

蘇惠玉 (2019)。

HPM 實踐在臺灣：以《HPM 通訊》為研究個案。

臺灣數學教育期刊，6 (1)，1-26。

doi: 10.6278/tjme.201904_6(1).001

HPM 實踐在臺灣：以《HPM 通訊》為研究個案

蘇惠玉

臺北市立西松高級中學

《HPM 通訊》自 1998 年創刊至今，共發行 21 卷 185 期 798 篇文章。這些文章記錄了臺灣 HPM 實踐發展與演變的過程，同時也見證了臺灣數學教育這 20 年來的變遷。本文嘗試在臺灣數學教育變遷的脈絡下，探討臺灣 HPM 實踐的演變，並從數學教育研究計畫與研討會參與、課程綱要的變革與教學活動與數學文化素養的連結這幾個面向來論述。在分析《HPM 通訊》文章的同時，以對數單元的融入教學為例，說明臺灣 HPM 實踐在融入課程教學時層次深淺的指標。最後以數學與敘事的特性說明臺灣 HPM 實踐進路的最新轉變，期許這樣的 HPM 實踐進路，在 108 課綱強調的數學素養中，能為中學數學教師帶來課程設計的新啟發。

關鍵詞：HPM、HPM 通訊、數學文化素養、數學史

通訊作者：蘇惠玉，e-mail：suhy1022@gmail.com

收稿：2018 年 12 月 26 日；

接受刊登：2019 年 3 月 21 日。

Su, H. Y. (2019).

HPM practice in Taiwan: A case study of HPM Tongxun (HPM Newsletter).

Taiwan Journal of Mathematics Education, 6(1), 1-26.

doi: 10.6278/tjme.201904_6(1).001

HPM Practice in Taiwan: A Case Study of HPM Tongxun (HPM Newsletter)

Hui-Yu Su

Taipei Municipal Xisong High School

Since its inception in 1998, 798 articles have been published in 21 volumes and 185 issues of HPM Tongxun (HPM Newsletter). These articles have documented the process of development and evolution of HPM practice in Taiwan as well as changes in Taiwan's mathematics education over the past 20 years. This article explores the evolution of HPM practice in relation to changes in mathematics education in Taiwan by discussing mathematics education research projects, seminar participation, syllabus transformation, and the connection between teaching activities and literacy for mathematics culture. By analyzing the articles of HPM Newsletters, this study uses the teaching of logarithms as an example to explain the indicators of HPM practice, which integrates history into mathematics teaching, in Taiwan. Finally, the latest changes in approaches to HPM practice in Taiwan have incorporated mathematics and narrative characteristics. Such an approach to HPM practice is expected to provide new inspirations to curriculum designs for high school mathematics teachers in terms of the mathematical literacy emphasized by the new curriculum implemented in 2019.

Keywords: HPM, HPM Tongxun, literacy for mathematical culture, history of mathematics

Corresponding author : Hui-Yu Su , e-mail : suhy1022@gmail.com

Received : 26 December 2018;

Accepted : 21 March 2019.

壹、前言

HPM 源自 1972 年第二屆國際數學教育會議 (ICME-2) 中的一個「數學史與數學教學」的工作團隊 (a work group on “History and Pedagogy of mathematics”), 從 1984 年之後, 改以衛星會議的形式舉行, 每四年在 ICME 舉辦會議城市的臨近國家擇一城市舉辦, 同時也在 1984 年的這一場會議中, 正式更名為我們熟知的 HPM (International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics) (歐士福, 2003)。由於 2000 年的 ICMI-9 決定在日本舉辦, 因而作為衛星會議的 HPM-9 選擇在鄰近的台北, 由洪萬生負責統籌主辦。《HPM 通訊》發行人洪萬生於 1996 年首度參加國際 HPM 會議 (洪萬生, 1998a), 並將 HPM 的概念與方法引入臺灣。《HPM 通訊》原名為《台北 HPM 通訊》, 於 1998 年創刊, 原本是為 2000 年 8 月 9-14 日在台北舉行的 “HPM 2000 Taipei” 研討會而發行, 之後轉型為提供數學教師一個可以分享他們有關 HPM 實踐之心得與經驗分享的平台, 並於第 2 卷 8/9 期合刊更名為《HPM 通訊》持續發行至今。本文所謂的 HPM 實踐泛指參與 HPM 研究, 或將 HPM 研究成果應用於教學或教學活動之設計。這段期間臺灣的中學數學教育歷經了九年一貫課程綱要的動盪與改革, 2019 年又即將迎來十二年國民基本教育課程綱要所帶來的全新挑戰, 數學教師們在教學上必須隨時因應社會的變遷、課程綱要的理念與學生的需求而調整。同時, 近年來在各種教學理念與教學法紛紛出籠之際, HPM 作為數學史應用在教學上的一種方法有何變化? 作為臺灣數學教師在 HPM 實踐上, 經驗交流與增能進修最初與最專業的平台, 分析《HPM 通訊》上刊登的文章, 即可看出臺灣從 1998 至 2018 年這 21 年來, 中學數學教師因應外在環境變化時, 在 HPM 實踐上觀念與方法的改變。

本文以內容分析的方法分析《HPM 通訊》(以下簡稱通訊) 上刊登的文章, 並嘗試在臺灣數學教育變革的歷史脈絡下, 說明這些因素所帶來的在 HPM 實踐的演變, 並以實際的案例比較具體說明何謂 HPM 實踐在層次上的變化, 以及各種實踐進路不同之處; 同時在與類似刊物如美國 *Convergence* 雜誌與中國的《上海 HPM 通訊》內容分析比較下, 更可看出臺灣 HPM 實踐的特色。本文透過《HPM 通訊》文章分析論述過去 20 年臺灣在 HPM 實踐上的演變, 以此為根基, 期許能讓臺灣 HPM 實踐的參與者更加看清楚在 HPM 實踐上未來應走的方向。

貳、《HPM 通訊》及其歷史脈絡

《HPM 通訊》發行人為洪萬生, 於 1998 年 10 月發行第一期, 由蘇惠玉擔任主編, 編輯群包括蘇意雯、英家銘, 以及多位中學數學教師。原名《台北 HPM 通訊》, 發行一年之後, 於 1999 年 9 月更名為《HPM 通訊》, 時至 2018 年 11 月為止, 共發行 21 卷, 185 期, 刊登過 798 篇文

章。通訊上刊登的文章沒有設定學術門檻，「撰稿者只要針對 HPM 或數學教育等議題，順手拈來，但求文句通順、語氣平和即可（洪萬生，1998a）」。若以文章內容論述的主題來進行分類，這些文章大致可分為：數學史研究、HPM 相關、數學教育議題、數學藝術與文學、數學普及書籍評介、訊息公告、其他雜談等，「我們的論述策略是環繞著 HPM／數學史，然後，以幅射方式向外擴張，希望能儘可能涵蓋數學教育的所有相關議題（洪萬生，2003）」。主筆者除了幾位大學教授外，大多為研究生或中學數學教師。這 21 卷 185 期中，也刊登了幾次以主題來策畫的特刊，如下：

- 《算數書》特刊（第三卷第十一期）
- 再論《算數書》特刊（第五卷第二、三期合刊）
- 科普書籍書評專刊(I)（第三卷第十二期、第四卷第一期）
- John Fauvel 紀念專輯（第四卷第六期、第七期）
- 出版阿拉伯數學史專輯（第四卷第十一期、第十二期）
- 數學普及著作推介專輯(II)（第七卷第十二期）
- 「95 學年度高中數學暫行綱要」專輯（第八卷第一期）
- 數學歸納法專輯（第八卷第二、三期合刊、第四期）
- 科普數學推介專輯（第八卷第十二期）
- 海龍公式專輯（第九卷第四期）
- 《算數書》研討會特刊（第九卷第九期）
- 《數》簡特刊（第十五卷第十一期）
- 2016 Montpellier HPM 專輯（第二十卷第一、二期合刊）

從特刊的主題來看，正好也符合筆者對《HPM 通訊》文章的粗略分類。這些特刊通常針對某一主題作全面性的論述，並配合當時數學教育議題或數學史研究的時機發行。其中 2000 年通訊上刊登的《算數書》特刊，為國際數學史界第一篇《算數書》的校勘報告，當時主筆的蘇意雯、蘇俊鴻、蘇惠玉、陳鳳珠、林倉億、黃清揚與葉吉海老師也是《HPM 通訊》編輯委員中的核心成員，這些成員被道本周（Joseph W. Dauben）稱為“Tongxun Group（通訊團隊）”，加上後來加入的英家銘、陳彥宏、黃俊瑋等擔任編輯委員，這些成員同時也是臺灣 HPM 實踐的主力戰將。通訊團隊於 2012 年再度發行《數》簡特刊，這種數學史的研究特色除了讓臺灣的 HPM 團隊在國際學術上建立名聲之外，也為這些中學教師在 HPM 實踐上加入史學素養上的底蘊，成為臺灣 HPM 實踐的一大特色。

一、影響臺灣 HPM 實踐演變之因素

在通訊所有文章中，本文僅分析研究與 HPM 實踐相關之文章。首先依文章內容所涉及的

HPM 應用方式進行分類，將有關之文章分成以下幾類：

1. HPM 概念與方法：內容論述一般性的 HPM 理論與實踐方法，沒有提及教學應用之範例。
2. 提及教育關懷：在文章中有明確論述到可應用於某單元的教學中，此教學單元有明確指涉，但沒有具體的實踐方法。
3. 含實踐方法：作者在文章中有明確說明應用 HPM 研究史料的方法。
4. 中學數學史材料：雖然沒有實踐方法，但是文章的主題與內容扣緊中學數學課程中的某一單元或概念，對此單元的相關史料內容作完整的補充與說明。
5. 閱讀與文化素養應用：提及以書籍、電影等各類與數學文化有關之文本的閱讀、視聽與寫作作為教學策略之文章。

筆者依上述類型之定義對通訊文章進行挑選與分類，並以簡單的兩個時期做各種類文章在篇數上的紀錄。就時間深度而言，筆者以 2000 年 HPM 台北會議作為時間的區分點，前 4 卷（至 2001 年）時期為 HPM 引入初期，到第 4 卷為 HPM 台北會議所做的準備與研究告一段落；之後各卷的文章大都為作者們在參與研究以及個人教學上的研究與心得。這樣的分類與紀錄方式，不僅可以讓筆者看到臺灣在 HPM 實踐上的變化，更可在時間軸上配合臺灣數學教育變革的脈絡，探討這些變化的原因。表 1 為通訊中，與 HPM 實踐有關之文章的分類紀錄：

