劉柏宏（2021）。
中小學數學史教案開發與實作研究。
臺灣數學教育期刊，8（1），1-25。
doi: 10.6278/tjme.202104_8(1).001

數學人文教案培養數學文化素養之理論探討與反思

劉柏宏

國立勤益科技大學基礎通識教育中心

數學文化是理解數學知識本質的重要途徑之一，但長期以來在傳統教學中幾乎都被忽視。本研究嘗試從理論論述和實務教學兩方面初探並反思數學文化如何應用於實際教學之中。在理論方面，本文定義數學文化並說明其中之「文化中的數學」與「數學中的文化」雙構面，再定義何謂數學文化素養，以進一步論述數學文化素養在教育上的意涵。在教學實務方面，本研究基於數學人文精神發展「費波納西數列」和「霍爾遊戲」兩份教案，並實際針對國中生和高中生實施素養教學。初步觀察結果發現，學生對於這兩份數學文化教案均表現出高度肯定，也能從教學活動中掌握所與傳達的數學精神。惟學生在「費波納西數列」的教學中沒能深入體認與自然界的關聯，而在「霍爾遊戲」教案中也發現大約半數參與的高中生對於將條件機率概念推廣到一般情形仍有困難。

關鍵詞：條件機率、費波納西數列、數學人文教案、數學文化、數學文化素養

通訊作者：劉柏宏，e-mail：liuph@ncut.edu.tw
收稿：2021 年 1 月 26 日；
接受刊登：2021 年 4 月 9 日。

Liu, P. H. (2021).
A theoretical and reflexive study on cultivating literacy of mathematical culture by using lesson plans from humanistic mathematics.
Taiwan Journal of Mathematics Education, *8*(1), 1-25.
doi: 10.6278/tjme.202104_8(1).001

A Theoretical and Reflexive Study on Cultivating Literacy of Mathematical Culture by Using Lesson Plans from Humanistic Mathematics

Po-Hung Liu
Fundamental General Education Center, National Chin-Yi University of Technology

Mathematical culture a crucial approach to understanding the nature of mathematical knowledge, but it has been mostly ignored in traditional teaching for a long time. This research was a theoretical and reflexive study on how mathematical culture can be conducted in practical teaching in terms of theoretical and practical aspects. In terms of theory, this research provided a definition of mathematical culture and explained the dual dimensions of mathematical culture, that is, "mathematics in culture" and "culture of mathematics," followed by the definition of "mathematical cultural literacy" to explore the meaning of mathematic cultural literacy in education. For the practical aspect, by referring to the humanistic spirit of mathematics, this research focused on two lesson plans—the Fibonacci Sequence and the Monty Hall Problem. Furthermore, two lesson plans were implemented for middle school and high school students. The findings indicated that, although the students were highly appreciative of the lesson plan content, they failed to be impressed by the connection between mathematics and the natural world in teaching the Fibonacci sequence. For the Monty Hall problem lesson plan, results also demonstrated that approximately half of the participating high school students still had difficulties in generalizing the concept of conditional probability.

Keywords: conditional probability culture, Fibonacci sequence, lesson plans of humanistic mathematics, mathematical culture, literacy of mathematical culture

Corresponding author：Po-Hung Liu，e-mail：liuph@ncut.edu.tw
Received：26 January 2021;
Accepted：9 April 2021.

壹、前言

數學知識源遠流長數千年，其發展不僅深受各區域民族文化影響，數學知識也與社會文化發展的趨勢密切相關。國際間倡議數學文化最早的當推數學家懷爾德（Raymond Wilder）於 1950 年國際數學家大會（International Congress of Mathematicians）中以「數學的文化基底」（Cultural basis of mathematics, Wilder, 1950）為題發表演講。懷爾德認為，唯有透過認識數學的文化基底，才能對數學本質有更進一步的理解。另一位數學家克萊恩（Morris Kline）更在《西方文化中的數學》（Kline, 1953）一書的序言中指出，此書目的旨在揭示數學一直是西方文明主要的文化動力，社會大眾雖理解數學是科學探究的重要工具，殊不知數學也深深影響西方哲學思想的走向，並早已滲入藝術、音樂、建築和文學之中。克萊恩長期致力於探究數學知識的歷史、哲學與文化層面的議題，但他最關心的仍舊是數學教育問題。克萊恩指出，學校的數學教學往往剝奪數學在人類文明中的智識文化脈絡，而將其簡化為一連串的技術知識，使得不需太多數學技術知識的一般大眾對這些"赤裸且乾澀的教材"（naked and dry material）有所抗拒，即使部分接受高等教育的知識分子對數學也有種藐視的心態，因而使得"對數學無知形成一種社會崇尚的氛圍"（ignorance of mathematics has attained the status of a social grace, p. viii）。數學文化與人類學、歷史與社會和哲學等領域相關，劉柏宏（2021）已做說明，在此不再贅述。本文從數學文化的定義、構面、與其在教育上的意涵，延伸出融入數學文化如何彰顯數學的人文精神，並輔以兩個教學案例做為說明。介紹如何以數學文化中的數學人文元素融入中學教案之中，並初步探究在教學現場的實施觀察和反思後續可能的發展方向。

貳、數學文化素養在教育上的意涵

一、數學文化的雙向構面

沒有人會否認文學、藝術、建築與宗教都是人類重要的文化，而數學本身就是人類發展過程中所伴隨產生的一種智識文化應該也是殆無疑議。倡議數學與文化相互關聯的學者，如前述的懷爾德和克萊恩，都未直接對「數學文化」一詞下定義，而且目前國內外學界對於數學文化的研究尚不普遍，使得在討論所謂的「數學文化」（mathematical culture）時，難以論斷「數學文化」一詞的意涵所指的究竟是數學知識本身就是一種文化（mathematics as a culture, Wilder, 1981），抑是數學是一種文化載具，是理解民族文化特殊性的線索（mathematics as a cultural clue, Keyser, 1947），或者指數學知識發展與社會互動的過程所產生的文化軌跡（mathematics as a cultural locus, White, 1947），也有從教育觀點討論數學文化對數學教學的影響（mathematics as a cultural discipline, Burton, 2009）。有鑑於此，劉柏宏（2016）參酌 Kroeber 與 Kluckhohn（1952）對「文

化」所下的定義，嘗試從比較廣義的角度，將「數學文化」定義如下：

> 數學文化就是人類探索數學知識時其行為的外顯和內隱模式，並藉由人類群體，特別是數學家社群，所創造獨特成就的符碼（符號、圖形或文字）來傳遞。

嚴格來說，這只是一種概念性定義，而非操作型定義。不過由於「文化」是一個抽象的人文概念，指涉的範疇極廣，研究初期很難立即給一個符合社會科學標準的操作型定義。縱使如此，我們可以嘗試探索「數學文化」時有哪些可以操作的內涵。

根據懷爾德（Wilder, 1950）的觀點，文化的發展結果來自於兩種張力的綜合，一是內部演化（evolution），另一是來自外部的擴散（diffusion）。數學文化史表明一件事實：「在最終尚未達到靜止狀態之前，沒有任何一個數學分支能夠無限期地獨自發展」（no branch of mathematics can pursue its course in isolation indefinitely, without ultimately reaching a static condition, Wilder, 1950, p. 265）。據此，劉柏宏（2016）主張「數學文化」主要包括兩個大構面，一個是「文化中的數學」（mathematics in culture），另一個是「數學中的文化」（culture of mathematics），前者是從文化的角度出發，觀察人類發展過程中，數學在其所屬社會文化所扮演的角色；後者指數學知識發展過程中其內部知識與社群所顯現的文化特質，這兩者呈現一種交錯且有機的互動發展。當來自外部文化張力的擴散效應不大時，其內部演化的力道自然削弱。懷爾德（Wilder, 1968）就指出，中國古代和歐洲中世紀的宿主文化（host culture）甚少受到其他文化擴散張力的影響，因而形成靜態特徵，致使數學發展停滯。反之，當來自外部的文化張力夠強時，將會衝擊內部演化的速率與效率，比如二次世界大戰期間大批歐洲數學家與科學家遷居至美國，進而改變二十世紀美國數學文化的樣貌。

為建立一個可以在教育上操作的架構，劉柏宏（2016）根據相關文獻（方延明，2007；易南軒、王芝平，2007；張維忠，2011；Ernest, 1998；Kline, 1953；Polya, 1954；Wilder, 1950）進一步將「文化中的數學」細分為「歷史」、「社會」和「民族」三個面向，而「數學中的文化」則包含「歸納猜想」、「邏輯演繹」和「社群辯證」，由此建構出數學文化內涵的縱橫構面圖（圖 1），這些構面彼此之間可能平行發展，也可能交叉堆疊，端視所處地域文化所帶來的影響。

