺乏共同討論的氛圍，沒有採用較花時間的分組討論方式，而是以個人自主學習以及回答問題的方式進行。在進入和角與差角公式單元的第一節課，教師以此份學習工作單代替課本教材進行教學與學習。於上課時，教師先說明學習工作單的學習目的及脈絡，接著以加分為誘因，每一個問題先讓學生自行閱讀與思考作答，接著每個小題再讓全班學生進行搶答；配合平板教學，在每個問題的圖形之中填入答案，並在每個問題回答完畢之後歸納此問題的目標與結論。

在實施的過程中，由於問題難度不高，又有加分的誘因，因此學生回答頗為踴躍，能自己

思考出問題的答案並進行回答，順利達成教學目標。藉由學習工作單的設計，讓學生練習在圖形中以正弦與餘弦表示邊長，實驗教師認為這一點恰好是該校學生在傳統教學普遍不易學習的地方。此外這份學習工作單利用幾何的方式讓學生學習和角公式與差角公式的證明，在教學過程中，教師觀察到學生的參與度比往年要來得高，課後的反應回饋也都認為比較曉得三角函數的作用，大都有正面的回饋。不過教師也反思以這樣的方式進行，完成整份學習工作單需要花費比一節課還要多一點的時間，如果教學進度趕不上的話，會覺得時間不夠，但在下一年度的課程中，實驗教師就以一節課的時間完成本份學習工作單的教學。

此份教案將和角公式放在托勒密編製弦表的脈絡下，進而引出學習和角公式的必要性，以及希臘數學家如何推導出和角公式。對於這樣的學習安排，學生普遍能夠接受，也認為能提昇他們學習和角公式的意願，例如「**我覺得這個課程很有趣，也幫助我更加了解和角公式。許多人都認為公式要死背，但透過此課程，可以發現公式應是用推論並慢慢思考理解，而不是靠硬記。**」。針對此份學習工作單對和角公式課程的學習效果部分，學生大多給予正面的肯定，由學生實地填寫的回饋也可發現，以這樣的方式進行和角與差角公式的課程內容，學生比較能由幾何意義中體會公式的由來、公式的涵義與公式的學習目的，可以強化此單元的學習動機。實驗教師也認為就進行期間同學的反應來看，由於問題難度不高，同學皆能自己思考出問題的答案並進行回答，可順利達成教學目標。本份教案於台北市兩所高中實施，經過 166 位高二學生的教學實驗及回饋問卷，有 83.7% 的學生認為此課程能幫助他們了解和角公式的原理，由於學習工作單讓學生必須藉由閱讀，實際參與推導過程理解公式，也有 75.9% 的學生認為此課程能提升他們思考與分析的能力 (Su, Su, & Su, 2018)。

參與教學實驗的教師也表示，現行教材在三角學的「和差角公式」單元的課程設計，通常都是以代數的操作為主，如果依課本內容進行教學，學生很容易失去興趣，認為只要把公式背起來即可，而不管和角差角公式還有什麼意涵，同時在學習的動機方面也需要靠教師個人補充。藉由這份學習單，可以讓學生回到三角函數之所以誕生的脈絡（圓內接三角形與四邊形），利用這樣的幾何圖形讓學生實地「看到」正弦與餘弦對應的線段，以及從圖形中理解在和角公式與差角公式中正弦與餘弦的關係。同時教案引用的托勒密定理以及問題設計的難度，並不會造成學生的學習負擔，可以在實施過程中輕易地達成本單元的教學目標，學生也有另一種學習體驗。另一位教師也觀察到實施這份學習工作單時，因為跟以往的學習經驗不同，感覺學生比較有參與感，能融入在教學活動中，有些學生可以明顯發現認真在思考學習。不過教師也認為如果有更充分的時間學生會學習得更完整，因為進度壓力，無法挪出太多時間有點可惜。

二、「最大公因數」教案實施分析

本研究團隊成員針對國中數學主題，蒐集、研讀與討論相關的數學史文獻，藉由《九章算

術及其劉徽注研究》(李繼閔, 1998) 的參考以及《九章算術》原典的資料剪裁, 完成「最大公因數」國中數學史素材的開發及相關教案設計。在國中一年級的數學教科書中, 編入了利用標準分解式和短除法兩種方法求出給定兩數的最大公因數。「最大公因數」教案主要是介紹第三種求最大公因數的方法, 也就是中國算書《九章算術》中的「更相減損法」。

「最大公因數」教案的教學目標是(一)介紹《九章算術》中的「更相減損法」, 一種求最大公因數的做法。(二)讓學生能認識《九章算術》, 並透過「更相減損法」的例子, 讓學生對於最大公因數的性質有更多的認識。

關於學習工作單的布置, 問題一首先讓學生利用標準分解式和短除法求 18 與 10 的最大公因數, 接著進行下面活動:

- (1) 準備一張長 18 公分, 寬 10 公分的長方形紙片, 將短的一邊對摺到長邊, 使得邊緣對齊, 摺出一個最大的正方形。
- (2) 將多餘的長方形紙片用剪刀剪下(或用尺撕下)。
- (3) 對剪下(或撕下)的長方形紙片重覆步驟(2), 直到剩下的紙片為正方形為止。

然後教師讓學生思考此活動所獲得的結果與問題一的關聯。

接著教師介紹中國古算書《九章算術》, 本書成書大約在西漢末年, 內容分成方田、粟米、衰分、少廣、商功、均輸、盈不足, 方程、勾股等九章, 共 246 個問題。由於《九章算術》是許多中國古代數學問題的源頭, 吸引許多數學家深入研究, 並且以術文統率應用問題的體例成為後來數學著作的典範, 這使得《九章算術》深刻影響後來中國數學的發展(李繼閔, 1998)。《九章算術》一書中曾介紹求最大公因數的方法, 安排於學習工作單之問題三。

為了讓學生評鑑文本內容, 學習工作單接著詢問學生是否贊成劉徽的說法, 並請他們說理由。問題四是讓學生分別利用標準分解式、短除法及更相減損法三種不同的方法, 求 $(180, 126) = ?$ 接著請學生比較這三種方法, 挑出最喜歡的一種作法, 並說明理由。