表 1

《HPM 通訊》中 HPM 相關文章分類

類別	前 4 卷篇數	卷 5~卷 21 篇數	總篇數
HPM 概念與方法	33	38	71
提及教學關懷	23	28	51
含實踐方法	4	33	37
中學數學史素材	13	47	60
閱讀與文化素養應用	0	25	25

再進一步對各種類文章的內容作進一步的分析與比較後，發現這些文章實質上伴隨著臺灣 HPM 研究與數學教育改革的風潮一起前進。這些影響中學數學教師在 HPM 實踐進路上的改變，以及直接影響他們教學現場的研究與教育的變革，包括下面幾個面向：

（一）HPM 相關研究計劃與研討會的參與

在 HPM 的概念引入臺灣之後，陸續有多位教授申請相關的教育研究計畫，譬如柳賢、林炎全以及洪萬生。以洪萬生為例，他在 1999 至 2001 年推行『古代數學文本在課堂上的使用』研究計畫（洪萬生，1991）；2002 至 2003 年推行『數學教師專業發展與 HPM』研究計畫（洪萬生，2002c）；2004 至 2005 年推行『中小學數學教師學科知識的縱深統整：以結合 HPM 的探究為進

路』(洪萬生, 2004)。由於通訊文章的主筆者多為洪萬生的學生, 亦參與這些研究計畫, 透過研究計畫形成的 HPM 社群團體的討論與分享, 讓這些參與研究者對 HPM 的理解與 PCK (Pedagogical Content Knowledge, 學科教學知識) 的增長皆達有顯著的幫助。同時, 在 2000 年的 HPM 台北會議之後, 國內的 HPM 研究與實踐案例頻繁在國際研討會上曝光。透過這些國際研討會參與者的論文摘要或心得, 《HPM 通訊》也一起見證了國際學術研究的進展。其中讓國內年輕的研究者或中學教師獲益最多的, 當屬 2004 年於台中師範學院舉辦的「Asia-Pacific HPM 2004 / 「歷史、文化與資訊時代的數學教育」研討會」, 以及 2007 年中央研究院數學研究所主辦的「利瑪竇與徐光啟合譯《幾何原本》四百週年紀念研討會」, 通訊團隊的多位教師皆參與了這兩次的研討會。研討會的參與除了讓與會的中學教師充分暴露於國際學術環境之中, 還得以分享國際研究成果。

(二) 課程綱要的變革

在 2000 年時, 臺灣中小學的數學教育課程有了根本上的變化。為回應社會各界對教育改革開放的需求, 教育部於 1998 年 9 月公布《國民中小學九年一貫課程綱要》(教育部, 1998), 2000 年公布數學科《九年一貫課程暫行綱要》, 並從一年級 (90 學年度), 七年級 (91 學年度) 開始實施。暫行綱要倉促上路之後, 由於建構式教學產生的許多問題, 於 2003 年 11 月又提出數學領域的《國民中小學九年一貫課程 (正式) 綱要》, 於 94 學年度的一、七年級開始實施 (張幼賢, 2007)。在高中端, 為配合國中小的九年一貫課程綱要, 高中部分於 2006 年實施《普通高級中學課程暫行綱要》; 之後參酌高中 95 暫綱實施的意見, 強化課程的連貫與統整, 於 2008 年發布《普通高級中學課程綱要》(教育部, 2008), 並延後一年至 99 學年度開始實施。新的課綱帶來新理念、新想法與新要求, 也為以中學教師為主的臺灣 HPM 實踐提供不同的思維, 讓 HPM 實踐策略有了更多樣的變化。

(三) 教學活動與數學文化素養的連結

隨著 108 課綱實施在即, 數學素養的議題持續延燒, 如何在教學活動中培養學生的數學素養成為熱門研習主題。再者, 從九年一貫課程到之後的 108 課綱, 中學數學教師必須開設與一般數學課程不同的多元選修特色課程, 老師的增能成為迫切的一種需求。近年來, 在中學教育現場第一線的教師之中, 也因此正瀰漫著一股改變的氛圍。這股氣氛可以從 2015 年開始第一場的「夢的 N 次方—教師專業自主社群研習」(<https://dream.k12cc.tw/>) 中感受到, 也可以 2013 年成立的數學教師社群「數學咖啡館」帶動的翻轉教育形式與分享的無數教案學習單中看到。許多的中學數學教師們在「快樂玩出數學力」的信念之下, 願意犧牲假日, 研習如何將心智地圖、數學魔術、密室逃脫遊戲、桌遊、摺紙等等融入教學, 藉此來引動學生的數學學習以及增加

學生的數學素養。另外，以閱讀與數學文化素養為訴求的活動，搭上數學小說興起的熱潮，透過近 2, 3 年來幾個團體舉辦的科普與數普書籍閱讀寫作比賽，其影響力也正滲透進校園之中。譬如勤益科技大學通識教育學院主辦的全國技專院校「文以載數」創作獎；台大科學教育發展中心主辦的「2017 台積電盃青年尬科學」的「看見數學」競賽活動，主旨為「從數學小說的閱讀過程中看見數學」，參加活動的學生以高中生為主。另一個以國高中生為主的活動為「數感實驗室」（主持人為臺灣師大賴以威）首度主辦的「2018 年數感盃青少年寫作競賽」，此競賽鼓勵學生跨領域學習，運用數學知識，培養及展現邏輯思考與文字撰寫的能力，以期提升臺灣青少年科普寫作的風氣以及對數學的興趣。在這兩股不同教學活動進路中，透過 HPM 當中固有的對文化脈絡的感知與應用，臺灣的 HPM 實踐在中學教師的創意之下，從閱讀和數學文化素養著手，也帶來新的實踐思維與形式。

本文將在第肆節中，將《HPM 通訊》中文章置於這幾個面向的脈絡之下，來考察臺灣在 HPM 實踐上的演變。不過在此之前，我們先從幾個範例來說明臺灣 HPM 實踐的手法與進路。

參、臺灣 HPM 實踐演變的範例

在所有的 798 篇文章中，很湊巧地，在不同時期有不同的教師分享了同一單元的數學史融入教學的形式與內容。第一組為三篇以對數為例的數學史融入教學，分別是〈對數雜談〉（洪誌陽，1999）、〈數學史融入教學—以對數為例〉（蘇俊鴻，2003），以及〈數學史融入教學—以對數表為例〉（林倉億，2010），因此藉由分析比較這三篇文章，可釐清臺灣在 HPM 實踐上手法與層次上的不同。另一組以機率期望值為主題，分別是〈「古代數學文本在課堂上的使用」之教學報告—機率〉（蘇意雯，2000）、〈「數學期望值」學習工作單〉（蘇慧珍，2003），以及〈機率的大秘密〉（李政憲，2010）與〈機率發展的第二樂章〉（蘇惠玉，2016），從這幾篇同一主題的文章之中，將可看到臺灣在 HPM 實踐進路上的多樣與可能性。同時，國際上亦有許多類似《HPM 通訊》的刊物，透過這些刊物內容分析，亦可大致了解臺灣的《HPM 通訊》在內容上與 HPM 實踐上的特色。

一、HPM 實踐的手法與層次之比較

在 HPM 的實踐上，運用數學史至少可以分三個層次（洪萬生，1998b）：

- (1) 說故事，對學生的人格成長會有啟發作用。
- (2) 在歷史的脈絡中比較數學家所提供的不同方法，拓寬學生的視野，培養全方位的認知能力與思考彈性。
- (3) 從歷史的角度注入數學知識活動的文化意義，在數學教育過程中實踐多元文化關懷的理想。

除此之外，數學教師實際教學時，可能更在意的是對學生學習與理解上的幫助，由數學史「滲透」進入課程單元學習的程度，亦可分出實踐上的層次。在洪萬生〈PCK vs. HPM：以兩位高中數學教師為例〉這篇論文中，以陳老師為例說明教師在 HPM 實踐上的幾個階段，第一階段對 HPM 的應用停留在「表面理解」，通常用來說說與課程相關的軼事；第二階段應用 HPM 來協助詮釋教材與教法，以利用 HPM 來補充教材為主；第三階段可以將數學史融入在教學活動之中。這三個階段通常也是對數學史有初略認識的教師在 HPM 結合 PCK 時可能經歷的階段（洪萬生，2005b）。

以對數這三篇文章為例，洪誌陽在文章中融入數學史的方式以說故事與背景史料補充為主，他在文章中提及：

對數的出現背景介紹，對學生學習也有正面的幫助。……甚至可以提及 Napier 處理的基本想法、缺點，及 Briggs 常用對數表的處理。第一張對數表花了 Napier 二十年，誰能不被震撼？這其實是一個很好的典範，學生可以從中學到，一套似乎繁瑣的理論，起源的想法是那麼簡單；而且一個想法的完成，是要堅持與毅力的（洪誌陽，1999，p. 11）。

洪誌陽以說故事與背景介紹的方式融入數學史，可算是第一層次的應用，早期的 HPM 實踐大多屬於這種層次應用，譬如在〈「古代數學文本在課堂上的應用」之教學報告：機率〉中，蘇意雯（2000）以介紹機率論問題的起源、數學家巴斯卡軼事等，單元教學時以史料的補充為主。

同樣的對數單元教中，蘇俊鴻將數學史料以學習單的方式融入教學：

希望經由此一學習單的活動，能使學生重新了解對數概念的歷史發展上，並非經由指數而來，反倒是等比數列與等差數列扮演著決定性的角色。進一步深化對數概念的認知（蘇俊鴻，2003，p. 17）

他所設計的學習單，以問題與討論的形式引導學生反思史料內容，以及學習對數運算性質，譬如在第一張學習單「Chuquet 的觀察」提問：「請試著說明 Chuquet 觀察到 Numbers 與 Denomination 之間的什麼現象？」以及「試著評論 Chuquet 這項數學研究的啟發為何？不足的地方為何？」同時在「Napier 的對數(3)」的學習單中，以問題引導學生學習本單元的數學性質：

1. 同上說明，如果取 $t = \sqrt[3]{r}$ ，則當 Q 點走到 t 時， P 點走到那裏？當 Q 點走 t^4 時， P 點走到那裏？
2. 根據上述 P 、 Q 兩點運動的對應關係，很容易觀察出 $\log 1 = 0$ 。試著利用“若任意長度的兩個區間 $[\alpha, \beta]$ ， $[\gamma, \delta]$ ，滿足 $\beta/\alpha = \delta/\gamma$ ，則 Q 點通過 $[\alpha, \beta]$ 的時間與通過 $[\gamma, \delta]$ 的時間相同。”的現象，推導出下列 $\log x$ 的性質：
 - (1) $\log(\delta/\gamma) = \log \delta - \log \gamma$ (Hint: 不妨設 $\beta = 1$)
 - (2) $\log(\beta\gamma) = \log \beta + \log \gamma$ (蘇俊鴻，2003，p. 20)