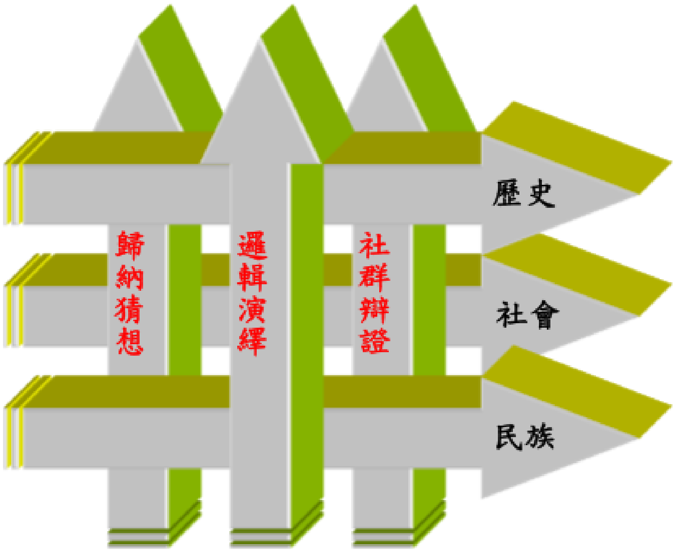

圖 1　數學文化縱橫構面。引自「從數學與文化的關係探討數學文化素養之內涵─理論與案例分析」，劉柏宏，2016，**臺灣數學教育期刊**，**3**（1），65。

二、雙向構面的教育意涵

談素養不能自外於文化。很可惜，前述的數學文化與人文內涵經常消失於當代的數學課程之中。Burton（2009）從教學觀點出發研究職業數學家的認識論（epistemologies）並探討它們是否與數學學科學習相關，甚至造成影響。她析離出數學知識的兩個文化層面：「數學中的文化」（culture of mathematics）和「數學的文化」（mathematical culture）。前者指對於數學知識的嚴密（rigour）、簡潔（succinctness）與美感（beauty）等等特質的態度與看法，後者指數學家在討論與學習數學的情境脈絡中，所表現出來的社會政治態度（socio-political attitudes）、價值（values）和行為（behaviour）。後者對於如何理解前者具有關鍵影響，也就是個體研究數學的態度、價值和行為相當程度決定個體對數學的品味，例如如何評斷數學知識之真、善、美。另根據 Cai（1995）比較中國大陸和美國學生的數學解題習性後指出，中國大陸學生在計算和簡單的問題解決等任務上比美國學生有更好的表現，但在評價複雜問題解決等任務上則不如美國學生。這與不同社會的「數學學習次文化」相關，也是文化中的數學相當重要的一環。所以 Burton 認為數學教學必須關照這兩個層面，尤其是「數學的文化」（mathematical culture）。不過「數學學習次文化」的主題與本研究教案發展的主旨較不相關，本文不擬針對此議題進行論述。由 Burton 的研究可以看出她係聚焦於職業數學家的工作哲學，諸如觀點、態度、信念與行為等等傾向所形塑的文化，並探究這些文化對研究數學和學習數學的影響。很顯然地，Burton 並沒有從歷史、社會與民族等宏觀的面向討論數學文化。她所定義的「數學中的文化」（culture of mathematics）與本文

立場類似，而其「數學的文化」（mathematical culture）則包含於本文的「文化中的數學」（mathematics in culture）之中，因為數學家的觀點、態度、信念與行為等等傾向確實與他們所處地區的民族、歷史與社會有關。

要培養學生的數學文化素養必須有一個具體標的。因此，以 PISA 數學素養的定義為基礎，劉柏宏（2016）給數學文化素養下一個操作型的定義：

> 數學文化素養係指個體對數學知識的形成脈絡和發展過程所具備的理解程度，使其面對某一數學概念或問題時，能認識它的思維方式、歷史背景，和該概念或問題與生活需求、社會發展的關聯；或是面臨生活與社會問題時，能辨識該問題與數學知識的關聯，從而根據數學思考模式和數學知識技能，做出理性反思與判斷，並從解決問題的歷程中認知數學的人文價值。（p. 73）

值得一提的是，從上述「數學文化素養」的定義文字上雖沒有特別出現情意面向的字句，但是本文概念下的數學文化素養確實包含情意面向。因為當一個學習個體在「面對某一數學概念或問題時，認識它的思維方式、歷史背景，和該概念或問題與生活需求、社會發展的關聯......並從解決問題的歷程中認知數學的人文價值」時，該學習個體所認識到的不僅僅是只有知識和技能，而是對於數學知識的本質更能心領神會，這就是情意的影響，而這也是本文數學文化素養定義與 PISA 數學素養定義最大的不同。基於此操作型定義，Liu（2018）再根據相關文獻建構出一套數學文化素養的學習內容指標（靜態指標）與學習表現指標（動態指標），以做為發展或評量數學文化教材的架構，如表 1 和表 2 所示。表 1 數學文化素養的三個學習內容指標（歷史、社會和民族）的說明請參見劉柏宏（2021）。在此引用「費馬最後定理」為例闡述表 2 數學文化素養的學習表現指標。約在 1637 年的某一天，費馬閱讀有「代數之父」稱譽的古希臘數學家丟番圖（Diophantus）的著作《算術》（Arithmetica）一書中對畢氏定理的論證之後，在書頁空白處寫下：「任何立方數不能分成兩立方數的和，任何四次方數不能分成兩四次方數的和，任何五次方數也不能分成兩五次方數的和，依此類推」，也就是「設 n 是大於 2 的正整數，則方程式 $x^n + y^n = z^n$，沒有正整數解」，費馬宣稱已為這個命題找到一個非常巧妙的證明，然而因為書中空白的篇幅不足以寫下證明過程。到這階段只能將此結論視為費馬個人觀察歸納之後的猜想。之後數百年，許多偉大數學家如歐拉（Euler）、高斯（Gauss）、熱爾曼（Germain）、阿貝爾（Abel）、狄利西列特（Dirichlet）、羅詹德（Legendre）、拉梅（Lame）、庫麥爾（Kummer）、柯西（Cauchy）......，皆曾試圖證明「費馬最後定理」卻紛紛鎩羽。英國數學家懷爾斯（Andrew Wiles）十歲接觸到這問題便希望有一天能證明「費馬最後定理」。在他取得終身教授的資格之後花了七年時間，於 1993 年透過橢圓函數證明費馬猜想的正確性。但投稿發表經過同儕檢驗後卻發現其證明存在著邏輯

上的瑕疵，懷爾斯又花了將近兩年時間才完成嚴謹的証明。整個過程恰歷經「歸納猜想」→「演繹證明」→「社群辯證」三個階段，這就是屬於數學知識特有的文化。

表 1

數學文化素養的學習內容指標

歷史（History）指標
概念起源（H-C: Concept）：數學概念的歷史由來
方法類型（H-M: Methodology）：數學方法在歷史上不同的呈現方式
經典名題（H-P: Problem）：歷史上與單元主題相關著名的數學問題
軼聞趣事（H-E: Episode）：歷史上與單元主題相關的數學軼聞趣事
社會（Society）指標
自然科技（S-N: Nature）：數學在自然科技方面的應用
生活應用（S-L: Life）：數學在日常生活方面的應用
經濟發展（S-E: Economy）：數學在經濟財務方面的應用
政治議題（S-P: Politics）：數學在政治社會方面的應用
人文藝術（S-A: Arts）：數學在人文藝術方面的應用
民族（Ethno）指標
文化脈絡（E-C: Culture）：數學概念在不同民族產生的原因
方法比較（E-M: Methodology）：數學方法在不同民族的呈現方式
哲學思想（E-P:Philosophy）：數學概念和當時哲學思想的關係

表 2

數學文化素養的學習表現指標

歸納猜想（Induction & Guessing）指標
觀察分析（I&G-S: Survey）：從所提供之範例進行觀察與分析
發現規律（I&G-P: Pattern）：經由觀察與分析發現範例之共同規律
建立猜想（I&G-C: Conjecture）：透過發現範例之共同規律建立數學猜想
演繹證明（Deduction & Proof）指標
直覺說明（D&P-I: Intuitive）：透過直覺觀察初步相信數學性質之合理性
特例說明（D&P-E: Explanation）：舉出特例說明數學性質之合理性
邏輯論證（D&P-L: Logic）：經由邏輯論證確認數學性質之正確性
社群辯證（Community & Dialectic）指標
專家對話（C&D-C: Conversation）：理解數學家社群對某一數學概念或性質的看法
概念演變（C&D-E:Evolution）：認識某一數學概念或性質不同年代的演變過程