本教案於國中實作, 實驗教師對於「教案說明是否清楚?」以及「教案是否易於教學實施?」等問題, 都表示「很同意」之評價。至於「教案是否符合教學目標?」、「教案是否幫助學生理解教材單元中的教學概念?」、「學習工作單問題陳述是否清晰易懂?」、「是否能經學習工作單達成教案設計教學目標?」, 以及「學習工作單是否幫助學生了解數學的歷史文化面向?」等問題, 實驗教師也都給予「同意」的回應。

此外, 針對課堂實作, 實驗教師也給了一些心得及建議。關於問題二, 實驗教師觀察班上有將近一半的學生, 是先填完所有空格才開始動手操作, 先動手操作的學生, 後來也幾乎都是直接就學習單上所給的圖形來填答。實驗教師認為「似乎對學生而言, 這樣的『具體操作』沒有絕對的必要性?」, 也因此, 實驗教師建議改為直接在學習單上給學生空白圖形, 然後讓學生進

行如下操作（操作活動請參見圖 2）：

- （1）這是一個長 18 單位、寬 10 單位的長方形，請在這個長方形中，畫出一個最大的正方形（塗上第一種顏色）。
- （2）繼續在剩下空白的長方形中，再畫出一個最大的正方形（塗上第二種顏色）。
- （3）重複（2）的步驟，直到剩下空白的部分是正方形為止。

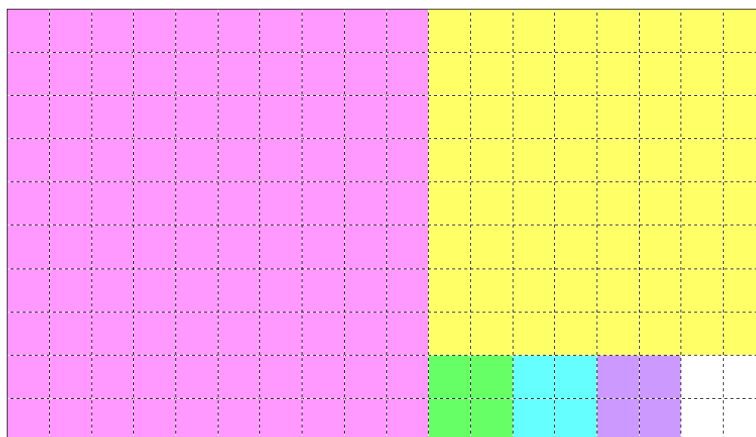


圖 2 問題二活動示意圖

實驗教師認為這樣的操作讓國中生可以透過「圖象」來觀察與思考，教師在教學使用上也會比較方便，即使不著色也可用不同斜線等區別。不過關於本題，在事後的回饋表中，也有些學生寫到「最有趣的是可以動手摺紙」、認為「還挺好玩的」、「會讓我印象比較深刻」。

在討論問題一與問題二間的關係時，實驗教師帶領學生用以下的表格（圖 3）去做紀錄、觀察：

著色的正方形		剩下空白的長方形（請寫出算式）	
顏色	邊長	較長邊長	較短邊長
紅	10	10	$18-10=8$
黃	8	8	$10-8=2$
綠	2	$8-2=6$	2
藍	2	$6-2=4$	2
紫	2	$4-2=2$	2

圖 3 問題二填寫表格（灰底部分是實驗教師建議之後改版可加入之部分）

透過這樣的表格化的整理，學生更能夠看出彼此間的關係。原始版本中多數學生都可看出最小正方形的邊長就是 10 和 18 的最大公因數，討論中更有學生發現表格中所有的數字都是最大公

因數的倍數，這讓學生在問題三看到劉徽說明的原因時，能夠有更好的理解。

有關問題三的提問：回顧問題二，你贊成劉徽的說法嗎？請說出你的理由。很多學生都只寫了贊成，然後就不知道該如何下筆。經實驗教師詢問，學生大多數回答說：「劉徽說的就是對的呀！」、「他說的就是理由，所以不知道還要寫什麼？」。因此實驗教師繼續引導學生：「那為什麼還要一直輾轉相減呢？」、「相減的結果，跟原來的數、最大公因數有什麼關係？」、「這對我們想找出兩數的最大公因數有什麼幫助？」，學生才逐漸能夠理解這題到底要他們觀察什麼，在小組討論的過程中，學生慢慢可以找到一些線索，在師生的對話中，逐步確認自己的想法，這樣的過程雖然需要花比較多的時間，但實驗教師覺得這個過程是非常好的。

在介紹問題三的史料時，實驗教師後來選擇把完整的資料都呈現給學生：

更相減損術記載見於《九章算術》方田章約分術，可以求出一個分數的分子、分母的最大公因

數，其步驟如下：

約分術曰：可半者半之；不可半者，副置分母、子之數，以少減多，更相減損，求其等也。

以等數約之。

主要原因是實驗教師認為學生會覺得很疑惑「為什麼明明算的是最大公因數，可是卻不是用『除法』，而是用『減法』來算，古人『怎麼想到的』？」，也因此實驗教師決定把整個史料完整的呈現，可以讓學生更了解發展的脈絡，對於古文的部份，教師也用白話文加以解釋，幫助學生理解。

除了教案和學習工作單外，本研究還分別設計了教師及學生的意見表，在事後的回饋表中顯示數學史的引入，獲得學生的認同。很多學生都特別提到這個部分，覺得「故事內容很有趣」、「原來數學背後也有一個有趣的故事」、「我覺得故事加強了我的記憶」、「歷史上的數學引起我的興趣」、「從背公式變成推導公式、我更知道在做什麼了」、「希望以後可以有更多跟這次學習單一樣，聽歷史、學數學」。

問題四是求 180 和 126 的最大公因數，幾乎所有的學生用三種方式做完以後，都覺得短除法是最簡單的，因為最大公因數 $18 = 2 \times 3^2$ ，學生在做短除法時完全沒有困難。反而是更相減損法的過程，很多學生都覺得算式太多了很麻煩，而且有的學生不小心還會減錯，結果算不出正確的答案。也因此實驗教師又故意設計了一題，讓學生求 493 和 667 的最大公因數，這時學生很難直接找到兩個數的公因數，才感覺到使用更相減損法的需要。之後實驗教師也再讓學生去討論什麼時候、用什麼方法相對會比較方便，希望他們可以了解到問題有時候並不是只會有一種解法，學會愈多的方法、想法愈靈活，解決問題的方法就會更多元、更有彈性。在事後的回饋表中，也有學生寫到「雖然沒有很快、但有時候很有用」、「可以了解不同的計算方法很好」。