蘇俊鴻在學習單上適切地提供了數學史脈絡的反思，與數學知識上的探索，雖然應用了 HPM 來詮釋教材，不過仍偏向補充教材的形式，比較接近第二種層次的應用。這種層次的應用方式，亦可見於蘇惠玉的〈曲線下面積學習單的設計〉中，她利用相關史料中的例子來增進學生對求曲線下面積之基本概念（分割求和逼近）的理解（蘇惠玉，2004a）。

反觀林倉億（2010）的教學設計，結合教師個人 PCK 與教學經驗，「在教完對數函數的圖形之後，利用數學史來引入對數表，希冀由此讓學生體驗到前人製作對數表的堅持與辛苦」，將數學史料剪裁成以 $\log 2$ 的計算活動為主，學生在學習的過程中，可以自然地將數學史上的方法融入到自身對數的學習過程中。譬如在他的「學習單 2-1 $\log 2 = ?$ 」讓學生經由計算實際體驗數學家的想法之外，還能從教師提供的史料思考數學知識活動的社會文化意涵：

1. 拿起你的計算機，利用布里格斯的方法，多試幾個 n 看看。
2. 從流傳下來的兩人畫像，你覺得哪個人的社會地位較高？為什麼？（林倉億，2010，p. 13）

林倉億（2010）的教學與學習單設計，適切地將數學史「滲透」進入學生的課程學習之中，可說是在 HPM 實踐上的一個相當好的示範。從另一角度來看，從臺灣 HPM 實踐的時間縱向來反省，經過 20 年在 HPM 實踐上的磨練，通訊團隊的這些數學教師們，從以補充背景史料為主 HPM 實踐方式開始學習，到如今已能圓融地將數學史滲透入課程教學之中。

二、HPM 實踐進路之比較

另一組關於機率與期望值的 4 篇文章中，蘇意雯的文章為『古代數學文本在課堂上的使用』之研究計畫的成果，在此篇文章中，蘇意雯介紹機率論問題的起源、數學家巴斯卡軼事等（蘇意雯，2000）。她的數學史的融入方式，即典型的數學史使用方式之一，以史料補充知識發展脈絡或數學家事蹟為主。不過蘇意雯這篇文章有附上學生問卷的結果分析，除了預料中的正面回饋之外，仍有少部分學生認為「考試不會考」、「對學習沒有幫助」、「不會算的還是不會算」，這些通常也是以說故事或史料補充作為融入方式時常見的負面回饋。

另外一篇蘇慧珍的〈「數學期望值」學習工作單〉則是另一個研究計畫『數學教師專業發展與 HPM』的成果。她挑選歷史上數學家們對於「賭金分配」的幾種方法，引起學生探索的興趣，「一方面讓學生可以欣賞其他解法，另一方面，筆者也有意藉此觀察學生的觀念是否正確」(蘇慧珍，2003，p. 4)，她希望學生能從數學家錯誤的解決方法中，了解自己的學習困難癥結之所在(蘇慧珍，2003)，因此在關於賭金分配的歷史問題融入設計時，她認為有下列兩種方式，並選擇第 2 種方式：

1. 提問後，由學生開始討論其解法應為何，教師並適時指導。
2. 提問後，以隱匿作者名字方式舉出各種解法，讓學生判別各解法之可行性。

(蘇慧珍，2003，p. 4)

蘇慧珍的 HPM 實踐方式，也是典型的將數學史料融入課程學習的方式，只是她採取與蘇意雯不同的融入策略，在歷史的脈絡中比較數學家的方法，以達到讓學生反思的教學目標，以滲入課程教學的程度而言，當然比僅是說故事或知識背景補充要深入得多。

2007 年，通訊團隊的幾位教師與國立教育資料館(後來改為國家教育研究院)合作，在張海潮的指導下，製作數學領域〈III〉內的數學史系列共十個單元的動畫影片，由蘇意雯、蘇惠玉與陳彥宏創作數學史劇本，從此臺灣的 HPM 實踐開啟了新的可能與進路：創作數學史劇本，利用劇本的故事性，將數學發展的故事融入教學之中。這種新的實踐進路可見證於〈圓錐曲線的腳本設計〉(蘇惠玉，2007)，以及李政憲(2010)編寫的〈機率的大秘密〉。李政憲將機率與期望值相關的數學史料編成故事，融入師生的對話之中。從這些對話中，可以發現以劇本對話的形式進行的 HPM 實踐帶來的優點，亦即較容易呈現教案與學習單中看不到的學生認知過程以及認知衝突。譬如同樣是賭金分配問題脈絡，李政憲利用對話呈現了學生對此問題的認知衝突：

小翔嘟囔著：「不會算那個梅什麼的贏就好了嗎？幹嘛那麼辛苦。」

明耘接著：「因為他的朋友也有反敗為勝的機率啊！」

小翔不甘示弱：「可是他贏的機率比較大啊！」

明耘又回一句：「所以才要算兩個人贏的機率與比例啊！」 (李政憲，2010，p. 12)

這種 HPM 實踐的進路，明顯不同於蘇意雯與蘇慧珍的實踐方式，以劇本說故事的方式更可進一步發展成數學小說，更加大了 HPM 實踐的多樣性。

通訊中還有另一篇文章有相同的主題，卻有不同的實踐形式，即蘇惠玉(2016)的〈機率發展的第二樂章〉。蘇惠玉這篇文章乍看之下像是純粹的數學史發展文章，然而從文章內容可以發

現她試圖從賭金分配帶來的期望值觀念出發，將高中課程中的機率—期望值—伯努利試驗—二項分布—常態分佈曲線這條線性發展主軸中的鴻溝，以知識的發展過程賦予學習動機以及作知識點的連結（蘇惠玉，2016）。雖然這樣的實踐方式，也是典型的數學史融入手法，不過可以看出與蘇意雯及蘇慧珍兩位老師在實踐方式上的不同，蘇惠玉的這篇文章從教師個人對 PCK 的理解，整合高中課程，並以統整的方式使用於多元選修課程之中。從高中 95 暫綱開始實施的多元選修特色課程，大大開放了 HPM 實踐的可能性，較彈性的課程規劃與沒有上課進度壓力，使得教師在規劃這類課程時，可以盡情發揮教師個人的創意與專業能力。這種多元選修特色課程的實踐新進路，亦見證於通訊後期的文章，筆者將於第肆節再詳加說明。

三、國際類似刊物之比較

國際上有許多類似《HPM 通訊》的刊物，皆以增進教師對 HPM 的應用為主旨，譬如美國的 *Convergence*，以及中國的《上海 HPM 通訊》。這類型的刊物所刊登的文章，大多含有數學史素材的研究，以及教師如何應用 HPM 的教學範例。先以 *Convergence* 為例，2004 年美國數學協會（Mathematical Association of America [MAA]）與美國數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]）在考慮了數學史於教學上使用的便利需求後，合作創刊 *Convergence* 這個線上雜誌（張復凱，2004）。在 MAA 與 NCTM 出版的刊物多種刊物中，*Convergence* 聚焦在為數學教師使用數學史教學提供豐富的資源。從 2004 年第 1 卷到筆者檢索的 2019 年第 16 卷（至 2019 年 2 月），除了特定的專欄之外，共有 185 篇文章，其中提及教學應用的文章有 44 篇，其餘多為數學史素材的相關研究。

Convergence 中除了有豐富的數學史研究結果可供應用之外，更設有專欄提供數學家傳記、珍貴的原始數學文獻之圖片，以及數學概念、定義、符號等的起源，這個部分在《HPM 通訊》中較少出現，畢竟在臺灣要接觸原始的數學文獻並不是那麼容易，不過通訊中刊登過與 HPM 相關之網站的介紹，儘管有時空背景的不利條件，透過網路卻也拉近了臺灣中學教師與世界的距離。與通訊相同的是，在 *Convergence* 中亦不時刊登科學普及或數學普及類的書籍介紹與評論，同時 *Convergence* 也刊登過數學詩的創作，可見臺灣在 HPM 實踐進路上的走向，與美國 HPM 學者對 HPM 應用的方向看法是一致的，亦即應將 HPM 的應用範圍納於數學文化素養之中，以多元多樣的數學文化素養作為 HPM 實踐的進路。

在中國發行的《上海 HPM 通訊》於 2012 年創刊，由上海華東師範大學教師教育學院的汪曉勤擔任主編，編輯群與文章作者大多為他所指導的學生，並在創刊語中明確的列出他們的目的：營造純淨的學習氣氛、促進頻繁的思想交流與培育優秀的學術論文。從 2012 年第 1 卷到筆者檢索的 2018 年第 7 卷第 3 期為止，共 39 期，刊登的文章分類有刊首語、理論視角、文獻研究、教材比較、實徵研究、教學實踐等等，同樣聚焦於數學史素材的研究與實際應用 HPM 的教

學實踐。其中有關教學實踐的文章共有 85 篇，從這些文章中分析他們應用數學史的手法，可以發現與臺灣的 HPM 實踐有相當明顯的差異，這種差異筆者認為應該來自於與參與實踐的中學數學教師在數學史學習過程中的「史學素養」，亦即對待歷史文化脈絡的方式與觀點上的差異。

在創刊號的第一篇文章〈HPM 的若干研究與展望〉(汪曉勤, 2012) 中, 汪曉勤提到他認為的 HPM 實踐研究的理想模式是由大學教師完成歷史研究獲得材料, 再由大學與中學教師合作, 根據需要對材料進行加工, 最後由中學教師進行設計與實踐, 這種大學中學教師合作的模式充分體現在《上海 HPM 通訊》教學實踐的文章之中。這種模式的優點是中學教師不必擔憂數學史能力不足或是沒有資源; 然而卻容易顯現出材料與融入方式過於一致的缺點。再者由於中學教師如果沒有受過正規的數學史訓練, 在進行數學史融入教學時就容易忽略文化脈絡, 或以現今的觀點解釋歷史事件(包括數學家使用的數學形式)。因此綜觀全部 85 篇文章, 大部分的 HPM 教學實踐形式多為補充軼事或將數學證明(解法)過程歸功於某位數學家, 譬如〈HPM 視角下的「兩角和與差的和角公式」教學〉(張益明、丁倩文, 2018) 就是一種典型的呈現方式。而臺灣 HPM 實踐會由中學教師親自根據本身的 PCK 找尋適合的史料與設計學習單, 在紮實的史學素養底蘊下, 重視歷史文化脈絡, 盡量以原形式融入課程教學的形式, 這一點與中國模式在培養學生的歷史或文化素養上將會出現不同的成效。