參、數學人文精神與教學

在一般的認知中，數學總被歸類為一門科學，數學素養當然也是科學理性最典型的展現，這是毋庸置疑的。相對於科學知識的日新月異，人文學科一個很重要的本質就是「傳承」。兩千多年前相傳由古希臘詩人荷馬所寫的兩部巨著《伊利亞特》和《奧德賽》至今仍為人傳頌；古埃及藝術中經常以類比的象徵手法，透過符號展示他們對自然的認識，這一點仍然是現代藝術家慣用的手法；春秋戰國時代諸子百家思想還隱約中引領著我們的處事態度。不過難道數學就不具備上述資格嗎？兩千多年前《幾何原本》的證明形式與內容至今仍被奉為圭臬；當今全世界不也是分分秒秒時時刻刻仍遵守著古巴比倫人所創立的六十進位？三國時期劉徽的圓面積公式「半周半徑相乘得積步」和當代公式 πr^2 相比不僅同樣精確，也更合乎直覺。所以從傳承角度而言，說數學是一種人文知識應當不為過，因此從數學發展過程來看，數學或許更接近人文學科。本文旨在討論基於數學文化所發展的數學人文素養教材並探究其成效，而所謂數學人文素養（literacy of humanistic mathematics）就是能體認「人文數學」（humanistic mathematics）的本質。那什麼是「人文數學」？美國數學協會（Mathematical Association of America）於 1993 年出版的《*Humanistic Mathematics*》（White, 1993）一書中明白表示「人文數學」指的是對於數學知識與文學、藝術、音樂等人文學科所共享的內涵能有所覺知與感悟（Humanistic mathematics carries with it an awareness of and a sensitivity to those things shares with the humanities such as literature, art, and music. White, 1993, p. vii）。例如法國數學家 Jacques Hadamard 指出數學的洞見或是發現需要一個「孵化」（incubation）的過程，這過程除融合知識和直覺外，也依賴有意識的思考和無意識（或是潛意識）的靈光乍現（Hadamard, 1945），這種追求智識感知的心理狀態與人文學科並無二致。難怪當代最負盛名的華人數學家丘成桐教授也指出：

> 數學是一門很特殊的學科。它既能達成人文性的涵泳性靈，又有科學性的致知應用。……探討數學、人文與科學之間妙趣橫生的關係，讓我真正享受到了研究數學的樂趣。（丘成桐，2013，p. 1）

這段話充分展現認識數學文化素養的情意價值。值得注意的是，「人文數學」不只是一個名詞，更是包含過程的動名詞。White（1993）強調，要達到前述目標必須透過「人本數學教學」（teaching mathematics humanistically）和「教授人文數學」（teaching humanistic mathematics）兩種過程，前者偏向教學策略，以學生為本，創造一個友善的學習環境讓學生能主動探究數學，以了解數學是一個有意義的社會建構知識（a meaningful, socially constructed knowledge）；後者注重學習內容，提供適當素材讓學生重構數學知識，包含從發現到論證、從數學到科學、從事實到應用、從數學到孕育知識的文化脈絡。

「人本數學教學」從字面的直接解釋就是呈現「以人為本」的教學。「以人為本」的數學教學，就是如同 Ernest（1996）所說，呈現出數學知識人性化的一面（human side of mathematics）。前述 White（1993）所說以學生為中心的教學模式在許多教育文獻已多所論述，這裡不再贅言。許多學者主張人本數學教學應介紹在數學知識發展過程中數學家如何思考問題並建立知識正確性的過程。Marchisotto（1993*b*）以畢氏定理為例解釋人本數學教學的內涵，以說明如何讓學生了解數學是一個有意義的社會建構知識。她舉出確立數學知識的七項特徵以描繪數學知識演化的宏觀特徵。這些宏觀特徵近二十年來逐漸受到重視。七十年前數學家 Richard Courant 有感於當時數學教學已淪為空洞枯燥的解題技巧訓練，數學研究越來越趨於過度特殊化與抽象化，忽略與其他領域的連結，致使數學在教育中面臨消失的危機，因此出版《數學是什麼?》（*What is mathematics*?）一書（Courant & Robbins, 1941），其目的在於讓讀者能夠真正理解數學是一個有機發展的整體，並且可以做為科學思考和行動的基礎。但是另一位數學家 Reuben Hersh 卻認為 Courant 在書中只有呈現知識結構的演變，卻沒有呈現數學知識背後的人文精神，所以只有“展示”數學是什麼（*showing* what mathematics is），卻沒有真正“訴說”什麼是數學（not by *telling* what it is）。Richard Courant 所沒有“訴說”的是數學知識的哲學問題，而哲學問題正是人文精神的最高展現。因為討論哲學時不僅需觀察到知識的演變，尚須考量知識生成與轉移的社會環境脈絡和價值觀。換句話說，Courant 或許正確地描繪數學的「外在形象」或其「概念定義」(concept definition)，卻沒有傳達數學的「內在意象」或其「概念意象」（concept image），因此 Hersh 從知識論觀點（epistemological point of view），透過人本取向撰寫《數學究竟是什麼?》（*What is mathematics, really*?）一書以闡述數學意象（Hersh, 1997）。Hersh 除了主張數學是人類文化的一部分之外，更強調數學知識並非毫無謬誤。就像科學一般，數學藉由犯錯、修正、再修正的過程而精進。數學哲學界約莫從 1970 年代後期開始重視數學的經驗性，其中較為普及的代表作有二，一是克萊恩的《數學：確定性的失落》（Mathematics: The loss of certainty, Kline, 1982），另一是 Imre Lakatos 的《證明與反駁》（*Proofs and Refutations*, Lakatos, 1976）。尤其 Lakatos 在《證明與反駁》一書中藉由師生交叉詰辯與對話呈現出數學概念“琢磨”（polishing）的歷程，以反駁英國數學家哈第（Godfrey Hardy）所主張的數學形式主義（formalism）。劉柏宏（2015）也仿效《證明與反駁》書中的風格，虛擬一位老師（T）和三位學生（α, β和γ）之間關於多邊形性質的對話，以呈現 Lakatos 的觀點。

「教授人文數學」重點在強調數學與文學、藝術、音樂等人文學科所共享的知識內容與內涵。以數學與藝術為例，數學是理性的，繪畫是感性的，兩者看似無關，但究其知識本質的理路可以發現兩者發展歷程其實十分相似。兩個學科都源起於如何呈現我們所生活的大自然，數學的工具是數字和幾何，而繪畫是線條和色彩。之後兩者也都步上從具象到抽象的道路，不再以

忠實地描繪物理世界為滿足，而是追求人類純理性思維的樂趣與發展。更令人驚訝的巧合是，兩者走向抽象化的時間卻也相近，繪畫稍晚於數學，但都約莫從十九世紀中後期開始。一般咸認數學的抽象化起始於伽羅瓦（Évariste Galois, 1811-1832）所建構的群論（group theory），而後緊接著是科西（Augustin Cauchy，1789-1857）和威爾斯特拉斯（Karl Weierstrass, 1815-1897）微積分嚴格化的工作，和羅巴切夫斯基（Nikolai Lobachevsky, 1792-1856）與黎曼（Georg Riemann, 1826-1866）等人提出的非歐幾何學，激發二十世紀抽象數學的發展。繪畫藝術方面，康丁斯基（Wassily Kandinsky, 1866-1944）和蒙德里安（Piet Mondrian, 1872-1944）等人被視為是抽象畫的先驅，有志一同地以幾何色塊表現畫中景物，點燃二十世紀野獸派（fauvism）和立體派（cubism）的火花。我們可以借用英國數學家 Jensen（2002）的一段話來理解兩者知識本質的相似性：

> 數學和繪畫藝術可做為人類在意識上亟於體認現實世界的兩個案例，不僅僅只是我們周遭觸目可見的物理現實，更著重在最廣義的現實上。因此兩者的關係和相似是可以預期的。藝術家和數學家一樣都致力於理解世界。兩者都反思現實世界的結構並設法去定義和萃取該結構的元素，有時是抽象的，也有時是具象的。(p. 45)

至於數學與文學的共通點則是敘事（narrative）。以抽象符號表達概念的數學為何能與以具象文字為媒介的文學有所連結？Thomas（2002）指出文學理論中的結構主義與敘事分析，與數學思維具有許多類似之處。例如數學證明必須先有給定的已知、假設、和相關的數學物件才能進行演繹，而數學小說通常從給定的角色出發做為故事的開端，並逐漸界定主角與相關人物之間的關係後，藉由書中人物共同參與事件的過程以鋪陳結局，這兩種方法論有顯著的類比關係。至於兩者在處理特例（special case）與推廣（generalization）的手法上也是異曲同工。數學家藉由諸多特例發現數學物件的共同模式，而小說家則是以特定人物與事件突顯潛藏於社會眾生的集體記憶。與其說數學小說的風潮是由於「異態結合」所產生的新鮮感，倒不如說這種現象來自於大眾對「數學敘事」（mathematical narrative）的潛在渴望。Davis（2012）指出，數學家應該以敘事做為了解其自身學科與研究本質的基本工具，但數學家的作品卻往往只見諸多疏離的恆等式，缺乏敘事的過程（it's full of isolated identities......But there are no accompanying narratives.）。因此從敘事觀點來看，在教育上培養“敘述數學”的能力遠比訓練“解決數學”的能力更能激發學習個體內心對知識的想像與體會，更具有人文價值。