「我覺得很有效率、只是要學很久」、「這讓我以後遇到這種類型可以判斷得快一點」。

實驗教師以一節課的時間完成本份教案，從教學過程觀察，整體而言，學生對這份學習工作單多給予正向的回應（Su, 2019）。實驗教師也肯定本份教案的成效，並提出建議。研究團隊也從實驗教師的教學回饋中，再加以修改所開發之教案及學習工作單，使能更符合學生需求，讓所開發之數學史素材，更能適用於國中數學教學。

三、「分數與十進位制小數」教案實施分析

研究團隊藉由參考數學普及讀物《溫柔數學史》（Berlinghoff & Gouvêa, 2004/2008）以及進一步延伸的 *A History of Mathematics—an Introduction*（Kate, 1993）等書，完成分數與十進位制小數教案。本份教案適用對象為國小三年級，隨著小數位數的增加也可適用於四年級。教學目標是著眼於以數學史上的素材，從學生已有的分數概念著手，尤其分母為 10 的幕次的分數，將分數以分母這個單位的次數重新解讀，配合整數十進制中的位值表示法，將分母為 10 幕次的分數表示為小數。這份學習工作單為小數概念的引入，研究團隊建議在小數單元一開始使用，本教案以二位小數為例，此為考量有二位小數時較容易說明概念，教師可於三年級或四年級實施。與此相關之學習內容為「N-3-10 一位小數：認識小數與小數點。結合點數、位值表徵、位值表。位值單位「十分位」。位值單位換算。比較、加減（含直式計算）與解題。」以及「N-4-7 二位小數：位值單位「百分位」。位值單位換算。比較、計算與解題。用直式計算二位小數的加、減與整數倍。」。學習工作單首先從埃及的單位分數引入，讓學生從單位分數的想法來思考分數，接著再介紹一千多年前（中世紀）的歐洲將分數中的分子稱為「計算者」，代表計算個數；分母稱為「命名者」，代表什麼樣的大小單位。

之後學習工作單再繼續介紹荷蘭數學家史提文（Simon Stevin, 1548-1620）於 1585 年出版的《十分位》這本書引用小數的表示方法，利用十進位的概念以及一般的阿拉伯數字表示分數，以單位 1 後面的①表示小數點，小數點後面數字中的①等表示單位 1 後面的第一部分也就是 $\frac{1}{10}$

（我們現在稱為十分位），②表 1 後面的第二部分也就是 $\frac{1}{100}$ （現在稱為百分位），然後解釋像 32①5①7②就是 $32 \frac{5}{10} \frac{7}{100}$ ，即 $32 \frac{57}{100}$ ，史提文認為將分數表示成小數之後，就可以讓整數算

術的簡單算法應用到分數的計算上。我們現在簡化了史提文的符號，用「.」表示小數點，並省略小數點後面的①、②...，譬如 32①5①7②以現在的表示法寫成 32.57。介紹完歷史脈絡後，再讓學生依照史提文的表示法，將 21①4①6②分別以分數和小數表示，再將

$125 \frac{37}{100} = 100 + 20 + 5 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100}$ 以現在的表示法表示成小數。

針對分數與十進位制小數單元，29 位四年級學生有 31%認為故事很有趣，34%認為能提升

學習數學的興趣，有 62% 的學生認為更能了解此單元內容。同一單元針對另一班 17 位四年級學生，卻有 82% 學生認為故事有趣。針對實施情況，實驗教師認為在本節課一開始時，學生對單位分數極有興趣，尤其是古埃及人對單位分數的表示法。學生能說出他們認為何者表徵代表百、十、一，另外關於分子橢圓形畫法有大有小，就有學生的解釋為分母數字愈大，圓形就愈大。至於在歐洲將分子稱為「計算者」及分母稱為「命名者」方面，學生較無反應。可能因為已經學過十分位與百分位，對於西元 1500 年前的說法反而覺得比較複雜不實用。

針對本小節最後小題所安排的「若想將 $125\frac{37}{100} = 100 \times 1 + 10 \times 2 + 1 \times 5 + \frac{1}{10} \times 3 + \frac{1}{100} \times 7$ 省略代表位值的 100、10、1、 $\frac{1}{10}$ 、 $\frac{1}{100}$ ，可表示成_____」此問題學生較為無感，並且多數學生不懂題目的意思及要求。學習工作單最後，在進行荷蘭數學家史提文《十分位》這本書引用小數的表示方法時，實驗教師認為學生覺得有趣也發現現在小數點的便利性。

教學實作後，實驗教師認為：「從古埃及對單位分數的引入時，個人覺得十分有趣，像是開了眼界的學習。加以圖像對學生而言具有吸引力，學生自己去發現古埃及在分數上何種表徵代表百、十、一的興趣是強烈的，教師能感受學生的學習動機。」。有關學生較無反應的部份，實驗教師也表示，「在中世紀的歐洲將分子稱『計算者』，分母稱『命名者』，個人認為比較沒有引發學生思考的故事成份，導致學生學習突然由熱轉冷，加以學生已學過分數，所以過去複雜化的方式，反而令學生沒有興趣。但個人也思考過是否是教學者個人在此的教學問題，例如，沒有相關數學史概念、學生已學過分數小數，期末最後二天學生已無心上課等，導至學生此時學習較無感。還好最後又有像圖像化的荷蘭數學家的小數表示法，又引發學生興趣。」。

實驗教師也提出對此教案的建議：「個人認為，就數學史的部份，中年級學生喜好較偏好具故事性內容或具圖畫的資料，較能引發中年級學生的數學史學習興趣。」，這也是研究團隊日後編製國小數學史素材須關注的面向。