再者, 《上海 HPM 通訊》定位於學術論文的刊登, 因此在 39 期的文章中, 僅出現過 2 篇介紹科學或數學普及的書籍。在數學文化專欄中, 除了評論大學生編劇主演話劇「牛頓與萊布尼茲之爭」之爭外, 可以發現他們的編輯群認定的「數學文化」, 比較偏向文化中的數學(mathematics in culture), 並僅看重它的歷史面向, 而缺乏一般的文化素養, 這也是臺灣與中國顯著不同之處。臺灣的 HPM 實踐進路在近年來以數學文化素養為訴求, 除了典型的數學史融入教學之外, HPM 實踐進路的多元性與中國堅持傳統的實踐方式已有顯著的差異。

肆、臺灣 HPM 實踐之演變

在通訊所有文章中, 與 HPM 實踐相關文章之分類與篇數如第貳節表格所示, 其中提及 HPM 概念與方法, 或有關教學關懷的文章差不多均勻的分布在各卷中, 但是在後期明顯見的, 增加了許多與中學數學相關素材的文章, 以及前 4 卷沒有出現過的關於閱讀與文化素材應用之文章。從分類的數量統計來看, 這 20 年來臺灣 HPM 實踐確實經歷過一些演變。然而是什麼樣的演變, 以及形成演變的原因為何, 則必須將《HPM 通訊》的這些文章, 放在臺灣教育環境變遷的歷史脈絡下, 才能釐清變化的過程並從中找出 HPM 實踐未來的新進路。

一、HPM 相關研究計劃與研討會的參與 (1999—2005)

通訊 1998 年發行至 2000 年 HPM 台北會議期間, 初期處於推廣 HPM 階段, 因此有許多文

章在為大部分身為中學教師的讀者說明將數學史材料應用於課堂的方法，以洪萬生主筆的文章居多，加上翻譯的一些國外研究論文，因此在前 4 卷中講述 HPM 概念與方法的文章特別多。到了後期，當中學教師已經熟悉 HPM 的概念之後，這類文章的數量就減少許多了，僅有不定期的文章作為方法上的啟發之用，譬如〈數學文本的問題意識〉(洪萬生, 2002b)、〈中算史中的「張本例」〉(洪萬生, 2002a)、〈如何萃取才有意義呢〉(洪萬生, 2005a)、〈數學與敘事在教育上的應用：以通識教育和 HPM 為例〉(洪萬生、林芳玫, 2009)、〈高觀點、HPM 與拱心石課程〉(洪萬生, 2012) 等等。初期參與通訊文章寫作的中學教師，還沒有 HPM 實踐的經驗，僅介紹國高中課程中相關的數學史料與研究成果，同時在文章中附上 HPM 使用建議，以及宣導數學史融入的「好處」，因此前 4 卷這類附有「教學關懷」的文章偏多，至第 4 卷結束時共有 23 篇文章。從這幾篇文章可以發現，此時的 HPM 實踐的想法還停留在以說故事引起學習興趣，或作為補充教材呈現。

如前所述，在 HPM 的概念引入臺灣之後的幾年內，相繼有一些與 HPM 有關的研究計畫推行，通訊團隊成員大多參加洪萬生主持的三個研究計畫。其中『古代數學文本在課堂上的使用』研究計畫(1999-2001)，訓練參與計畫的中學教師以發展教案或學習工作單(第二年)的方式，在課堂上適當地融入古代數學文本(洪萬生, 2001)，此一計畫共產生 29 篇教案或學習工作單，相關之成果有一些刊登於通訊上，譬如前述的〈「古代數學文本在課堂上的應用」之教學報告：機率〉。此計畫成果刊登的幾篇文章中已透露出嘗試將史料結合單元教學的想法，譬如在〈不一樣的組合數〉中，蘇俊鴻(2001)認為「汪萊將組合數定義成三角堆的和……在實際教學中也具體可行，帶給我們另一種體會組合概念的可能」(p. 12)。以及在〈三角函數公式的托勒密方法〉中，蘇惠玉(2001)曾舉例從托勒密定理得到的正弦與餘弦定理的證明，「簡單易懂，可以當作教學上的參考」(p. 14)。

2002 年洪萬生再度推行『數學教師專業發展與 HPM』研究計畫，為參與的教師提供實作研究的機會，讓他們透過成員間的互動、學習，增進自身的數學史素養，並結合 PCK 與 HPM 來引動教師專業成長。研究團隊部分教師更將成果發表於 2004 年的「歷史、文化與資訊時代的數學教育」亞太地區 HPM 會議上，譬如蘇俊鴻的〈數學史融入數學教學：以數學歸納法為例〉(蘇俊鴻, 2004)，以及蘇惠玉的〈圓錐曲線的教學設計〉(蘇惠玉, 2004b)，這兩篇論文的部分內容亦可見諸於通訊之中。同時，因應這個研究計畫的成果而刊登的文章還有前述的〈「數學期望值」學習工作單〉。

當這些中學教師隨著教學年資的增加，能夠更精準的掌握 PCK，透過研究計畫與研討會參與的磨練，對 HPM 的實踐手法也更加成熟多元。從這幾篇文章中可以發現，此時這些中學教師開始從 HPM 的角度切入，找出在當前的中學數學課程中，在教學與學習上會產生的問題，並從

數學史中尋找解決之道。譬如，蘇俊鴻在論文中從學生學習數學歸納法時，在概念上較易出現的困難之處出發，希望「藉由數學史上對比的實際例子，讓學生感受到學習數學歸納法的必要性，期能彌補以往之不足，為數學歸納法的教學，提供另一種可能的實施方案」。他首先比較 Wallis 與 Pascal 兩人的做法，讓學生思考歸納法與數學歸納法之異同，藉此引起學生學習動機；再利用課本例子理解與掌握概念與技巧；最後以皮亞諾公設 (Peano axioms) 作後設思考 (蘇俊鴻，2004)。而蘇惠玉在〈圓錐曲線的教學設計〉中，反思教材呈現與教學時學生容易產生疑問或錯誤之處，藉由史料的引入讓學生從幾何的角度對圓錐曲線有一個較全面的概念理解，以阿波羅尼斯命題中的正焦弦統整圓錐曲線的表徵，對課本的定義與概念賦與學習的動機與意義 (蘇惠玉，2004)。

這段期間臺灣的中學教師在 HPM 實踐概念與方法上開始轉變，從筆者與其他教師經驗的回顧可以發現，轉變的契機始於參與這些教育研究計畫與研討會。參與這些計畫的中學教師之間，形成一個 HPM 的研究社群，在此社群中提出問題、研究、討論，以及完成成果報告，無疑地對這些中學教師的 PCK 以及 HPM 實踐能力都有所提升。對 PCK 的察覺與反思，促使教師在將數學史引進教學時，非常注意其內容與教材單元、學生認知之配合。在這種情況下，數學教師從 HPM 出發，可以有機地結合了 HPM 與 PCK，對數學文本詮釋、教材內容與學生學習經驗的『統整』，則一個清晰可見的指標 (洪萬生，2005b)，這些指標見證於與對數相關的三篇文章之中。另一個促成轉變的因素為學習工作單 (worksheets) 的引用：

其設計通常圍繞著簡短的歷史選粹 (historical extracts)，伴隨著歷史背景的說明，再輔以了解數學知識內容的問題、所涉數學議題的討論、今昔解法或處理的比較，以及這些選粹中的題解 (solving problems) 或它們所引發的類似題解 (洪萬生，1999，p. 2)。

根據 Barbara Jaworski 的研究，「學習工作單」對於設計者 (教師) 而言是一種「反思的工具」(reflective tool)，而對於研究者來說，則是一種『分析的工具』(analytic tool) (Jaworski, 2001，引自洪萬生，2005b)。教師在進行 HPM 實踐時所用學習單設計時，必須思考該問甚麼樣的問題才能達到使用這張學習單的教學目標，並且能有較好的教學成效，因此目前學習單仍是臺灣 HPM 實踐的重要工具。然而如果學習單附上的數學史訊息通常過於龐大，對學生閱讀理解容易造成負擔，反而形成另一種障礙，如蘇俊鴻與蘇惠玉在前兩篇論文中設計引用的學習工作單，實施時難免得到如當時在蘇意雯博士論文《數學教師專業發展的一個面向：數學史融入數學教學之實作與研究》中，所呈現的學生心得一樣的反應：「數學史的內容太難了 (某些)，根本不能細說，也很難了解，歷史跟數學混在一起，變更複雜了 (蘇意雯，2004，引自林倉億，2012b，p. 6)」。

二、課程綱要的變革（2003—2014）

2003 年發布《國民中小學九年一貫課程（正式）綱要》取代問題叢生的 2000 年版的《九年一貫課程暫行綱要》時，除了改正《暫綱》在學生學習上因建構式學習產生的問題之外，在「基本理念」的陳述上也有很大的不同。《正綱》強調基於所述之理念，需要長期及多面向的關照，這些面向如素質指標、能力發展、教材教法、教師關懷、給家長的建議，以及數學史的重要性：

在教師教學裡，引進與主題相關的數學史題材，對學童的學習會有很正面的意義，尤其能協助學童將抽象觀念具體化。因為不論在科技應用層面或思想突破方面，數學重要概念的演進確有其實用面的考量，因此提供具啟發性的數學史方面的讀物實屬必要（教育部，2003，p. 22）。

2000 年公布的《暫綱》中並沒有出現與「數學史」相關的內容，然而在 2003 年的《正綱》中會強調數學史的重要，表示當時臺灣幾個團隊在數學史應用於數學教學上的努力與成效，已獲得某種程度的認可，這些團隊中當然包含了洪萬生領導的通訊團隊。事實上，除了臺灣之外，世界各國也都逐漸意識到數學史在數學教學上可以帶來的利基，譬如香港早在 1995 年的《中學課程綱要—數學科（中一至中五）》中正式提出要在數學教學過程中引入數學史：「數學史融入除了在教學上帶來種種益處之外，數學史對課程的編排肯定起着指導性的作用，這些課程編排包括整體的課程設計，也包括（微觀的）教程（例如教學單元）安排」（黃毅英，2007，p. 4），在通訊中刊登的幾篇文章，恰好做了最好的例證。