肆、數學人文素養教材案例

本節將說明依據前述數學文化素養定義與指標所發展的人文數學教案如何應用於在教學現場，以體現數學人文精神於教學之中。不過必須說明的是本研究屬於初探性質，所發展的教案都僅僅以一節課為限，這是經徵詢一些教師之後認為單節教案比較能適合學校教師隨時彈性使

用。教案發展時參考密西根大學教學研究中心（Center for Research on Teaching and Learning）所揭示的教案設計準則（http://www.crlt.umich.edu/gsis/p2_5）。首先每份教案開始設計前先考慮三大要素：學習目標、學習活動設計、與檢測學習成效的策略，並針對不同情境與對象持續精進教案。

教案設計遵照六個步驟進行。首先思考要學生學到甚麼？課程結束後學生帶走甚麼？據此列出學習目標（outline learning objectives）。接著準備開場白（develop the introduction），針對主題構想有創意的開場白以吸引學生的興趣並鼓勵主動思考，引導學生進入問題情境。再來就是教學的主軸，設計學習活動（plan the specific learning activities），尤其要聚焦在什麼樣的活動可以吸引學生的目光和有哪些不同的方式可以描述主題，以激勵學生投入教學活動。教學活動完成之後必須準備幾個問題以檢測學生的理解程度（plan to check for understanding），這時要試想學生可能的回答，並備妥因應策略。最後是準備結語與預告（develop a conclusion and a preview），以簡單扼要的話語概括整個學習活動的重點。前面五個步驟構思完成之後，還須設定進程時間表（create a realistic timeline）估算每個活動流程所需時間，列出學習目標的優先順序後以做必要時之取捨。

以下針對兩件教案之實施情形做介紹與分析。

一、「費波納西數列」教學相關文獻

「費波納西數列」是一個歷史淵源流長且相當著名的數學普及概念，其知識內涵的跨度相當大，可以依據內容的深淺，從小學延伸到大學。早於 1970 年，Ainsworth（1970）就曾探討如何在小學教材之中將費波拉西數列連結到自然界的生物型態，例如鳳梨、毬果、向日葵和貝殼螺旋等等。Kaygin、Balçin、Yildiz 與 Arslan（2011）針對 30 位 8 年級學生，以一個月的時間實施以費波拉西數列為主的數學史教學，內容除說說明費波納西數列與巴斯卡三角之間的關係外，也介紹了費波納西數列與自然界之間的關聯。課程中發給每位學生一顆毬果，要求畫出毬果鱗片上的螺旋並計算螺旋數。至於費波納西數和黃金比例的關係則透過影片介紹。前後測結果顯示，不僅學生的數學成就測驗的進步顯著，在質性回饋方面非常肯定數學史融入教學和毬果的實作。Leikin 與 Winicki-Landman（2001）以費波納西數列的遞迴關係為基礎，發展出兩種適合高中生和大學生的數學定義活動，一是練習數學建模（defining by modeling），另一個是練習數學符號法則（defining by means of symbolic rules）。Leikin 與 Winicki-Landman 將這兩個數學活動使用於高中教師培育課程之中發現，這些培訓教師透過這些活動更能理解數學的後設知識（meta-mathematical knowledge）。Marchisotto（1993*a*）針對大學主修人文藝術的學生發展出一套教案，先讓學生透過臆測和驗證找出畢達哥拉斯三元數（Pythagorean triples），緊接著利用一個與波納西數列有關的幾何悖論「64=65?」（內容稍後說明），讓學生領略直覺的不可靠和數學

證明的重要，相當程度傳達出數學知識需要經驗歸納和理性論證的本質。

（一）教案內容與數學文化之相關性

「費波納西數列」教案共規劃 45 分鐘，教學內容的發展係根據四個前述的數學文化素養指標，分別是：

1. 經典名題（H-P）：歷史上與單元主題相關著名的數學問題。
2. 人文藝術（S-A: Arts）：數學在人文藝術方面的應用。
3. 觀察分析（I&G-S）：從所提供之範例進行觀察與分析。
4. 發現規律（I&G-P: Pattern）：經由觀察與分析發現範例之共同規律。

前二者屬於「文化中的數學」構面，後二者則屬於「數學中的文化」構面。

本教案以電影「達文西密碼」的羅浮宮命案做為開場。影片中羅浮宮館長因故被槍殺身亡，但在死前以自己血液在地上寫了一串數字“13-3-2-21-1-1-8-5”和一段文字“O, Draconian Devil! Oh, Lame Saint!”（啊，嚴峻的魔鬼！啊，跛足的聖人！）。課堂中希望學生注意到影片中順序已被錯置的數字串以引起他們的好奇。接著便介紹「費波納西數列」的歷史由來和問題的敘述：

> 假設每對兔子剛出生滿兩個月後即可生出一對兔子，且此後每個月都可以生出一對兔子。若一開始時只有一對兔子，則往後每個月之兔子對數分別是多少？一年後有多少對兔子？

為了確認學生理解問題的意思，教師引導學生一起算出前五個月的兔子對數，然後請學生開始自行推理計算第六、七個月的兔子對數，希望培養他們觀察規律與歸納的能力。教案設計時即已估計約五分鐘後部分學生應該能算出第六、七個月的兔子對數，但是要求出十二個月後的兔子對數對學生而言相當困難。此時教師可以提示學生觀察這些數字之間是否存在某些規律？最終希望學生能得知「費波納西數列」即為 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...，從第三項開始，每一項都是前兩項之和，以數列符號可以表示為 $F_{n+2}= F_{n+1}+ F_n$，此時再回去破解“O, Draconian Devil! Oh, Lame Saint!”所隱藏的含意。教案緊接著以各式圖片展現植物花卉中所隱藏的費波納西數列，以揭示自然界的數學密碼，例如海芋花瓣只有一瓣、延齡草有三瓣、紫羅蘭有五瓣、血根草八瓣、瓜葉菊十三瓣、多毛金光菊二十一瓣、雛菊三十四瓣。而某些向日葵品種頂上的小花蕊排列成兩組交錯的螺旋，其中一組逆時針的螺旋有二十一條，另一組順時針的螺旋有三十四條，恰為費波納西數列之相鄰兩項。

除培養觀察規律與歸納之能力外，本教案另一個重點活動是「64=65?」的找碴活動。如圖 2，課程中展示一個動畫，將原本一個 8×8 的正方形以費波納西數列中的 3, 5, 8 為單位切割後，竟然可以重組成一個 5×13 的長方形，然後要求學生觀察其不合理之處。要破解這一謎團須具備

斜率的概念，對國一學生是一大挑戰。本份教案的最後一個活動是要求每一位學生從 1, 2 開始，自己創作一個數列，其中從第三項開始，每一項都必須跟前兩項相關。這個活動的目的是測試學生對於遞迴概念的理解程度，並觀察是否能掌握數字規律。

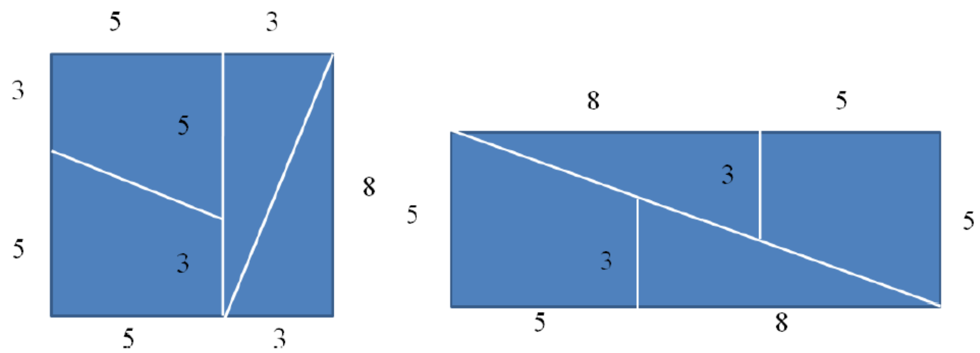

圖 2　「64=65?」找碴活動文化

（二）教案實施現場觀察

由於這份教案只有 45 分鐘，屬於短時間的教學活動，無法期望能大幅度地改變學生的知識、情意或技能，所以透過前後測以檢視本份教案成效的研究方式並不適當，因而本研究改從學生上課反應、學習心得與數列創作三方面觀察學習成效。

經分析教學影帶和學生心得與數列創作成果發現，學生大都能理解「費波納西數列」的遞迴關係，且對教學內容都給予正面回饋。26 位學生在學習單的回覆內容見表 3 和表 4。