伍、結論與建議

本研究由師資培育者及在職教師共同討論研發適用於十二年國教之數學史教材，關於「如何開發配合十二年國教數學課綱內容之數學史教案？」之研究問題，從本研究中，我們發現可以依照 HPM 實作模型，並考慮 Fink (2003, 2005) 所提的三大因素進行數學史教案的開發。也就是在學習目標上，於 C₁ 思考單元主題在 12 年課綱的學習重點及教科書之編排設計，於 C₂ 搜尋相關數學史料。在教學和學習活動設計上，教師於自我詮釋階段，設計數學史教案及學習工作單，至於回饋及評量也就是教師進行教學後，可以從學生撰寫學習工作單的反應觀察，以及課程實施學生學習意見表得知學生的學習成效。

至於如何編製數學史教案包含學習工作單等問題，經由研究我們也發現，首先可以由數學普及讀物著手，讓設計者對主題發展脈絡先有通盤概略的認識，使整個教案安排有一個初步的輪廓呈現。接著再進一步搜尋原典資料，增添數學史文本，讓教案更為精緻豐富。關於數學普及讀物的選擇，除了中央研究院數學研究所於 2007 年向社會推薦的 76 本優良數學科普書籍（https://www3.math.sinica.edu.tw/mrpc_jsp/book/about.jsp）之外，今年初臺灣數學史教育學會，也將過去十三年間（2007 年-2020 年）國內所出版的數學普及書籍，選出值得「再向社會大眾推薦」的作品（<https://www.hpmsociety.tw/recommend2021>），這些都可供參考。至於進一步數學史料的搜尋，除了相關原典的文本補充，國內的《HPM 通訊》（<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>）、臺灣數學博物館（<https://www.hpmsociety.tw/mtm>）、臺大數學系網站（<http://math.ntu.edu.tw>），以及國際上的日本算額網站（<http://www.wasan.jp>）、英國 St Andrews 大學數學系網站（<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk>）、HPM 研究群網站上的 Newsletters（<http://www.clab.edc.uoc.gr/hpm/NewsLetters.htm>）、數學郵票網站（<http://members.tripod.com/jeff560/index.html>）等等，都是設計數學史教案的資源。

本研究所進行的數學史教案教學實作，除了教師觀察外，並藉由學習工作單以及學習意見表等研究工具加以評鑑。如前所述，針對「托勒密定理與和角公式」教案，經過 166 位高二學生的教學實驗及回饋問卷，有 83.7% 的學生認為此課程能幫助他們了解和角公式的原理，實驗教師也認為「在整個內容學習的過程，學生會比較理解直角三角形邊長（當斜邊=直徑=1 時）該用正弦或餘弦來表示，這點對學生在用正餘弦表示邊長時會有幫助。」，至於學生也有諸如「能理解到公式背後的原因，覺得很不錯。」、「我覺得了解這些公式導出的來龍去脈，讓我比較不排斥去強記這些公式，因為理解以後，這些式子都變得有脈絡可尋。」等感想，顯示本份教案能達成設計目標。至於「最大公因數」教案，在 160 位國一學生中，有 66.3% 的學生認為能幫助他們學習如何求最大公因數的方法。針對「分數與十進位制小數」教案，依照前文提及以班上只有 31% 認為故事很有趣的此一實驗班級來看，同意這份學習工作單可以讓他們更了解此單元的內容之學生也達 62%。從上述研究結果發現，考量 HPM 實作模型，於數學史教案開始設計之前先考慮數學單元學習目標，選取適合的數學史文本為素材，加以鋪排闡述並與現行教材銜接，進而安排學習活動設計與檢測學習成效的策略，對於中小學生來說，都可以獲致正向的回應。

但是針對不同階段上的考量，在自我詮釋階段的數學史學習工作單的設計上，國小階段的學生由於對生硬的知識或抽象的語意表達比較無法接受，注意力也較容易被分散，因此設計者要傳達的概念內容需要經過故事性的包裝，盡量以活潑、有趣的方式呈現，引起學生興趣，也可增加圖片以輔助文字的理解。

本研究所開發之教案皆為研究團隊考量十二年國教課綱，搜尋數學史料，直接與古文本對

話，完成教案開發進行實作。日後可以再加強探討國際學界上的相關研究，相信也會獲得不同的啟發。至於教案預期的效益除了增進對課內知識的學習外，研究者反思之後亦可設計一套工具，以檢測學生對於公式由來是否理解，和對歷史、人物、概念發展的認識程度，如此應更能掌握數學史融入數學教學所發揮之成效。針對中學教學進度壓力問題，由於新課綱實施，各校可以規劃彈性學習課程，有興趣的教師也可以利用此時段實施，應能更從容的設計一系列的數學史相關課程進行教學。此外，本研究所設計之數學史教案授課時間均精簡為一節課就能完成，如此現場教師便可以較不受教學時數的限制考量，方便進行數學史融入數學的教學。

至於國小部份的教案開發，研究者反思在學習工作單的設計上應該更為多樣靈活，增加圖片和故事性劇情，引動學生的填寫意願，以生動活潑的呈現方式提高學生的學習動機。由於國小中年級學生對於學習單的閱讀及書寫需要花費一些時間，因此文字量的安排也不宜過多。相較於中學數學史教案，日後應將國小階段之素材更加以簡化也需關注生動趣味面向，才能使所開發之素材真正能廣為教師所用，充實中小學各階段所需之數學史資料庫。

誌謝

本文之得以完成，主要來自科技部的專題研究計畫（計畫編號：MOST 105-2511-S-845-008-MY3）之部分研究成果，在此感謝科技部之補助，也謝謝期刊審查委員給予的寶貴意見。

參考文獻

- 方延明（2007）。**數學文化**。北京：清華大學出版社。【Fang, Yen-Ming (2007). *Mathematical culture*. Beijing: Tsinghua University Press. (in Chinese)】
- 李國偉（2013）。數學文化面面觀之數學思維。收錄於國立勤益科技大學通識教育學院 & 中央研究院數學研究所（主編），**2013 年數學文化與教育國際研討會會議手冊**（頁 80-97）。臺中：國立勤益科技大學。【Lih, Ko-Wei (2013). Mathematical thinking from the perspective of mathematical culture. In College of general education, National Chin Yi University of Technology & Institute of mathematics, Academia Sinica (Eds.), *Proceedings of the 2013 International Symposium on Mathematical Culture and Education* (pp. 80-97). Taichung: National Chin Yi University of Technology. (in Chinese)】
- 李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏（2013）。**教育部提升國民素養實施方案—數學素養研究計劃結案報告**。教育部提升國民素養專案辦公室研究計劃成果報告，未出版。【Lih, Ko-Wei, Huang, Wen-Jang, Yang, Der-Ching, & Liu, Po-Hung (2013). *Final report for educating citizen literacy in mathematics*. Project Office for Improving Citizen Literacy, unpublished. (in Chinese)】
- 李繼閔（1998）。**《九章算術》及其劉徽注研究**。臺北：九章。【Li, Chi-Min (1998). *A study on "The nine chapters on the art of mathematics" and Liu Hui's commentary*. Taipei: Chiuchang. (in Chinese)】