在九年一貫課程綱要公布之後，通訊上陸續刊登了幾篇在 HPM 實踐上跟九年一貫課程有關的文章，例如林肯輝的〈數學步道之實務經驗談—以羅東國中為例〉（林肯輝，2003），林肯輝的學校因應九年一貫課程發展學校特色，因此要求他設計數學步道，雖然從文章中可以發現步道內容與數學史無關，不過這篇文章啟發了一種新的想法，一種將數學史應用於中學數學的其他方式，同樣地，明德國中數學科團隊為建立學校特色創刊發行了《數食店月刊》，進而拿下課程教學領導組的學校經營創新獎（陳玉芬，2009a，2009b），也是另一種 HPM 實踐的可能方式。另外，九年一貫課程強調國小與國中階段課程的連貫學習，在這樣的基本理念之下，通訊團隊開始思考小學與中學數學課程的縱深與統整，洪萬生於 2004 年開始推行《中小學數學教師學科知識的縱深統整：以結合 HPM 的探究為進路》，其中幾篇成果亦刊登於通訊之中，譬如〈HPM 學習單模組設計「圓與圓周率」單元簡介〉（蘇俊鴻，2005）與〈三角形面積公式的縱深與統整〉（蘇惠玉，2006a）兩篇文章。然而縱深與統整的關懷並未就此中斷，還有後續的〈《高觀點下的初等數學》第一卷算術代數分析之評論〉（黃俊璋，2010）、〈高觀點、HPM 與拱心石課程〉（洪萬生，2012）以及〈高觀點看數學—生手教師指導科展的探究〉（林益弘，2013），這幾篇文章皆強調從高觀點檢視數學概念，「由於高觀點也涉及歷史的『洞識』，譬如在複數平面上重新詮釋

座標平面的問題之意義何在，因此，HPM 在這個關連中，終於有了堂而皇之的切入點」(洪萬生，2012，p. 9)。這些文章所描述的 HPM 實踐都與課程綱要的調整有關，也是課程綱要的改變所帶來的新的實踐形式。

除了國中小的課程綱要調整之外，為配合國中小的九年一貫課程綱要，高中部分在 2006 年實施過渡的《普通高級中學課程暫行綱要》之後，於 2010 年開始實施《普通高級中學課程綱要》(教育部，2008)。不管是 95 暫綱或 99 課綱，都為高中數學教師帶來一些新挑戰。因應新課程帶來教學上的問題或調整，身為高中數學教師的通訊作者群，開始一連串結合 HPM 的反思與新的實踐方式。首先於 2005 年先發行了〈『95 學年度高中數學暫行綱要』專輯〉，從教師 PCK 素養與 HPM 角度思考新課綱會產生的一些教學問題與建議；接著化整為零，從各單元或概念的「點」著手，串點為線，希望最後能聚集成完整的高中數學課程的 HPM 實踐方案，因此這個時期關於中學數學史素材的文章增多了，有些提及融入的實踐方法，如林倉億的〈數學史融入教學—以對數為例〉。除此之外，以蘇俊鴻參加思源科技基金會舉辦的「高中基礎科學優良教案甄選」獲得金牌獎的三篇教案為例，這三篇教案分別為有關餘弦定理、無理數與圓錐曲線的教學有關。他將數學史料恰當地融入單元教學活動中，作為概念理解、連結與統整的重要媒介，「利用幾何意義，連結了原本孤立的數學知識，從而發現數學知識本質上的共通性與差異」(黃俊璋，2012，p. 5)。圖 1 及圖 2 擷取至通訊文章中刊登的教案部分內容：

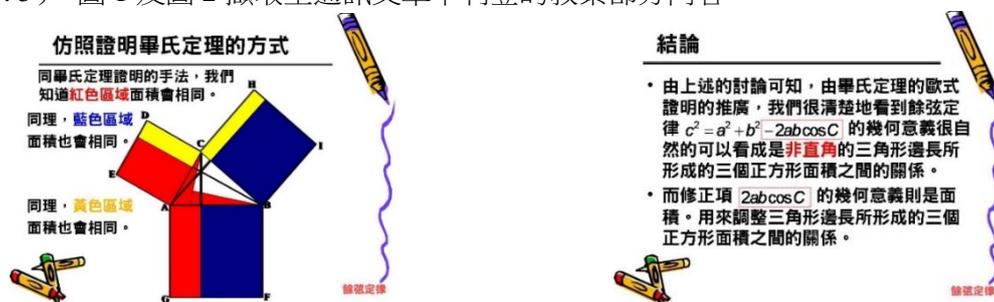


圖 1 蘇俊鴻老師的餘弦定理教案。引自「餘弦定理可以怎麼教」，蘇俊鴻，2006，HPM 通訊，9 (10)，6。

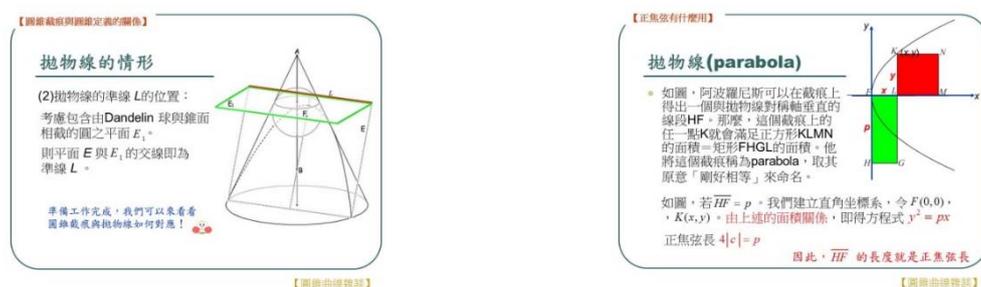


圖 2 蘇俊鴻的圓錐曲線教案。引自「〈圓錐曲線雜談〉教案分享」，蘇俊鴻，2012，HPM 通訊，15 (7)，3-4。

除了附有實踐方式的相關文章之外，此時以補充數學史相關背景為主的文章，也與初期有明顯的不同。除了題材更貼近中學課程之外，這些作者們結合自身的教學經驗來補足課程學習之不足，使得史料的呈現更貼近中學教師的教學需求。這種書寫形式所呈現的內容，恰足以提供給中學教師作為多元選修特色課程之材料，如〈牛頓插值多項式：拉格朗日怎麼說〉(林倉億，2012a)、〈馬可夫生平與馬可夫鏈〉(林倉億，2013)、〈Frans von Schooten 的圓錐曲線作圖器與電腦模擬〉(蘇惠玉，2013)、〈『轉移矩陣』二三事(I)、(II)、(III)〉(林倉億，2014a, 2014b, 2014c)、〈布里格斯的《對數算術》與對數表的製作〉(蘇惠玉，2014)、〈貝葉斯與貝氏定理〉(蘇俊鴻，2014)，以及前述的〈機率發展的第二樂章〉(蘇惠玉，2016)。因應高中新課綱的實施，以及作者們個人教學與 HPM 實踐經驗的累積，這類型文章才會在後期大量出現。

三、從閱讀理解到數學文化素養

透過閱讀理解與寫作訓練來培養學生的數學素養，一直是《HPM 通訊》中強調的一種數學學習方式，也因此通訊在 185 期的文章中，多次規劃科普或數普書籍專刊，總共介紹或評論了 130 本數學普及書籍。藉由閱讀數學家傳記或論及數學概念與數學史的書籍之後，進行討論或心得寫作，一直以來都是 HPM 實踐上的一種方法，同時早在 1999 年，林倉億在〈透過「寫作」促進數學學習〉這篇文章中，就已說明過將「寫作」作為數學學習手段的益處：「寫作對學生學習的幫助可以分成：發展數學知識、發展解題方法、發展自我監控與反思、促進情感表達以及促進討論」(林倉億，1999, p. 8)。以此作為 HPM 實踐的一種進路，陳敏皓於 2004 年亞太 HPM 中發表的〈從 HPM 角度談高中數學人才培育計畫〉，從 HPM 的角度出發，首重學生的數學科普閱讀能力，輔以加強學生的解題策略，從討論中學習數學知識內容，從閱讀數學史中獲得數學概念啟發(陳敏皓，2004)。

儘管九年一貫課程開始實施之後，教育部為協助學生學習，開始大力推行閱讀計畫(教育部，2014)，大約從 2008 年開始才看到數學教師在閱讀活動推行上的大鳴大放。《HPM 通訊》透過刊登的文章也為這些活動留下紀錄，譬如〈簡介國立蘭陽女中科學史深耕閱讀計畫〉(陳敏皓，2008)、〈如何指導國中生閱讀數學科普書籍〉(蘇進發、王諾涵，2009)、〈為國中學生推薦數學普及閱讀書單〉(洪萬生，2013a)、〈數學閱讀策略教學初探〉(陳玉芬，2018)；還有與閱讀有關的研討會相關訊息，如 2009 年舉辦的「數學普及書籍閱讀國際研討會」、2009 年舉辦的「基隆市國中數學教師優良數學科普讀物推薦工作坊」與 2010 年舉辦的「數學家傳記寫作坊」等等。從 2008 年開始的數普書籍閱讀與相關活動的增多，數學小說的興起扮演了很關鍵的角色。

2006 年通訊刊登了〈溫柔與感傷的數學真理—閱讀《博士熱愛的算式》〉(蘇惠玉，2006b) 這一篇文章，不久單維彰(2008)也發表〈記憶著愛情的數學等式〉，隨著這本書的熱銷，數學小說這一新興文類在國內逐漸引起關心數學教育者的重視，不過國外的一些學者早注意到數學

與敘事體 (narrative) 之間可類比的結構關係，譬如在湯瑪斯 (Thomas, R. S. D.) 的 “Mathematics and Narrative” 這篇論文中，關於數學 vs. 敘事的應用性與真實性，湯瑪斯注意到諸如數學物件與數學定理，都能如同故事般地被應用，這是因為數學物件及其彼此關係，正如同故事中的虛構人物或角色 (character) 一樣，都是被設定的，但是，進一步推演或發展出來的有意義關係，卻具有普適性的應用價值 (Thomas, 2002, 引自洪萬生、林芳玫, 2009)。在多夏狄斯 (Apostolos Doxiadis) 的論文 “The Mystery of the Black Knight’s Noetherian Ring” 中，他提出一個新想法：將敘事的形式應用在數學教育。他除了類比數學與敘事的相似性之外，更將波利亞 (G. Polya, 1887–1985) 在《如何解題 (How To Solve It)》中所提出的解題策略，逐條地對比到刑事偵辦的手法上 (Doxiadis, 2004)。