表 3

學生對於教案妥適性的回應

學習單問題	是（人數/總人數）	否（人數/總人數）
這次教學活動是否有助於你對「費波納西數列」的理解？	25/26	1/26
這次教學活動是否能引起你對「數列」的學習興趣？	23/26	3/26
這次教學活動的難易度是否適當？	23/26	3/26

表 4

學生對於教案內容的回應

學習單問題	回覆內容（人數）
這次教學活動我最喜歡的內容	達文西密碼影片（16）
	費波納西數列的規律（4）
	64=65?動畫（3）
這次教學活動我最不喜歡的內容是	沒有不喜歡的內容（24）
	兔字繁殖的規律（1）
	圖形（1）
這次教學活動我覺得最有收穫的內容	理解費波納西數列的規律（14）
	64=65?動畫（3）
	生活與自然界中的數列（3）
	可以自己創作數列（1）
	可以動腦思考（1）
	有趣的問題（1）
	認識一位數學家（1）

表 3 顯示絕大部分學生對於教案有極高滿意度，少部分學生覺得推理思考的部分太難。但是從教學影片可以發現當時教師給予讓學生進行觀察與分析的時間不夠充分，操作與思考的時間似乎不足，當發現學生計算兔子的對數有困難之後，就直接寫出第六、七個月的兔子對數，再讓學生觀察遞迴規則，沒有完整傳達當初設計教案時計畫先培養學生觀察歸納，再進行推理演算的理念，所以在學習單中學生甚少主動提到規律的發現與歸納的驚喜，在情意面向的效果上不如預期。另外從課後學習單也發現甚少學生主動提到植物花卉中所隱藏的費波納西數列，這與 Kaygin 等人（2011）的研究發現不同。反而是「64=65?」動畫的找碴活動相當吸引學生的注意力。除學習單中有 6 位學生提到之外，在最後的開放式問題中許多學生表示對此活動印象深刻，例如甲生在學習回饋單中表示：

> 我覺得今天這個活動整個來講是還不錯，當中有一部份是說有一個 8×8 的正方形分 4 塊，再合起來後又變成了 13×5 的長方形。正常來說面積是不變的，但是「13×5=8×8」? 當下我超認真在思考（我後來心裡還想說，嗯~我頭腦的皺紋又要多幾條了呢!!>.<），但還是不懂。到老師講解完才了解的……。

至於數列創作活動也得到學生相當大的迴響，可以看見學生的創意。乙生提到他設計了一組數列：「$1, 2, -1, 6, -7, \ldots\ldots$」，其規律是「前項減後項再乘前項」，也就是 $a_{n+2} = (a_n - a_{n+1}) \times a_n$

（也就是(1–2)×1=–1、(2–(–1)×2=6、(–1–6)×(–1)=7, …）。乙生提到因為這堂課讓我更了解數列規則的構成。另一位丙生則表示：

> 今天這個教學活動感覺有點像大學，MT（意指數學老師）一整個很有教授的 fu，帥爆了♥♥♥。今天提到了費波納西數列，是一個有按規律的數列，1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34，1+2=3, 2+3=5, …在剩下 10 min，MT 也讓我們自行創造自己的數列!!嘻嘻。HC 數列⇒1, 2, 1/2, 4, 1/8, 32, 1/256, 8192, …It’s a magic~~Ha!

丙生的數列一收一放，其規則是 $a_{n+2}=a_n/a_{n+1}$，其中奇數項子數列{1, 1/2, 1/8, 1/256,…}收斂到 0，偶數項子數列{2, 4, 32, 8192, …}則發散至無限大，相當具有創意。從學生的回饋意見可以看出許多學生能透過範例所供的歸納觀察，掌握數字遞迴的概念，對於能創作屬於自己的數列相當滿意，符合教案所設定之「數學中的文化」指標。即使有些數列並沒有特別有趣的性質，但是卻充滿個人的成就感。

（三）教案反思

根據整個教案實施情形和學生學習單的反應可以看出，本份教案在激發學生對問題的好奇心和培養他們觀察數列的規律與歸納能力方面是成功的。只是訓練問題推理能力的成效不如預期。這可能是由於任課教師擔心授課時間緊迫，因而在沒有提供足夠時間讓學生進行探究推理的情形下，直接給出第六、七個月的兔子對數，導致學生沒有機會體驗歸納思考的樂趣。另外從試教影片觀察也發現，課堂上師生的互動不夠熱絡，學生似乎相當拘謹，這可能是由於有攝影機在教學現場的緣故。即使攝影機只從教室後方拍攝，學生仍無法自在地學習，這是未來進行類似研究時須謹慎處理的問題。不過，學生個人創作數列的活動則相當成功，可以看出學生對於自己能依據遞迴規則製造數列相當滿意，在數學文化中的觀察分析（I&G-S）和發現規律（I&G-P）這兩個指標上面有明顯成長。雖然在試教過程中學生沒能有機會主動發現與歸納費波納西數列的規律，以至於難以感受學習所帶來的驚喜，但這自創數列的活動某種程度可以在情意面向上稍微彌補。另一點值得思考的是，本教案目標之一是學生能領悟自然界隱藏數學密碼的奧妙，但學生這方面的回饋並不多。很有可能學生甚少接觸這些植物，且課堂上只有顯示植物圖片，並未如 Kaygin 等人（2011）的教學方式，讓學生實際觀察植物，以至於感受不深。若可能的話，或許可以進行數學與生物的跨領域教學帶學生到野外做植物觀察，方能實踐有感學習。

二、「霍爾問題」教案相關文獻

對高中生而言條件機率是偏艱澀的一個單元，其困難之處在於對題意無法理解，或是學完古典機率之後，經常以古典機率的思考方式去解決條件機率的問題，以至於難以理解問題所定

義的情境，或者忽略問題所定義的關鍵情境。由於條件機率問題的答案經常違反直覺，因此學生難以掌握（Tomlinson & Quinn, 1997）。Fischbein 與 Gazit（1984）觀察 5-7（10-12 歲）年級的小學生發現，他們對於物件「取出放回」和「取出不放回」的條件感到困擾。Tarr 與 Jones（1997）針對 4-8 年級（9-13 歲）的小學生和中學生實施質性訪談分析發現，學生的思考模式可以區分為「主觀判斷」、「前後事件相關性」、「非正式量化推理」和「數值推理」等四個層次。有鑑於學生對於條件機率的迷思概念可能與教師引導方式有關，且學生學習困難或許是在情境脈絡的認知思考面向而非數學面向，Elbehary（2020）因而邀請 68 位參與數學師資教育學程的大學生，從認知心理學的角度，透過兩個與條件機率相關的不確定性問題和後續訪談理解這些職前教師的思考模式。結果發現，大約只有 6%的職前教師屬於理性思考者（rational thinker），也就是能了解在不確定性條件下判斷出如何剔除不需要的樣本空間，並考慮條件機率的情況，使用給定的條件以調整他們的估計。

實際上，Falk（1986）很早就很具體提出學生在條件機率上容易誤解的三種錯誤。一是無法判斷"在 A 事件發生的條件之下，B 事件發生的機率"和"在 B 事件發生的條件之下，A 事件發生的機率"這兩個問題之間的差別（confusion of the inverse）。二是以「因果推論」去解讀「條件推論」（interpreting conditionality as causality）。例如盒中有兩個白球和兩個黑球，隨機先取一球不放回之後再取一球，請問已知第二球是白球的條件下，第一球也是白色的機率是多少。許多學生認為既然已知第二球是白色，怎麼可能不知道第一球是白色的機率，或者認為在第一球尚未取出的情形之下，怎會已知第二球是白色？受因果推論的干擾因而難以理解這樣的問題情境。殊不知，這種「反推理」問題可以應用於許多已經知道結果而去反推可能發生原因的現實生活事件之中。再者是對條件機率的樣本判斷有誤。例如知名的「三卡問題」（three-card problem）：

> 一頂帽子中藏著三張卡片，一張兩面都是藍色，另一張兩面都是綠色，第三張一面是藍色而另一面是綠色。我們隨機從帽中拿出一張卡片並將其放到桌上，已知正面是藍色，請問這張卡片反面也是藍色的機率是多少？

部份學生以古典機率理論判斷，因為只有一張卡片的兩面都是藍色，所以答案是三分之一。另一部份學生稍具條件機率的概念，排除雙面都是綠色的卡片，因而認為剩下兩張中選到兩面都是藍色的機率是二分之一。事實上，這兩種思考都是忽略條件機率問題中的關鍵情境。任意抽出的每張牌都有兩面，若在這兩面分別標示 1 和 2 以區分，藍綠色那張藍色面標示為 1，綠色面標示為 2，則任意抽出一張牌放在桌上的樣本空間共有（正面藍 1，反面藍 2）、（正面藍 2，反面藍 1）、（正面藍 1，反面綠 2）、（正面綠 2，反面藍 1）、（正面綠 1，反面綠 2）、（正面綠 2，反面綠 1）等六種情形，而不是只有三種。由於根據問題的條件，抽出的牌其正面是藍色，所以