- 洪萬生 (1998)。HPM 隨筆(一)。HPM 通訊, 1 (2), 1-3。【Horng, Wann-Sheng (1998). HPM Essay(I). *HPM TongXun*, 1(2), 1-3. (in Chinese)】
- 洪萬生 (2002)。中算史中的『張本例』。HPM 通訊, 5 (12), 1-3。【Horng, Wann-Sheng (2002). Generic examples in Chinese history of mathematics. *HPM TongXun*, 5(12), 1-3. (in Chinese)】
- 洪萬生 (2009)。從科技爭議看數學知識成長的意義。收錄於范偉 (譯), 數學恩仇錄 (頁 3-10)。臺北: 博雅書屋。【Horng, Wann-Sheng (2009). The significance of the growth of mathematics knowledge from the perspective of scientific and technological disputes. In Wei Fan (Trans.), *Great feuds in mathematics: Ten of the liveliest disputes ever* (pp. 3-10). Taipei: Goodness publishing house. (in Chinese)】
- 張維忠、唐恒鈞 (2008)。民族數學與數學課程改革。數學傳播, 32 (4), 80-87。【Chang, Wei-Chung, & Tang, Heng-Chun (2008). Ethnomathematics and mathematics curriculum reform. *Mathmedia*, 32(4), 80-87. (in Chinese)】
- 張維忠 (2011)。數學教育中的數學文化。上海: 上海教育出版社。【Chang, Wei-Chung (2011). *Mathematics culture in mathematics education*. Shanghai: Shanghai Education Press. (in Chinese)】
- 教育部 (2008)。國民中小學九年一貫課程綱要。臺北: 作者。【Taiwan Ministry of Education. (2008). *Grade 1-9 curriculum guidelines*. Taipei: Author. (in Chinese)】
- 教育部 (2018)。十二年國民基本教育數學領域課程綱要。臺北: 作者。檢自 <https://www.naer.edu.tw/PageSyllabus?fid=52>【Taiwan Ministry of Education. (2018). *Curriculum guidelines of 12-year basic education: Elementary and junior high school and general senior high school (Mathematics)*. Taipei: Author. Retrieved from <https://www.naer.edu.tw/PageSyllabus?fid=52> (in Chinese)】
- 童莉 (2006)。基於“數學文化”的數學課堂教學文化氛圍的構建。重慶師範大學學報 (自然科學版), 23 (3), 92-94。【Tong, Li (2006). Set up the cultural atmosphere of mathematics teaching according to “mathematics culture”. *Journal of Chongqing Normal University (Natural Science Edition)*, 23(3), 92-94. (in Chinese)】
- 劉柏宏 (2016)。從數學與文化的關係探討數學文化素養之內涵—理論與案例分析。臺灣數學教育期刊, 3 (1), 55-83。doi: 10.6278/tjme.20160413.001【Liu, Po-Hung (2016). Discourse on the constituent of literacy for mathematical culture in terms of the relationship between mathematics and culture Theoretical and case analysis. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, 3(1), 55-83. doi: 10.6278/tjme.20160413.001 (in Chinese)】
- 蔡文榮、張鈞淇、劉柏宏 (2019)。臺灣學術界數學史研究之現況分析與建議: 以 1992 年至 2017 年學位論文為例。臺灣數學教育期刊, 6 (1), 27-51。doi: 10.6278/tjme.201904_6(1).003【Tsai, Wen - Rong, Chang, Chun - Chi, & Liu, Po - Hung (2019). Analysis of current state and recommendations for HPM research in Taiwan: The case of theses and dissertations from 1992 to 2017. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, 6(1), 27-51. doi: 10.6278/tjme.201904_6(1).003 (in Chinese)】
- 蔡聰明 (2003)。數學拾貝。臺北: 三民。【Tsai, Tsung-Ming (2003). *Pretty shells found by the ocean of mathematics*. Taipei: Sanmin. (in Chinese)】
- 蕭文強 (1992)。數學史和數學教育: 個人經驗和看法。數學傳播, 16 (3), 23-29。【Hsiao, Wen-Chiang (1992). History of mathematics and mathematics education: Personal experience and