數學敘事的一個簡單易懂的代名詞就是數學小說。數學小說 (含電影、舞台劇、漫畫及繪本等) 是一個新興的文類 (genre)，它既是一種文學範疇中的小說，也可歸屬於數學普及書寫 (洪萬生, 2018)。洪萬生在與林芳玫合寫的〈數學與敘事在教育上的應用：以通識教育和 HPM 為例〉中，詳細地論述了數學小說應用在通識教育與 HPM 上的可行性，就 HPM 實踐而說，「如果故事編得生動有趣，那麼，融入這些敘事的數學概念之教學一定可以獲得 Hans Freudenthal 所主張的『引導式的再發現 / 再發明』(guided discovery / invention) 之成效」(洪萬生、林芳玫, 2009, p. 7)。洪萬生之後多次在通訊上發表文章，宣導如何將數學小說應用於學生的數學學習與教師的 HPM 實踐上。這一種實踐進路的改變，可見證於通訊近年來刊登的文章之中，關於閱讀與文化素養的文章，從 2008 年的 11 卷開始出現，到最新一期共 25 篇文章，同時介紹或評論了 18 本數學小說。除此之外，蘇惠玉也曾在〈推理敘事中的數學 — 作為數學與法治教育的例證〉中介紹過美國影集 CSI (Crime Scene Investigation) 與《數字搜查線 (numb3rs)》(蘇惠玉, 2010)；通訊團隊中的陳彥宏亦在《數理人文》中發表過有關日劇裡的數學元素〈日劇中的數學和美少女〉(陳彥宏, 2014)；以及洪萬生為臺灣大學開設的數學通識課程「數學與文化：以數學小說閱讀為進路」，臺灣大學將其製作為開放性課程，可在網路上檢索閱聽，這些都是中學教師在推廣利用數學小說做為數學學習媒介的重要資源庫。

這種利用數學小說為學習媒介的 HPM 實踐新進路之利基，洪萬生在〈萃取之必要：數學思維 vs. 寫作技巧〉這篇文章中更進一步作了說明。洪萬生認為藉由數學思維 vs. 寫作技術的反思，我們可以多少理解「萃取」在智力活動的許多面向，都具有深刻的價值與意義，當然這其中包括數學學習：

有了本文有關寫作技術 vs. 數學思維的對比之後，或許數學教師也可以從數學教學的脈絡切入，說明數學思維的鍛鍊誠然有其外部效果才是。如此一來，數學學習與語文閱讀可以連成一氣，而數學思維也就可以成為一般思維中的精華了 (洪萬生, 2013b, p. 3)。

在數學教學中融入數學史，固然是 HPM 的一種典型進路，不過，如果充分利用數學小說的數學敘事甚至是文學敘事的特色，那麼，其潛在的教學（或主動學習）成效，也可視為 HPM 的一種延伸（洪萬生，2018）。這種新的 HPM 實踐進路的改變，已經發生於臺灣的 HPM 實踐中，利用這種策略所設計的教學活動，在通訊最近刊登的文章亦可得到見證。譬如黃俊瑋在〈數學史與特色課程的邂逅〉、〈多元選修特色課程「沒有數學的數學課」—電影、閱讀與敘事〉這兩篇文章裡所介紹的特色課程。他在第一次開設的課程中，嘗試融入數學與歷史、數學與文化、數學與美學、數學與文學、數學普及讀物、數學電影等元素，他認為「相較起數學正課的『硬』，數學特色課程的『溫柔』與通識取向，更能引發學生的學習動機，並拉近學生們與數學之間的距離」（黃俊瑋，2015，p. 10）。他於 2017 年再次開設的特色課程中，以數學通識與數學素養為導向，融入數學史、數學文化、數學哲學、數學美學以及數學閱讀和數學寫作等元素作為課程核心，實際利用數學敘事的特性作為 HPM 實踐的策略，以引發學生對數學的興趣與學習動機（黃俊瑋，2018）。另外，蘇俊鴻老師在〈詩數列車—數學詩教學設計分享〉這篇文章中，以數學詩的創作與賞析為教學目標，透過跨領域合作將數學思維與數學素養的養成直接融入語文閱讀與寫作的課程之中（蘇俊鴻，2017），也讓我們見識到臺灣中學教師在 HPM 實踐結合數學學習上的創意，開創 HPM 實踐的另一種可能方式。

伍、結語

自從 1996 年 HPM 的概念與方法引入臺灣之後，透過《HPM 通訊》的發行，這 21 年來，臺灣 HPM 實踐伴隨著走過與見證了臺灣教育的各種變遷。在 798 篇的文章中，本文以關於對數的三篇文章說明 HPM 實踐時，滲透進入課程教學中的層次與深度，從一開始的說故事與補充知識備背景史料的表面層次，到擷取史料中的片段融入教學之中的深層應用，說明了臺灣這 20 年來推行結合教師 PCK 與 HPM 實踐上的努力與成效。隨著時間的流逝，臺灣 HPM 實踐的進路也不是一成不變的，它跟著教育環境的變遷而有了轉變，從典型的數學史融入教學，到現在加入數學敘事特性，以閱讀理解與寫作訓練作為 HPM 實踐的新進路。因應外在教育環境與文化氛圍的改變而演變的實踐方式，儼然已成為臺灣 HPM 實踐的一大特色。

臺灣的中小學教育即將在明年迎來新的課程綱要，在教育部發布的《十二年國民基本教育課程綱要：國民中小學暨普通型高級中等學校（數學領域）》（教育部，2018）中，再次看到了數學史的重要性。此次的課綱在基本理念中直接宣告「數學是一種人文素養，宜培養學生的文化美感」，其中更提到：

數學史能夠幫助我們理解數學發展在不同時期與不同文化的差異，更能協助教師釐清數學學習的主軸。所以適時地在數學教學之中融入適當的數學史內容，可以提升數學教學品質與學生的學習成效。認識數學的文化面向，不僅有助於讓數學學習從工具性層次延伸到智識性層次，也更彰顯數學知識的人文價值，達到「適性揚才」與「終身學習」的教育目標（教育部，2018，p. 1）。

劉柏宏曾引述東西方學者的論述，皆一致地指出文化在數學素養中的關鍵角色，有數學素養的人必須具備某種程度的數學文化內涵。劉柏宏認為所謂的數學文化包含兩種意涵：文化中的數學（*mathematics in culture*）與數學中的文化（*culture of mathematics*）。其中文化中的數學至少需考量幾個趨向：歷史的、社會的與民族的趨向（劉柏宏，2016）。將數學文化內涵包容進入數學素養的教學活動之中，亦如在第參節所論述的 HPM 實踐的層次：「從歷史的角度注入數學知識活動的文化意義，在數學教育過程中實踐多元文化關懷的理想」。雖然典型的 HPM 實踐進路，以及劉柏宏舉例說明的文化中的數學之論述，其範圍比較偏向數學史研究中所指涉的面向，不過如果不侷限在「歷史的文化」，此文化也泛指學生所處的當代文化，那麼以數學文化為底蘊的 HPM 實踐，透過數學閱讀與寫作的策略應用，就能有更加寬廣的空間可以盡情揮灑，也更能實踐 HPM 所強調的「多元文化關懷」。

從《HPM 通訊》上的文章分析，看到了臺灣在 HPM 實踐上的創意與實力，種種的創意與實力來自紮實的數學史訓練與自主研發的能力。當數學史融入數學教學的成效已毋庸置疑之際，臺灣的 HPM 實踐在典型的數學史融入教學進路上，應更加的契合教學活動，讓數學史材料成為單元教學的一部份，同時透過史料中與歷史、文化素養有關的問題設計，加強學生自主思考、反思的能力。另外，HPM 實踐的數學文化特色，更能在現今教育環境強調在閱讀理解、寫作表達、與自我學習能力中發揮所長，透過數普書籍與數學小說文類的閱讀與寫作，讓數學思維成為一般思維的中的精華，甚至透過數學文學與藝術的欣賞連結，更能激發學生學習數學、欣賞數學與應用數學的樂趣及能力。從過去看未來，臺灣 HPM 實踐在參與者的創意與實力發揮之下，將能在數學教育之中發揮更大的作用。

參考文獻

參考文獻前加註*者表示為文獻分析中所分析之文獻。

*李政憲（2010）。機率的大秘密。HPM 通訊，13（5），10-19。【Li, Cheng-Hsien (2010). The big secretes of probability. *HPM TongXun*, 13(5), 10-19. (in Chinese)】

汪曉勤（2012）。HPM 的若干研究與展望。上海 HPM 通訊，1（1），1-10。【Wang, Xiao-Qin (2012). Researches on HPM: An overview. *Shanghai HPM Newsletter*, 1(1), 1-10. (in Chinese)】

- 林肯輝 (2003)。數學步道之實務經驗談－以羅東國中為例。 **HPM 通訊**，6 (11)，8-11。【Lin, Ken-Hui (2003). Practical experience of mathematics trail – Luodong junior high school as an example. *HPM TongXun*, 6(11), 8-11. (in Chinese)】
- 林倉億 (1999)。透過「寫作」促進數學學習。 **HPM 通訊**，2 (4)，8-10。【Lin, Tsang-Yi (1999). Promote mathematics learning through writing. *HPM TongXun*, 2(4), 8-10. (in Chinese)】
- *林倉億 (2010)。數學史融入教學－以對數表為例。 **HPM 通訊**，13 (12)，8-16。【Lin, Tsang-Yi (2010). Integrating history of mathematics into mathematics teaching - Taking table of logarithm as an example. *HPM TongXun*, 13(12), 8-16. (in Chinese)】
- 林倉億 (2012a)。牛頓插值多項式：拉格朗日怎麼說？。 **HPM 通訊**，15 (10)，1-7。【Lin, Tsang-Yi (2012a). Newton interpolating polynomial: How did Lagrange say?. *HPM TongXun*, 15(10), 1-7. (in Chinese)】
- 林倉億 (2012b)。高中數學的 HPM 相關資源。 **HPM 通訊**，15 (1)，1-13。【Lin, Tsang-Yi (2012b). HPM related resources in senior high school mathematics. *HPM TongXun*, 15(1), 1-13. (in Chinese)】
- 林倉億 (2013)。馬可夫生平與馬可夫鏈。 **HPM 通訊**，16 (1)，1-8。【Lin, Tsang-Yi (2013). The biography of A. A. Markov and Markov chain. *HPM TongXun*, 16(1), 1-8. (in Chinese)】
- 林倉億 (2014a)。轉移矩陣二三事(I)：高中課本中穩定狀態的求法。 **HPM 通訊**，17 (5)，1-7。【Lin, Tsang-Yi (2014a). Something about stochastic matrix (I): The method of seeking stable state in high school textbook. *HPM TongXun*, 17(5), 1-7. (in Chinese)】
- 林倉億 (2014b)。轉移矩陣二三事(II)：歷年高中課本中的穩定狀態。 **HPM 通訊**，17 (6)，1-10。【Lin, Tsang-Yi (2014b). Something about stochastic matrix (II): The stable state in high school textbook over the years. *HPM TongXun*, 17(6), 1-10. (in Chinese)】
- 林倉億 (2014c)。轉移矩陣二三事(III)：馬可夫鏈穩定狀態的判別。 **HPM 通訊**，17 (7)，1-11。【Lin, Tsang-Yi (2014c). Something about stochastic matrix (III): The distinguishment of stable state in Markov Chain. *HPM TongXun*, 17(7), 1-11. (in Chinese)】
- 林益弘 (2013)。高觀點看數學～生手教師指導科展的探究。 **HPM 通訊**，16 (6)，5-9。【Lin, I-Hung (2013). Mathematics from an advanced standpoint - A beginning teacher's guiding on the exploration of science exhibition. *HPM TongXun*, 16(6), 5-9. (in Chinese)】
- 洪萬生 (1991)。古代數學文本在課堂上的使用。國科會補助專題研究計畫 (NSC 89-2511-S-003-032; 89-2511-S-003-121)。臺北市：國立臺灣師範大學數學系。【Horng, Wann-Sheng (1991). *Achievement report for using ancient mathematical original sources in classroom*. Research project subsidized by National Science Council (NSC 89-2511-S-003-032; 89-2511-S-003-121). Taipei: Department of mathematics, National Taiwan Normal University. (in Chinese)】
- 洪萬生 (1998a)。發刊詞。 **HPM 通訊**，1 (1)，1。【Horng, Wann-Sheng (1998a). Statement of inaugural issue. *HPM TongXun*, 1(1), 1. (in Chinese)】
- 洪萬生 (1998b)。HPM 隨筆 (一)。 **HPM 通訊**，1 (2)，1-3。【Horng, Wann-Sheng (1998b). HPM essay (I). *HPM TongXun*, 1(2), 1-3. (in Chinese)】
- 洪萬生 (1999)。HPM 隨筆 (二)：數學史與數學的教與學。 **HPM 通訊**，2 (4)，1-3。【Horng, Wann-Sheng (1999). HPM essay (II): History of mathematics and teaching and learning of mathematics. *HPM TongXun*, 2(4), 1-3. (in Chinese)】