排除（正面綠 2，反面藍 1）、（正面綠 1，反面綠 2）、（正面綠 2，反面綠 1）等三種情形，而在剩下三種樣本中只有兩種符合題意要求，因此機率是三分之二。這種推理方式也可以透過樹狀圖完成，學生可能更容易理解。本研究就試圖以「霍爾問題」（Monty Hall problem）配合樹狀圖引導學生理解條件機率的關鍵概念。

「霍爾問題」源起於 1960 年代美國的一個電視益智節目「我們來打個商量」（Let's make a deal）。在這遊戲中有三扇門，其中一扇門後面有一輛車，其餘兩扇門後面則是一隻山羊，主持人知道哪一扇門後面有汽車。一開始主持人會要求你先在三扇門中選擇其中一扇，當你選擇了一扇門後，由於主持人知道門後面有什麼，因此故意開啟了其中一扇後面有山羊的門，然後問你：「換」或「不換」？。其實真正電視節目中是不允許更換選擇的，前述問題是加州大學柏克萊分校統計學教授 Steve Selvin 於 1975 年 2 月寄給期刊《American Statistician》的改編版本，並問「換」和「不換」哪一種獲得汽車的機率較高。這是一個條件機率問題（三扇門中，在已經知道某扇門沒有獎品的條件下，決定不換和決定更換選擇的機率各是多少），但是當初許多數學家與統計學家為此爭論不休，一派主張更換機率較高，並給出正確的計算結果。但另一派則主張當主持人打開一扇門之後，兩扇門中只有一扇門有汽車，「換」和「不換」獲得汽車的機率都是二分之一，以這簡單古典機率概念反駁主張更換的說法，包括連知名數學家 Paul Erdős 也是抱持這看法。這問題正確的選擇其實是「換」，不過 Granberg（1999）發現，大多數的大學生（79%的中國大陸學生、87%的巴西學生、83%的美國學生和 84%的瑞典學生）都決定「不換」，為何這些具備不同文化背景的學生其選擇趨勢竟然都相當一致？Tubau、Aguilar-Lleyda 與 Johnson（2015）認為，一般人會在這問題做出錯誤決策的主要原因有二：一是基於情緒的選擇偏見（emotional-based choice biases），二是理解和表徵機率問題的認知侷限（cognitive limitations in understanding and representing probabilities），因而「霍爾問題」經常被用於決策心理學的研究。例如 Glymour（2001）將「霍爾問題」形容為一個「對撞結構」（collider structure）的問題。原本「獎品在哪一道門」和「觀眾選擇哪一道門」是兩個獨立的因素，但由於「主持人打開一道門」這一變因而對撞（「獎品位置」→「主持人開門」←「觀眾選擇」），產生了統計上的相關性。可見這問題相當適合做為批判思考和邏輯推理的案例。

（一）教案內容

「霍爾問題」教案共規劃五十分鐘，實施對象是已具備古典機率概念的高中生，以四個數學文化素養指標為基礎：

1. 經典名題（H-P）：歷史上與單元主題相關著名的數學問題。
2. 觀察分析（I&G-S）：從所提供之範例進行觀察與分析。
3. 邏輯論證（D&P-L）：經由邏輯論證確認數學性質之正確性。

4. 發現規律（I&G-P）：經由觀察與分析發現範例之共同規律。

第一個屬於「文化中的數學」構面，其餘三個屬於「數學中的文化」構面。

在「規劃學習活動」階段，教師首先拿出三個信封袋，其中 2 號信封裝有獎品，教師先指定某位學生請他（她）猜哪一個信封袋裡面有獎品。當學生選定之後，由於教師知道哪一個信封有獎品，因此故意打開一個不含獎品的信封，並問學生「換」或「不換」。無論該位學生決定「換」或「不換」，都要說出理由。有些學生隨機決定換或不換，另有些學生可能認為機率都一樣。若學生猜中則將獎品送出，若不中則依據上述流程繼續。如此程序進行 10 次，並紀錄「換」或「不換」各猜中幾次。這一階段結束後教師問學生「換」或「不換」的看法，這時學生可能依據經驗法則回答問題。為蒐集更多的實驗樣本，本教案使用加州大學聖地牙哥分校數學系一個關於霍爾問題的模擬網站（https://math.ucsd.edu/~crypto/Monty/monty.html），網站中可以快速且無次數限制地重複霍爾遊戲，短時間可以累積大量實驗樣本。學生會逐漸發現選擇「換」的中獎機率較高。於是教師請學生們思考為什麼選擇「換」得到汽車的機率較高，並請他們透過小組討論提出解釋。當個組各提出解釋之後，教師則透過樹狀圖和列聯表進一步說明。由圖 3 的樹狀圖可以知道，選擇「換」而得到汽車的機率是 $\frac{2}{6}/(\frac{1}{6}+\frac{2}{6})=\frac{2}{3}$ ，選擇「不換」得到汽車的機率只有 $\frac{1}{6}/(\frac{1}{6}+\frac{2}{6})=\frac{1}{3}$。另一方面從列聯表（表 5）也可以看出「不換」中獎機率是 $\frac{1}{3}$，而「換」的中獎機率是 $\frac{2}{3}$ 。

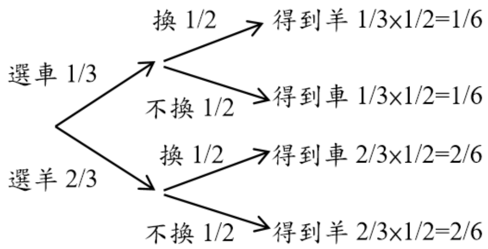

圖 3　霍爾問題 3 門情形樹狀圖

表 5

霍爾問題3門情形列聯表

選擇第 2 個門且決定不換				選擇第 2 個門且決定換			
	選擇 1	選擇 2	選擇 3		選擇 1	選擇 2	選擇 3
獎品在 1	輸			獎品在 1	贏		
獎品在 2		贏		獎品在 2		輸	
獎品在 3			輸	獎品在 3			贏

在「測試學生的理解程度」階段，教師的推廣問題是：

> 如果今天有 1000 扇門，只有一輛汽車放在其中一扇門後面。如果你選擇 1 扇門，而知道獎品所在的主持人打開其他 998 扇門，此刻只有你原本選擇的那扇門和另外一扇門，你會選擇「換」還是「不換」？選擇「換」和「不換」獲得汽車的機率是多少？

這問題在測試學生的邏輯推理，看他們是否能夠舉一反三。但由於從 3 扇門直接跳到 1000 扇門，恐怕學生在概念上難以連接，教師先以 4 扇門和 5 扇門做為「前導組體」(advanced organizer)，希望學生能從 4 扇門和 5 扇門出發，逐步猜測推論出必須選擇「換」，且獲得汽車的機率是 999/1000。

（二）教案實施現場觀察

條件機率問題本身不容易根據直覺判斷，本質上比古典機率困難。在這 50 分鐘的教學當中無法期望學生對於條件機率能有全面性的理解，故本教案旨在觀察學生是否能掌握條件機率的推理規律以進一步計算 1000 扇門時的情形。本次教案實施的場合是某次暑假高中數學營隊活動，由本文作者親自進行教學，參加成員從高一到高三，共有 37 人。從最後蒐集的學習單中得知，

其中 20 人正確回答推廣問題，一開始盲目選一扇門會抽中汽車的機率是 $\frac{1}{1000}$，抽中羊的機率是 $\frac{999}{1000}$，無論選哪一扇門「換」與「不換」的機率各是 $\frac{1}{2}$，因此共有四種情形：

1. 選到車決定「換」會得到羊，機率為 $\frac{1}{1000}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2000}$ ……（A）
2. 選到車決定「不換」會得到車，機率為 $\frac{1}{1000}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2000}$ …（B）
3. 選到羊決定「換」會得到車，機率為 $\frac{999}{1000}\times\frac{1}{2}=\frac{999}{2000}$ ……（C）
4. 選到羊決定「不換」會得到羊，機率為 $\frac{999}{1000}\times\frac{1}{2}=\frac{999}{2000}$ …（D）

因此無論選哪一扇門，若決定「換」而得到車的機率為 $\frac{(C)}{(A)+(C)}=\frac{\frac{999}{2000}}{\frac{1}{2000}+\frac{999}{2000}}=\frac{999}{1000}$，而決定「不換」會得到車的機率為 $\frac{(B)}{(B)+(D)}=\frac{\frac{1}{2000}}{\frac{1}{2000}+\frac{999}{2000}}=\frac{1}{1000}$。圖 4 是某生學習單的內容。