- opinions. *Mathmedia*, 16(3), 23-29. (in Chinese)】
- 蘇意雯(1994)。民族數學在台灣。科學月刊, 25(2), 140-145。【Su, Yi-Wen (1994). Ethnomathematics in Taiwan. *Science Monthly*, 25(2), 140-145. (in Chinese)】
- 蘇意雯(2004)。數學教師專業發展的一個面向：數學史融入數學教學之實作與研究（未出版之博士論文）。國立臺灣師範大學，臺北市。【Su, Yi-Wen (2004). *Mathematics teachers' professional development: Integrating history of mathematics into teaching* (Unpublished doctoral dissertation). National Taiwan Normal University, Taipei. (in Chinese)】
- 蘇意雯(2007)。運用古文本於數學教學－以開方法為例。台灣數學教師(電子)期刊, 9, 56-67。doi: 10.6610/ETJMT.20070301.05 【Su, Yi-Wen(2007). Integrating ancient text into teaching: Taking the extraction of root as an example. *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*, 9, 56-67. doi: 10.6610/ETJMT.20070301.05 (in Chinese)】
- 蘇意雯(2011a)。國小階段之數學史素材設計初探。科學教育研究與發展季刊, 62, 75-96。【Su, Yi-Wen(2011a). An initial investigation into the design of materials of history of mathematics for elementary school education. *Research and Development in Science Education Quarterly*, 62, 75-96. (in Chinese)】
- 蘇意雯(2011b)。數學史融入數學教學之理論與實務探究。國教新知, 58(3), 65-73。doi: 10.6701/TEJ.201109_58(3).0007 【Su, Yi-Wen(2011b). A theoretical and practical study on integrating history of mathematics into teaching. *The Elementary Education Journal*, 58(3), 65-73. doi: 10.6701/TEJ.201109_58(3).0007 (in Chinese)】
- 蘇意雯(2015)。遺產分配問題的數學探究活動。國教新知, 62(3), 30-39。doi: 10.6701/TEJ.201509_62(3).0003 【Su, Yi-Wen (2015). An exploratory study of inheritance distribution problem. *The Elementary Education Journal*, 62(3), 30-39. doi: 10.6701/TEJ.201509_62(3).0003 (in Chinese)】
- 蘇意雯(2018)。數學通識課程跨領域之創新教學。2017年大學教師優良創新課程及教學競賽專刊, 133-163。【Su, Yi-Wen (2018). Interdisciplinary teaching innovation for general math curriculum. *The Special Issue of 2017 Quality Innovative Competition for Teaching & Education Courses in University*, 133-163. (in Chinese)】
- 蘇意雯(2020)。數學史電子繪本之開發研究。收錄於 2020 年台灣數學教育學會年會暨第十二屆科技與數學教育學術研討會論文集（頁 3-14）。臺中：國立臺中教育大學。【Su, Yi-Wen (2020). Developing the electronic picture book of history of mathematics. *Proceeding of 2020 The Twelfth International Conference on Technology and Mathematics Education and Workshop of Mathematics Teaching* (pp. 3-14). Taichung: National Taichung University of Education. (in Chinese)】
- 蘇意雯、黃俊瑋、陳靜惠、林明怡(2014)。以數學史劇本設計引動教師專業成長之研究。臺灣數學教育期刊, 1(2), 25-52。doi: 10.6278/tjme.20140904.004 【Su, Yi-Wen, Huang, Jyun-Wei, Chen, Ching-Hui, & Lin, Ming-Yi (2014). Enhancing teachers' professional development through HPM script design. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, 1(2), 25-52. doi: 10.6278/tjme.20140904.004 (in Chinese)】
- 平山諦(2005)。東西數學物語(代欽譯)。上海：上海教育出版社。(原作出版於 1956 年)【Hirayama, Akira (2005). *The story of east-west mathematics* (Chin Tai, Trans.). Shanghai: Shanghai education press. (Original work published 1956) (in Chinese)】

- Berlinghoff, W. P., & Gouvêa, F. Q. (2008)。溫柔數學史：從古埃及到超級電腦（洪萬生、英家明暨 HPM 團隊譯）。臺北：博雅書屋。（原作出版於 2004 年）【Berlinghoff, W. P. & Gouvêa, F. Q. (2008). *Math through the ages: A gentle history for teachers and others* (Wann-Sheng Horng, Jia-Ming Ying, & HPM group, Trans.). Taipei: Goodness Publishing House. (Original work published 2004) (in Chinese)】
- Hellman, H. (2009)。數學恩仇錄（范偉譯）。臺北：博雅書屋。（原作出版於 2006 年）【Hellman, H. (2009). *Great feuds in mathematics: Ten of the liveliest disputes ever* (Wei Fan, Trans.). Taipei: Goodness Publishing House. (Original work published 2006) (in Chinese)】
- Kline, M. (1995)。西方文化中的數學（張祖貴譯）。臺北：九章。（原作出版於 1953 年）【Kline, M. (1995). *Mathematics in western culture* (Tsu-Kuei Chang, Trans.). Taipei: Chiuchang. (Original work published 1953) (in Chinese)】
- Borba, M. C. (1990). Ethnomathematics and education. *For the Learning of Mathematics*, 10(1), 39-43.
- Bütüner, S. Ö. (2018). Secondary school mathematics teachers' knowledge levels and use of history of mathematics. *Journal of Education and Training Studies*, 6(1), 9-20. doi: 10.11114/jets.v6i1.2722
- de Lange, J. (2003). Mathematics for literacy. In B. L. Madison & L. A. Steen (Eds.), *Quantitative literacy: Why numeracy matters for schools and colleges* (pp. 75-89). Princeton, NJ: National Council on Education and Disciplines.
- Fasanelli, F. (2000). The political context. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education* (pp. 1-38). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Fink, L. D. (2003). *Creating significant learning experiences: An integrated approach to designing college courses*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.
- Fink, D. L. (2005, December 2). *Integrated course design*. IDEA. https://www.ideaedu.org/idea_papers/integrated-course-design/
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel Publishing Company.
- Gravemeijer, K. (1989). Developmental research as a research method. In A. Sierpiska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity (An ICMI Study Book 2)* (pp. 277-295). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/978-94-011-5470-3_18
- Heiede, T. (1992). Why teach history of mathematics? *The Mathematical Gazette*, 76(475), 151-157. doi:10.2307/3620388
- Horng, W.-S. (2006). Teacher's professional development in terms of the HPM: A story of Yu. In F. Furinghetti, S. Kaijser, & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of the HPM 2004 & ESU4* (pp. 346-358). Uppsala, Sweden: Uppsala Universitet.
- Jahnke, H. N. (1994). The historical dimension of mathematical understanding: Objectifying the subjective. In J. P. da Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 139-156). Lisbon, Portugal: University of Lisbon.
- Kate, V. J. (1993). *A history of mathematics: An introduction*. New York, NY: HarperCollins College