- 洪萬生 (2001)。「古代數學文本在課堂上的使用」研究心得。**HPM 通訊**, 4 (12), 1-6。【Horng, Wann-Sheng (2001b). Research experience of the project: Using ancient mathematical original sources in classroom. *HPM TongXun*, 4(12), 1-6. (in Chinese)】
- 洪萬生 (2002a)。中算史中的「張本例」。**HPM 通訊**, 5 (12), 1-3。【Horng, Wann-Sheng (2002a). Generic examples in Chinese history of mathematics. *HPM TongXun*, 5(12), 1-3. (in Chinese)】
- 洪萬生 (2002b)。數學文本的問題意識。**HPM 通訊**, 5 (1), 1-2。【Horng, Wann-Sheng (2002b). Problem awareness in mathematical original sources. *HPM TongXun*, 5(1), 1-2. (in Chinese)】
- 洪萬生 (2002c)。數學教師專業發展與 HPM。國科會補助專題研究計畫 (NSC 91-2521-S-003-006; 92-2521-S-003-002)。臺北市：國立臺灣師範大學數學系。【Horng, Wann-Sheng (2002c). *Mathematics teachers' professional development and HPM*. Research project subsidized by National Science Council (NSC 91-2521-S-003-006; 92-2521-S-003-002). Taipei: Department of mathematics, National Taiwan Normal University. (in Chinese)】
- 洪萬生 (2003)。從五十一期『索引』回溯本刊足跡。**HPM 通訊**, 6 (12), 1-2。【Horng, Wann-Sheng (2003). Backtrack the trace of this journal from the index of issue 51. *HPM TongXun*, 6(12), 1-2. (in Chinese)】
- 洪萬生 (2004)。中小學數學教師學科知識的縱深統整：以結合 HPM 的探究為進路。國科會補助專題研究計畫 (NSC93-2521-S003-015; NSC94-2521-S003-01)。臺北市：國立臺灣師範大學數學系。【Horng, Wann-Sheng (2004). *The vertical integration of subject knowledge of mathematics teachers in elementary and high schools: Taking the exploration of integrating HPM as an approach*. Research project subsidized by National Science Council (NSC93-2521-S003-015; NSC94-2521-S003-01). Taipei: Department of mathematics, National Taiwan Normal University. (in Chinese)】
- 洪萬生 (2005a)。如何萃取才有意義呢？。**HPM 通訊**, 8 (11), 1-2。【Horng, Wann-Sheng (2005a). How to extract meaningfully?. *HPM TongXun*, 8(11), 1-2. (in Chinese)】
- 洪萬生 (2005b, 7 月)。PCK vs. HPM：以兩位高中數學教師為例。專題演講發表於 2005 香港數學教育會議，香港教育大學。【Horng, Wann-Sheng (2005b, July). *PCK vs. HPM: Taking two high school mathematics teachers as an example*. Lecture presented at 2005 Hong Kong Mathematics Education Conference, The Education University of Hong Kong. (in Chinese)】
- 洪萬生 (2012)。高觀點、HPM 與拱心石課程。**HPM 通訊**, 15 (6), 1-10。【Horng, Wann-Sheng (2012). Advanced standpoint, HPM and capstone course. *HPM TongXun*, 15(6), 1-10. (in Chinese)】
- 洪萬生 (2013a)。為國中學生推薦數學普及閱讀書單。**HPM 通訊**, 16 (11), 11-12。【Horng, Wann-Sheng (2013a). Recommended reading list of popular mathematics books for junior high school students. *HPM TongXun*, 16(11), 11-12. (in Chinese)】
- 洪萬生 (2013b)。萃取之必要：數學思維 vs. 寫作技術。**HPM 通訊**, 16 (2/3), 1-4。【Horng, Wann-Sheng (2013b). Necessary for extraction: Mathematical thinking vs. writing skills. *HPM TongXun*, 16(2/3), 1-4. (in Chinese)】
- 洪萬生 (2018)。異軍突起的數學小說。**HPM 通訊**, 21 (6), 1-5。【Horng, Wann-Sheng (2018). A mathematical fiction with a new force emerged. *HPM TongXun*, 21(6), 1-5. (in Chinese)】
- 洪萬生、林芳玫 (2009)。數學與敘事在教育上的應用：以通識教育和 HPM 為例。**HPM 通訊**, 12 (11), 1-11。【Horng, Wann-Sheng, & Lin, Fang-Mei (2009). The application of mathematics and narrative in Education: Taking liberal education and HPM as an example. *HPM TongXun*,

12(11), 1-11. (in Chinese)】

*洪誌陽 (1999)。對數隨談。HPM 通訊, 2 (6), 10-12。【Hung, Chih-Yang (1999). Talking about logarithm. *HPM TongXun*, 2(6), 10-12. (in Chinese)】

張幼賢 (2007)。我國數學課程綱要近年的變革。教育部高中數學學科中心高中數學電子報, 21。取自 <http://mathcenter.ck.tp.edu.tw/Resources/ePaper/ePaperOpen.ashx?qs0=0&qs1=21> 【Chang, Yu-Hsien (2007). The change of mathematics curriculum guidelines over the years. *Ministry of Education Senior High School Mathematics Center Newsletter*, 21. Retrieved from <http://mathcenter.ck.tp.edu.tw/Resources/ePaper/ePaperOpen.ashx?qs0=0&qs1=21> (in Chinese)】

張益明、丁倩文 (2018)。HPM 視角下的「兩角和與差的餘弦公式」教學。上海 HPM 通訊, 7 (3), 28-36。【Zhang, Yi-Ming, & Ding, Qian-Wen (2018). The teaching of “the cosine formula of the addition and difference of two angles” from the perspective of HPM. *Shanghai HPM Newsletter*, 7(3), 28-36. (in Chinese)】

張復凱 (2004)。HPM 網站大公開：convergence。HPM 通訊, 7 (5), 18-19。【Chang, Fu-Kai (2004). Introduce the website about HPM: convergence. *HPM TongXun*, 7(5), 18-19. (in Chinese)】

教育部 (1998)。國民中小學九年一貫課程綱要。臺北：作者。取自 <https://cirn.moe.edu.tw/Guidline/index.aspx?sid=9> 【Taiwan Ministry of Education. (1998). *Grade 1-9 curriculum guidelines*. Taipei: Author. Retrieved from <https://cirn.moe.edu.tw/Guidline/index.aspx?sid=9> (in Chinese)】

教育部 (2008)。普通高級中學課程綱要。臺北：作者。取自 <https://www.naer.edu.tw/files/15-1000-2979,c551-1.php?Lang=zh-tw> 【Taiwan Ministry of Education. (2008). *General senior high school curriculum guidelines*. Taipei: Author. Retrieved from <https://www.naer.edu.tw/files/15-1000-2979,c551-1.php?Lang=zh-tw> (in Chinese)】

教育部 (2014)。第七次中華民國教育年鑑。臺北：作者。取自 <https://www.naer.edu.tw/files/15-1000-7986,c1311-1.php?Lang=zh-tw> 【Taiwan Ministry of Education. (2014). *The seventh educational yearbook of the Republic of China*. Taipei: Author. Retrieved from <https://www.naer.edu.tw/files/15-1000-7986,c1311-1.php?Lang=zh-tw> (in Chinese)】

教育部 (2018)。十二年國民基本教育課程綱要：國民中小學暨普通型高級中等學校(數學領域)。臺北：作者。取自 http://www.naer.edu.tw/ezfiles/0/1000/attach/49/pta_18524_6629744_60029.pdf 【Taiwan Ministry of Education. (2018). *Curriculum guidelines of 12-year basic education: Elementary and junior high school and general senior high school (Mathematics)*. Taipei: Author. Retrieved from http://www.naer.edu.tw/ezfiles/0/1000/attach/49/pta_18524_6629744_60029.pdf (in Chinese)】

陳玉芬 (2009a)。《數食店月刊》的緣起。HPM 通訊, 12 (4), 14-16。【Chen, Yu-Fen (2009a). The origin of *Shu Shi Dian Yue Kan*. *HPM TongXun*, 12(4), 14-16. (in Chinese)】

陳玉芬 (2009b)。參加「2009 年全國學校經營創新獎 -- 課程教學領導組」競賽感言。HPM 通訊, 12 (7/8), 15。【Chen, Yu-Fen (2009b). The comment on participating in the competition of InnoSchool Award 2009- Curriculum and teaching group. *HPM TongXun*, 12(7/8), 15. (in Chinese)】

陳玉芬 (2018)。數學閱讀策略教學初探。HPM 通訊, 21 (5), 1-8。【Chen, Yu-Fen (2018). A preliminary study of teaching mathematical reading strategy. *HPM TongXun*, 21(5), 1-8. (in Chinese)】