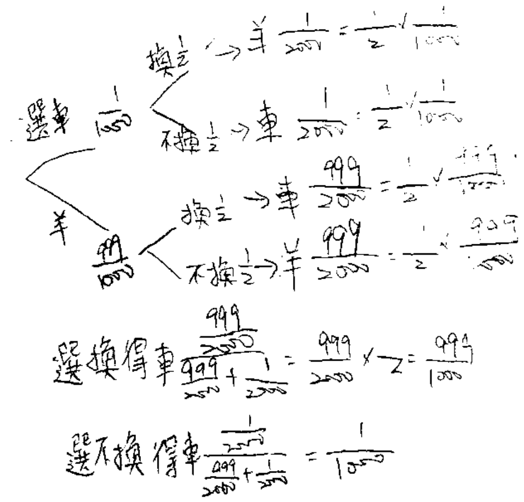

圖 4　學生計算條件機率樹狀圖

19 位成功回答推廣性問題的學生對於這次學習活動抱持較高的滿意度，回饋意見大致上可以分為兩類，一類是對於機率問題的思考更為深入，例如 A 生說之前對於條件機率都只知道怎麼算，但都不曾瞭解為什麼，經過這次活動，覺得這種邏輯的問題比純計算的數學有更多思考上的樂趣。另一類意見是不要輕信直覺，B 生就認為機率在不同的情況下不見得能套用同一種方法計算，C 生則說以數學的角度去看會發現結果很令人意外。不過，對於數學推導出的結果與直覺的落差，仍有學生覺得「以現實角度看來仍然有點難以理解」（D 生）。從以上回應可以看出，對於條件機率計算出違背直覺的結果，有人讚嘆，也有人仍抱持懷疑態度。另外 17 人只能部分回答，甚至完全無法回答問題。至於無法回答推廣性問題的學生，大部分的困難分成兩類，一部分是以乘法律求獨立事件發生機率的概念薄弱，另一部分則是仍無法掌握樹狀圖的推理過程。這些人的回應就較為保守或是消極。E 生就表示雖然照算式還是能算出來，但是還無法掌握規律。

（三）教案反思

對一般高中學生而言，與古典機率相較，條件機率屬於比較難以理解的單元，所以本教案嘗試從一個有趣的問題開始引發學生對直覺的懷疑與思考，再經由發現規律與邏輯推理，洞悉直覺的盲點。以試教結果而論，大約一半學生在觀察分析（I&G-S）、邏輯論證（D&P-L）和發現規律（I&G-P）這三個數學文化能力指標上有所進步，雖已達成部分成效，但仍有接近一半的學生無法掌握條件機率的思考過程。究其原因有二，首先是學生成員的年級別不一，從高一到高三，從第一類組到第三類組都有，所以可能導致試教結果差異性大。其次，即使教案試教時即使已經以 4 扇門和 5 扇門的情形讓學生學習推廣，但短短五十分鐘時間可能仍不足以讓部分學生理解條件機率之內涵和規律並進行推理。針對第二個原因，未來修編教案時可以考慮將施

教時間延伸為一百分鐘，讓學生有比較充分的時間思考，並納入條件機率的公式解法（在事件 A 已發生之條件下，B 事件發生的機率 $P(B|A)=\dfrac{n(B\cap A)}{n(A)}$ ），如此或許學生能夠從具體到抽象地認識條件機率。

另一個更值得思考的議題但在本教案中沒有處理的問題是「如何讓學生真正理解條件機率和古典機率的差別？」。古典機率是在完全隨機之下所產生的結果，而條件機率卻是在特定條件之下所產生的結果，已經改變原本的樣本空間，即使學生能順利以樹狀圖算出機率，對於這一點學生可能也難以體會。黃文璋（2010）特別強調“機率很難，尤其條件機率”（p. 14），條件機率的特性是機率值會因條件而改變。如前面所提「三卡問題」，當我們說「隨機從帽中拿出一張卡片並將其放到桌上」，這時是古典機率，每張卡片被抽到的機率是三分之一。但是當我們說「已知正面是藍色」時，後面的問題就變成條件機率問題，樣本空間已經因這句話而改變，其間細微差異不容易體會。所以“在應用機率，特別是處理條件機率時，須得很謹慎，否則極易犯錯”（黃文璋，2010，p. 27）。

伍、結論

傳統的數學教學最為人詬病的就是缺乏情境脈絡，直接從抽象的數學觀念出發，以至於無法引起學生學習動機，而由於數學文化強調數學知識的人文、社會和歷史脈絡，引入數學文化恰可以彌補此一缺失。本研究基於數學人文精神發展出數學文化素養的教案，並實地針對國中生與高中生進行教學觀察。初步觀察結果發現，學生對於這兩份數學文化教案均表現出高度肯定，也能從教學活動中掌握所與傳達的數學規律。不過仍有未臻理想之處。「費波納西數列」教案一開始以「電影達文西密碼」的片段吸引學生注意，緊接著透過「兔子繁衍問題」讓學生學習掌握數列的遞迴規律，之後介紹植物界的費波納西數列和「64=65?」活動深化學生對費波納西數列的認識，最後要求學生依據給定的遞迴規則（從第三項起，每一項都跟前兩項相關）自行創作數列。觀察結果顯示，學生對於費波納西數列的性質和「64=65?」活動印象深刻，而自行創作數列的活動在認知和情意兩方面學生都表示滿意，但是很少學生在回饋單上主動提到歸納推理，因此對於培養學生歸納推理的的成效不如預期。這可能是由於授課教師的時間考量，並沒有給學生充分時間探索第六、七個月的兔子對數，反而是在學生尚未計算出之前直接說出結果所致。另外，學生對於自然界植物中所隱藏的費波納西數列密碼的印象不深，這可能是課堂是只是以圖片介紹，沒有讓學生親自接觸這些植物有關。根據 Kaygin 等人（2011）的研究結果，由於學生實際觀察並計算毬果鱗片的螺旋，學生被自然界的數學密碼所吸引。因此未來可以發展跨領域教學教案，讓學生實地到野外做植物觀察。再者，Marchisotto（1993*a*）透過讓學生裁切卡片親身發現「64=65?」活動中視覺經驗的盲點，進而體認幾何證明的重要。但由於本教案

對象是國一學生，且囿於時間關係因而並未實施。未來若針對國二以上學生，可以考慮在教案中納入此動手做活動，強化有感學習。

「霍爾遊戲」教案則是透過有趣的遊戲，讓學生體驗條件機率不能只依據他們在古典機率中所習得的規則求解。為了使學生有感，教案中先從小樣本的信封抽獎開始，再進階到大樣本的網站遊戲，讓學生逐步體驗到「換」與「不換」的機率確實有所差別。接著透過樹狀圖和列聯表進行推理分析，以驗證（但非證明）「換」的策略確實贏得獎品的機率較高。為檢驗學生的理解程度，先以 4 扇門和 5 扇門做為「前導組體」讓學生熟悉樹狀圖的結構和策略，再要求他們計算出當有 1000 扇門時選擇「換」的策略所獲得汽車的機率。觀察發現，只有 54%的學生能正確回答 1000 扇門的推廣問題，其他人只能部分回答，甚至完全無法回答問題。這結果證實許多文獻所提到學生學習條件機率時所遭遇的困難，包括違反直覺、情境條件解讀錯誤和無法掌握正確的樣本空間等等。可見 50 分鐘的教案雖然可以讓學生理解單一問題，但是卻沒能幫助他們掌握問題的一般性。Burns 與 Wieth（2004）的心理實驗結果顯示，做出錯誤選擇的原因是沒能理解這問題的「對撞結構」所隱藏的意涵，即 Glymour（2001）所說的，「獎品在哪一道門」和「觀眾選擇哪一道門」兩個看似獨立的因素，因為「主持人打開哪一道門」而產生對撞。但若能經過提醒與練習，受試者在類似問題的表現上會更好。此外 Tomlinson 與 Quinn（1997）指出，學習條件機率時如果要讓學生獲得理性判斷所必需的數學技能，教學時必須專注於挑戰個人主觀偏見，並藉由認知心理的啟發方式，適時展示機率推理的力量。所以若將教案延伸為一百分鐘，除樹狀圖和列聯表的教學之外，是否應納入條件機率的公式解法，以讓學生理解數學以簡馭繁的思維特性，這有待未來研究進一步證實。

由於本研究所發展的教案時間只有短短一節課，無法進行長時間教學實驗並觀察成效，所以得到的研究結果其推廣的價值受到限制。當初之所以只發展單節教案的主要考量在於學校教師不可能長時間進行數學文化素養的教學，因此單節教案比較適合學校教師隨時彈性使用，屬於實務上的考量。有鑑於許多研究都已指出融入數學史的教學對於學生的數學知識信念或數學觀有正面的影響（Depaepe, De Corte, & Verschaffel, 2016; Liu, 2009, 2014），而目前許多高中均開設數學選修課程，未來將可以進一步發展一整學期的數學文化素養課程，並觀察此課程對於發展高中學生的數學知識觀點有何助益。