- Publishers.
- Mann, T. (2011). History of mathematics and history of science. *Isis*, 102(3), 518-526. doi:10.1086/661626
- Michalowicz, K. D., Daniel, C., FitzSimons, G., Ponza, M. V., & Troy, W. (2000). History in support of diverse educational requirements: Opportunities for change. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 171-200). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/0-306-47220-1_6
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for teaching mathematics*. Reston, VA: Author.
- Niss, M., & Højgaard, T. (2011). *Competencies and mathematical learning: Ideas and inspiration for the development of teaching and learning in Denmark (IMFUFA tekst)*. Roskilde, Denmark: Roskilde University.
- Panasuk, R. M., & Horton, L. B. (2012). Integrating history of mathematics into curriculum: What are the chances and constraints? *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 7(1), 3-20.
- Park, J., Güçler, B., & McCrory, R. (2013). Teaching prospective teachers about fractions: Historical and pedagogical perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 82(3), 455-479. doi: 10.1007/s10649-012-9440-8
- Su, Y.-W. (2006). Mathematics teachers' professional development: Integrating history of mathematics into teaching. In F. Furinghetti, S. Kaijser, & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of the HPM 2004 & ESU4* (pp. 368-382). Uppsala, Sweden: University of Uppsala.
- Su, Y.-W., Su, J.-H., & Su, H. Y. (2018, May). *A research on curriculum development in teaching Ptolemy's theorem and trigonometric identities*. Paper presented at the 8th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education, Taipei, Taiwan.
- Su, Y.-W. (2019, July). *Integrating history of mathematics into mathematics teaching in junior high schools*. Paper presented at the 2019 3rd International Conference on Education and Multimedia Technology, Nagoya, Japan.
- Tzanakis, C., & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 201-240). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/0-306-47220-1_7

附錄：托勒密定理與和角公式

希臘的天文學家托勒密（西元前 110 年到 170 年），在西元 150 年左右出版十三冊的數學文集，蒐集當時已知的數學與天文學知識，成功地描述行星運動現象，鞏固了地心說。後來，這套書傳到阿拉伯，被阿拉伯人稱為《Almagest》（The Great Treatise，天文學大成），又再傳回歐洲，一直到文藝復興初期，托勒密的地心說都是天文學的典範。

當時的希臘人已經知道：想要天文學「測星」或幾何學「測地」都需要知道各種圓心角 θ 所對應的弦長。

【問題一】如圖一，若已知圓半徑 R ，圓心角 $\angle BOC = \theta$ ，則

- (1) 弦長 $\overline{BC} =$ _____ (用 R 與 θ 表示)
- (2) 弦長 $\overline{BC} =$ _____ (用 R 與 $\angle A$ 表示)

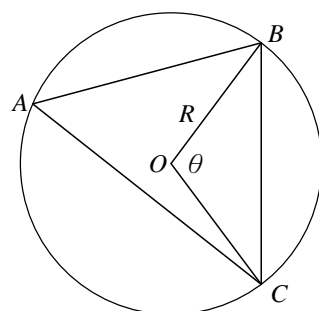


圖 一

托勒密在《Almagest》的第一冊編製了一個圓心角從 0° 開始，以 0.5° 為間隔變化到 180° 的弦表。他的弦長編製工作是由正多邊形開始，先求出圓心角分別為 120° （正三角形）、 90° （正四邊形）、 60° （正六邊形）以及 72° （正五邊形）和 36° （正十邊形）的弦長。然而，他想計算其他角度的弦長，還需要解決幾個問題，其中，包含下列兩個問題。

【問題二】已知弦長 \overline{AB} 與 \overline{BC} ，如何求弦長 \overline{AC} ？

這個問題我們可以看成：

如圖二，在圓直徑 $2R = 1$ 的圓上，作直徑 \overline{BD} ，再連 \overline{AD} ， \overline{CD} 。

若弦 \overline{AB} 與 \overline{BC} 所對應的圓周角分別為 α, β ，請選出下列問題的正確選項。

- (1) 弦長 $\overline{AB} = ?$ (A) $\sin \alpha$ (B) $\cos \alpha$ (C) $\sin \beta$ (D) $\cos \beta$

- (2) 弦長 $\overline{BC} = ?$ (A) $\sin \alpha$ (B) $\cos \alpha$ (C) $\sin \beta$ (D) $\cos \beta$

- (3) 弦長 $\overline{AC} =$ (A) $\sin(\alpha + \beta)$ (B) $\cos(\alpha + \beta)$ (C) $\sin(\alpha - \beta)$ (D) $\cos(\alpha - \beta)$

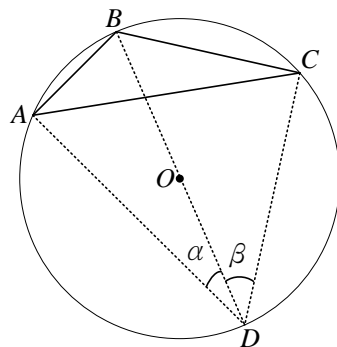
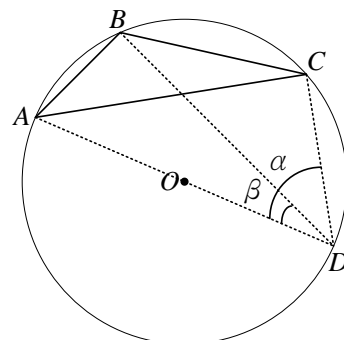


圖 二

【問題三】如圖三，已知弦長 \overline{AB} 與 \overline{AC} ，如何求弦長 \overline{BC} ？

這個問題我們可以看成：

如圖三，在圓直徑 $2R = 1$ 的圓上，作直徑 \overline{AD} ，再連 \overline{BD} ， \overline{CD} 。若弦 \overline{AC} 與 \overline{AB} 所對應的圓周角分別為 α, β ，請選出下列問題的正確選項。



圖三

(1) 弦長 $\overline{AC} = ?$ (A) $\sin \alpha$ (B) $\cos \alpha$ (C) $\sin \beta$ (D) $\cos \beta$

(2) 弦長 $\overline{AB} = ?$ (A) $\sin \alpha$ (B) $\cos \alpha$ (C) $\sin \beta$ (D) $\cos \beta$

(3) 弦長 $\overline{BC} =$ (A) $\sin(\alpha + \beta)$ (B) $\cos(\alpha + \beta)$ (C)

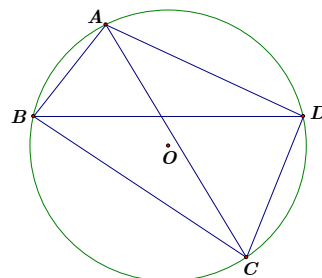
$\sin(\alpha - \beta)$ (D) $\cos(\alpha - \beta)$

由此可知，用現代的數學符號，這兩個問題等價為已知 $\sin \alpha$ ， $\sin \beta$ ，欲求 $\sin(\alpha + \beta)$ 和 $\sin(\alpha - \beta)$ 。托勒密利用一個重要的幾何定理—托勒密定理—解決上述問題，一起來看看他是如何解決的！

【托勒密定理】

如圖四，設四邊形 $ABCD$ 為圓內接四邊形，則兩條對角線長的乘積等於兩對邊長乘積的和。

$$\text{即 } \overline{AB} \times \overline{CD} + \overline{BC} \times \overline{AD} = \overline{AC} \times \overline{BD}$$



圖四

這個定理為何正確？請耐心閱讀下面的說明，跟著提示，將空格填入答案，就能知道原因囉！

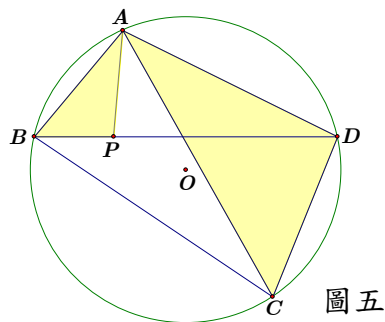
【問題四】托勒密定理的證明

如圖五，在 \overline{BD} 上取一點 P 使得 $\angle BAP = \angle DAC$

因為 $\angle ABP =$ _____

因此， $\triangle ABP \sim$ _____

$$\Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \text{_____} \dots\dots ①$$



圖五

在圖六中，因為 $\angle PAD = \underline{\hspace{2cm}}$

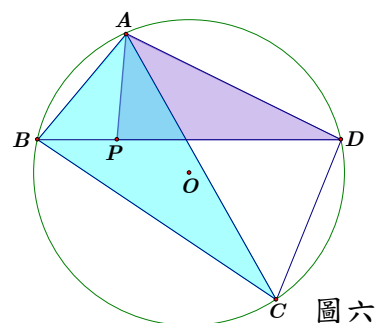
且 $\angle ADP = \underline{\hspace{2cm}}$

因此， $\triangle APD \sim \triangle ABC$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \underline{\hspace{2cm}} \dots\dots ②$$

將①+②可得

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} =$$



圖六

好了，既然知道托勒密定理，接著就利用來推導和角公式吧！

【問題五】托勒密定理與和角公式(1)

(1)如圖七，給定 O 為圓心，直徑 \overline{AB} 為 1 的圓，

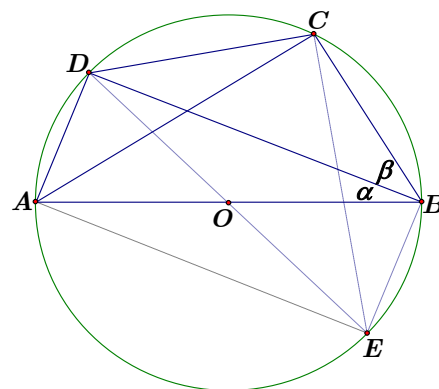
請用 $\sin \alpha, \cos \alpha, \sin \beta, \cos \beta, \sin(\alpha + \beta)$,

$\cos(\alpha + \beta)$ 標出下列線段長。

$$\overline{AD} = \overline{BE} = \underline{\hspace{2cm}}; \overline{BD} = \overline{AE} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$\overline{CD} = \underline{\hspace{2cm}}; \overline{CE} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$\overline{AC} = \underline{\hspace{2cm}}; \overline{BC} = \underline{\hspace{2cm}}。$$



圖七

(2) 觀察圖七中圓內接四邊形 $AECD$ ，由托勒密(Ptolemy)定理，得

$$\overline{AC} \times \overline{DE} = \overline{AD} \times \underline{\hspace{2cm}} + \overline{AE} \times \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha + \beta) \times 1 = \underline{\hspace{4cm}}$$

(3) 觀察圖七中圓內接四邊形 $BCDE$ ，利用托勒密(Ptolemy)定理，得

$$\overline{BD} \times \overline{CE} = \overline{BC} \times \underline{\hspace{2cm}} + \overline{BE} \times \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha \times \cos \beta = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{4cm}}$$

【問題六】托勒密定理與和角公式(2)

(1) 如圖八，給定 O 為圓心，直徑 \overline{AB} 為 1 的圓，

請用 $\sin \alpha, \cos \alpha, \sin \beta, \cos \beta, \sin(\alpha - \beta),$

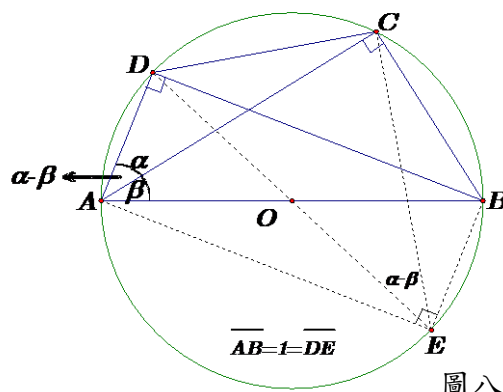
$\cos(\alpha - \beta)$ 標出下列線段長。

$$\overline{AD} = \overline{BE} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$\overline{BD} = \overline{AE} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$\overline{AC} = \underline{\hspace{2cm}}; \overline{BC} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$\overline{CD} = \underline{\hspace{2cm}}; \overline{CE} = \underline{\hspace{2cm}}.$$



圖八

(2) 觀察圖八中圓內接四邊形 $ABCD$ ，由托勒密 (Ptolemy) 定理，得

$$\overline{AC} \times \overline{BD} = \overline{AB} \times \underline{\hspace{2cm}} + \overline{AD} \times \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\Rightarrow \cos \beta \times \sin \alpha = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha - \beta) = \underline{\hspace{4cm}}$$

(3) 觀察圖八中圓內接四邊形 $AEBC$ ，由托勒密 (Ptolemy) 定理，得

$$\overline{AB} \times \overline{CE} = \overline{AE} \times \underline{\hspace{2cm}} + \overline{AC} \times \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\Rightarrow 1 \times \cos(\alpha - \beta) = \underline{\hspace{4cm}}$$

托勒密解決了最基本的求弦長的問題（見問題一與問題二），配合著其他定理，他最後編製完成從 0° 開始，以 0.5° 為間隔變化到 180° 的弦表。這個表展現了古希臘時期的數學文明，標幟著歐幾里得之後數學的再一次高峰，尤其在幾何學、代數學，以及三角學。