誌謝

本文是科技部專題研究計畫 MOST 105-2511-S-167-001-MY3 研究成果之一部份，感謝科技部之經費支助和匿名審查者與編輯委員所給予之建議和修正。本文所表達之論述係作者個人觀點，不代表科技部之立場。

參考文獻

丘成桐（2013）。一本具國際觀的數學普及雜誌。**數理人文，1**，1。【Yau, Shing-Tung (2013). A popular mathematics magazine with an international outlook. *Mathematics, Science, History and Culture, 1*, 1. (in Chinese)】

方延明（2007）。**數學文化**。北京：清華大學出版社。【Fang, Yen-Ming (2007). *Mathematical culture*. Beijing: Tsinghua University Press. (in Chinese)】

易南軒、王芝平（2007）。**多元視角下的數學文化**。北京：科學出版社。【I, Nan-Hsuan, & Wang, Chih-Ping (2007). *Mathematical culture in terms of multiple perspectives*. Beijing: Science Press. (in Chinese)】

黃文璋（2010）。機率應用不易。**數學傳播，34**（1），14-28。【Huang, Wen-Jang. (2010). Probability application is not easy. *Math Media*, *34*(1), 14-28. (in Chinese)】

張維忠（2011）。**數學教育中的數學文化**。上海：上海教育出版社。【Chang, Wei-Chung (2011). *Mathematics culture in mathematics education*. Shanghai: Shanghai Education Press. (in Chinese)】

劉柏宏（2015）。數學知識是真理嗎？**通識在線，58**，29-33。【Liu, Po-Hung (2015). Is mathematical knowledge the truth? *General Education Online*, *58*, 29-33. (in Chinese)】

劉柏宏（2016）。從數學與文化的關係探討數學文化素養之內涵─理論與案例分析。**臺灣數學教育期刊，3**（1），55-83。doi: 10.6278/tjme.20160413.001【Liu, Po-Hung (2016). Discourse on the constituent of literacy for mathematical culture in terms of the relationship between mathematics and culture - Theoretical and case analysis. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, *3*(1), 55-83. doi: 10.6278/tjme.20160413.001 (in Chinese)】

劉柏宏（2021）。論數學文化與數學教育的關係。**臺灣數學教育期刊，8**（1），79-88。doi:10.6278/tjme.202104_8(1).004【Liu, Po-Hung (2021). On the relationship between mathematical culture and mathematics education. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, *8*(1), 79-88. doi:10.6278/tjme. 202104_8(1).004

Ainsworth, N. (1970). An introduction to sequence: Elementary school mathematics and science enrichment. *The Arithmetic Teacher*, *17*(2), 143-145. doi: 10.5951/AT.17.2.0143

Burns, B. D., & Wieth, M. (2004). The collider principle in causal reasoning: Why the Monty Hall Dilemma is so hard. *Journal of Experimental Psychology*: *General*, *133*(3), 434-449. doi: 10.1037/0096-3445.133.3.434

Burton, L. (2009). The culture of mathematics and the mathematical culture. In O. Skovsmose, P. Valero, & O. R. Christensen (Eds.), *University science and mathematics education in transition* (pp. 157-173). New York, NY: Springer. doi: 10.1007/978-0-387-09829-6_8

Cai, J. (1995). *A cognitive analysis of U.S. and Chinese students' mathematical performance on tasks involving computation, simple problem solving, and complex problem solving*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. doi:10.2307/749940

Courant, R., & Robbins, H. (1941). *What is mathematics*? *An elementary approach to ideas and methods.* New York, NY: Oxford University Press.

Davis, P. J. (2012, June 1). Mathematics as narrative. *SIAM News*, *45*(5). https://archive.siam.org/pdf/news/1986.pdf

Depaepe, F., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2016). Mathematical epistemological beliefs. In J. A. Greene, W. A. Sandoval, & I. Bråten (Eds.), *Handbook of epistemic cognition* (pp. 147-164). New York, NY: Routledge. doi: 10.4324/9781315795225

Elbehary, S. G. A. (2020). Discussing the conditional probability from a cognitive psychological perspective. *American Journal of Educational Research*, *8*(7), 491-501. doi: 10.12691/education-8-7-7

Ernest, P. (1996, October 31). The nature of mathematics and teaching. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 9. http://socialsciences.exeter.ac.uk/education/research/centres/stem/publications/pmej/pome/pompart7.htm

Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. Albany, NY: State University of New York Press.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: Insights and difficulties. In R. Davidson & J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 292-297), Victoria, Canada: International Statistical Institute and University of Victoria.

Fischbein, E., & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, *15*, 1-24. doi: 10.1007/BF00380436

Glymour, C. (2001). *The mind's arrow: Bayes nets and graphical causal models in psychology*. Cambridge, MA: The MIT Press. https://doi.org/10.1016/S0001-6918(02)00058-6

Granberg, D. (1999). Cross-cultural comparison of responses to the Monty Hall Dilemma. *Social Behavior and Personality*, *27*(4), 431-438. doi: 10.2224/sbp.1999.27.4.431

Hadamard, J. (1945). *An essay on the psychology of invention in the mathematical field.* New York, NY: Princeton University Press.

Hersh, R. (1997). *What is mathematics, really*? Oxford, UK: Oxford University Press.

Jensen, H. J. (2002). Mathematics and painting. *Interdisciplinary Science Reviews*, *27*(1), 45-49. doi: 10.1179/030801802225000000

Kaygin, B., Balçin, B., Yildiz, C., & Arslan, S. (2011). The effect of teaching the subject of Fibonacci numbers and golden ratio through the history of mathematics. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *15*, 961-965. doi: 10.1016/j.sbspro.2011.03.221

Keyser, C. J. (1947). *Mathematics as a culture clue*. New York, NY: Scripta Mathematica.

Kline, M. (1953). *Mathematics in western culture*. New York, NY: Oxford University Press.

Kline, M. (1982). *Mathematics: The loss of certainty*. New York, NY: Oxford University Press.

Kroeber, A. L., & Kluckhohn, C. (1952). *Culture*: *A critical review of concepts and definitions*. Cambridge, MA: The Museum.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge, UK: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9781139171472

Leikin, R., & Winicki-Landman, G. (2001). Defining as a vehicle for professional development of secondary school mathematics teachers. *Mathematics Education Research Journal*, *3*, 62-73.

Liu, P.-H. (2009). History as a platform for developing college students' epistemological beliefs of mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *7*(3), 473-499. doi: 10.1007/s10763-008-9127-x

Liu, P.-H. (2014). When Liu Hui meets Archimedes: Students' epistemological and cultural interpretations of mathematics. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, *24*(8), 710-721. doi: 10.1080/10511970.2014.896837

Liu, P.-H. (2018). An international comparative study on how mathematical culture is implemented in the textbooks. In E. Barbin, U. T. Jankvist, T. H. Kjeldsen, B. Smestad, & C. Tzanakis (Eds), *Proceedings of the Eighth European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education* (pp. 345-354). Oslo, Norway: Oslo Metropolitan University.

Marchisotto, E. A. (1993*a*). Connections in mathematics: An introduction to Fibonacci via Pythagoras. *Fibonacci Quarterly*, *31*(1), 21-27.

Marchisotto, E. A. (1993*b*). Teaching mathematics humanistically: A new look at an old friend. In A. M. White (Ed.), *Essays in Humanistic mathematics* (pp. 183-190). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Tarr, J. E., & Jones, G. A. (1997). A framework for assessing middle school students' thinking in conditional probability and independence. *Mathematics Education Research Journal*, *9*, 39-59. doi: 10.1007/BF03217301

Thomas, R. S. D. (2002). Mathematics and narrative. *Mathematical Communities*, *24*(3), 43-46. doi: 10.1007/BF03024731

Tomlinson, S., & Quinn, R. (1997). Understanding conditional probability. *Teaching Statistics*, *19*(1), 2-7. doi: 10.1111/j.1467-9639.1997.tb00309.x

Tubau, E., Aguilar-Lleyda, D., & Johnson, E. D. (2015). Reasoning and choice in the Monty Hall Dilemma (MHD): Implications for improving Bayesian reasoning. *Frontiers in Psychology*, *6*, 353. doi: 10.3389/fpsyg.2015.00353

White, A. M. (1993). *Essays in Humanistic mathematics*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

White, L. A. (1947). The locus of mathematical reality: An anthropological footnote. *Philosophy of Science*, *14*(4), 289-303. doi:10.1086/286957

Wilder, R. L. (1950). The cultural basis of mathematics. In L. M. Graves, E. Hille, P. A. Smith, & O. Zariski (Eds.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Vol. 1, pp. 258-271). Providence, RI: American Mathematical Society.

Wilder, R. L. (1968). *Evolution of mathematical concepts*: *An elementary study*. New York, NY: Wiley.

Wilder, R. L. (1981). *Mathematics as a cultural system*. Oxford, UK: Pergamon Press. doi: 10.1016/C2013-0-00708-6