- 陳彥宏 (2014)。日劇中的數學和美少女。數理人文, 2, 101-102。doi: 10.6851/MSHCM.201406_(2).0015 【Chen, Yen-Hung (2014). Mathematics and pretty girls in Japanese drama. *Humanities of Mathematical Sciences*, 2, 101-102. doi: 10.6851/MSHCM.201406_(2).0015 (in Chinese)】
- 陳敏皓 (2004)。從 HPM 角度談高中數學人才培育計畫。載於洪萬生、林炎全、甯自強與左台益 (主編), 歷史、文化與資訊時代的數學教育論文集 (209-216 頁)。臺中: 國立臺中師範學院。【Chen, Ming-Hao (2004). Senior high school talents cultivation project: An approach of HPM. In Wann-Sheng Horng, Yuan-Chyuan Lin, Tzyh-Chiang Ning, & Tai-Yih Tso (Eds.), *Proceedings of Asia-Pacific HPM 2004 conference: History, culture and mathematics education in the new technology era* (pp. 209-216). Taichung: National Taichung Teachers College. (in Chinese)】
- 陳敏皓 (2008)。簡介國立蘭陽女中科學史深耕閱讀計劃 (96 年度)。HPM 通訊, 11 (4), 9-11。【Chen, Ming-Hao (2008). A brief introduction of the reading project ploughed on history of science (2007)】. *HPM TongXun*, 11(4), 9-11. (in Chinese)】
- 單維彰 (2008)。記憶著愛情的數學等式。檢自 http://mathmuseum.tw/wp-content/pdf/008_1230084044.pdf 【Shann, Wei-Chang (2008). *The mathematical equation of remembering love*. Retrieved form http://mathmuseum.tw/wp-content/pdf/008_1230084044.pdf (in Chinese)】
- 黃俊瑋 (2010)。《高觀點下的初等數學》第一卷算術代數分析之評論。HPM 通訊, 13 (9), 4-10。【Huang, Jyun-Wei (2010). The comment on elementary mathematics from an advanced standpoint volume 1: Arithmetic, algebra and analysis. *HPM TongXun*, 13(9), 4-10. (in Chinese)】
- 黃俊瑋 (2012)。三份 HPM 教案反思與比較: 「圓錐曲線雜談」、「無理數」、「餘弦定理」。HPM 通訊, 15 (5), 1-5。【Huang, Jyun-Wei (2012). The reflection and comparison between three HPM teaching plans: “A compilation of conics curve”, “irrational number” and “law of cosine”. *HPM TongXun*, 15(5), 1-5. (in Chinese)】
- 黃俊瑋 (2015)。數學史與特色課程的邂逅。HPM 通訊, 18 (5), 1-10。【Huang, Jyun-Wei (2015). Distinctive course encounter with history of mathematics. *HPM TongXun*, 18(5), 1-10. (in Chinese)】
- 黃俊瑋 (2018)。多元選修特色課程「沒有數學的數學課—電影、閱讀與敘事。HPM 通訊, 21 (1/2/3), 8-15。【Huang, Jyun-Wei (2018). Multiple elective distinctive course “A mathematics class without mathematics- Movies, reading and narrative. *HPM TongXun*, 21(1/2/3), 8-15. (in Chinese)】
- 黃毅英 (2007)。從課程看回融入數學史。HPM 通訊, 10 (2/3), 3-7。【Wong, Ngai-Ying (2007). A review of integrating the history of mathematics from the perspective of the curriculum. *HPM TongXun*, 10(2/3), 3-7. (in Chinese)】
- 劉柏宏 (2016)。從數學與文化的關係探討數學文化素養之內涵—理論與與案例分析。臺灣數學教育期刊, 3 (1), 55-83。doi: 10.6278/tjme.20160413.001 【Liu, Po-Hung (2016). Discourse on the constituent of literacy for mathematical culture in terms of the relationship between mathematics and culture – Theoretical and case analysis. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, 3(1), 55-83. doi: 10.6278/tjme.20160413.001 (in Chinese)】
- 歐士福 (2003)。HPM 的發展史: 1976-2000 年。HPM 通訊, 6 (10), 2-4。【Ou, Shih-Fu (2003). History of the development of HPM: 1976-2000. *HPM TongXun*, 6(10), 2-4. (in Chinese)】

- 蘇俊鴻 (2001)。不一樣的組合數。 **HPM 通訊**, 4 (4), 10-12。【Su, Jim-Hong (2001). The different combination number. *HPM TongXun*, 4(4), 10-12. (in Chinese)】
- *蘇俊鴻 (2003)。數學史融入教學—以對數為例。 **HPM 通訊**, 6 (2/3), 16-20。【Su, Jim-Hong (2003). Integrating history of mathematics – Taking logarithm as an example. *HPM TongXun*, 6(2/3), 16-20. (in Chinese)】
- 蘇俊鴻 (2004)。數學史融入數學教學：以數學歸納法為例。載於洪萬生、林炎全、甯自強與左台益 (主編), **歷史、文化與資訊時代的數學教育論文集** (155-166 頁)。臺中：國立臺中師範學院。【Su, Jim-Hong (2004). In Wann-Sheng Horng, Yuan-Chyuan Lin, Tzyh-Chiang Ning, & Tai-Yih Tso (Eds.), *The use of the history of mathematics in teaching and learning mathematics: The method of mathematical induction. Proceedings of Asia-Pacific HPM 2004 Conference: History, culture and mathematics education in the new technology era* (pp. 155-166). Taichung: National Taichung Teachers College. (in Chinese)】
- 蘇俊鴻 (2005)。HPM 學習單模組設計「圓與圓周率」單元簡介。 **HPM 通訊**, 8 (7/8), 4-6。【Su, Jim-Hong (2005). The design of HPM worksheet modules – Circle and pi. *HPM TongXun*, 8(7/8), 4-6. (in Chinese)】
- 蘇俊鴻 (2006)。餘弦定理可以怎麼教。 **HPM 通訊**, 9 (10), 4-6。【Su, Jim-Hong (2006). How to teach the law of cosine. *HPM TongXun*, 9(10), 4-6. (in Chinese)】
- 蘇俊鴻 (2012)。〈圓錐曲線雜談〉教案分享。 **HPM 通訊**, 15 (7), 1-4。【Su, Jim-Hong (2012). Sharing the teaching plan of “A compilation of conics curve”. *HPM TongXun*, 15(7), 1-4. (in Chinese)】
- 蘇俊鴻 (2014)。貝葉斯與貝氏定理。 **HPM 通訊**, 17 (9), 8-12。【Su, Jim-Hong (2014). Bayes and Bayes’ theorem. *HPM TongXun*, 17(9), 8-12. (in Chinese)】
- 蘇俊鴻 (2017)。詩數列車—數學詩教學設計分享。 **HPM 通訊**, 20 (5), 1-9。【Su, Jim-Hong (2017). Shi Shu Lie Che – Sharing the teaching design of mathematical poem. *HPM TongXun*, 20(5), 1-9. (in Chinese)】
- 蘇惠玉 (2001)。三角函數公式的托勒密方法。 **HPM 通訊**, 4 (5), 12-14。【Su, Hui-Yu (2001). The method of Ptolemy about the formula of trigonometric function. *HPM TongXun*, 4(5), 12-14. (in Chinese)】
- 蘇惠玉 (2004a)。曲線下面積學習單的設計。 **HPM 通訊**, 7 (5), 10-18。【Su, Hui-Yu (2004a). The worksheet design of area under the curve. *HPM TongXun*, 7(5), 10-18. (in Chinese)】
- 蘇惠玉 (2004b)。圓錐曲線的教學設計。載於洪萬生、林炎全、甯自強與左台益 (主編), **歷史、文化與資訊時代的數學教育論文集** (411-426 頁)。臺中：國立臺中師範學院。【Su, Hui-Yu (2004). A Teaching Design for Conics Sections. In Wann-Sheng Horng, Yuan-Chyuan Lin, Tzyh-Chiang Ning, & Tai-Yih Tso (Eds.), *Proceedings of Asia-Pacific HPM 2004 Conference: History, culture and mathematics education in the new technology era* (pp. 411-426). Taichung: National Taichung Teachers College. (in Chinese)】
- 蘇惠玉 (2006a)。三角形面積的縱深與統整。 **HPM 通訊**, 9 (4), 41-46。【Su, Hui-Yu (2006a). The vertical integration of triangle area. *HPM TongXun*, 9(4), 41-46. (in Chinese)】
- 蘇惠玉 (2006b)。溫柔與感傷的數學真理—閱讀《博士熱愛的算式》。 **HPM 通訊**, 9 (6), 19-20。【Su, Hui-Yu (2006b). Gentle and sentimental mathematical truth – Reading “The housekeeper and the professor”. *HPM TongXun*, 9(6), 19-20. (in Chinese)】

- 蘇惠玉 (2007)。圓錐曲線的腳本設計。 **HPM 通訊**, 10 (7/8), 14-17。【Su, Hui-Yu (2007). Script design of conics curve. *HPM TongXun*, 10(7/8), 14-17. (in Chinese)】
- 蘇惠玉 (2010)。推理敘事中的數學—作為數學與法治教育的例證。 **HPM 通訊**, 13 (4), 3-10。【Su, Hui-Yu (2010). Mathematics in mystery narrative – An illustration of mathematics and legal education. *HPM TongXun*, 13(4), 3-10. (in Chinese)】
- 蘇惠玉 (2013)。Frans van Schooten 的圓錐曲線作圖器與電腦模擬。 **HPM 通訊**, 16 (2/3), 5-9。【Su, Hui-Yu (2013). Frans van Schooten's plotters of conics curve and computer simulation. *HPM TongXun*, 16(2/3), 5-9. (in Chinese)】
- 蘇惠玉 (2014)。布里格斯的《對數算術》與對數表的製作。 **HPM 通訊**, 17 (6), 11-18。【Su, Hui-Yu (2014). Briggs' arithmetica logarithmica and the creation of logarithmic table. *HPM TongXun*, 17(6), 11-18. (in Chinese)】
- *蘇惠玉 (2016)。機率發展的第二樂章。 **HPM 通訊**, 19 (10), 1-8。【Su, Hui-Yu (2016). Second movement of the development of probability. *HPM TongXun*, 19(10), 1-8. (in Chinese)】
- 蘇進發、王諾涵 (2009)。如何指導國中生閱讀數學科普書籍。 **HPM 通訊**, 12 (3), 1-6。【Su, Chin-Fa & Wang, No-Han (2009). How to guide junior high school students to read popular mathematics books. *HPM TongXun*, 12(3), 1-6. (in Chinese)】
- *蘇意雯 (2000)。「古代數學文本在課堂上的使用」之教學報告—機率。 **HPM 通訊**, 3 (10), 2-7。【Su, Yi-Wen (2000). The teaching report of “using ancient mathematical original sources in classroom” – Probability. *HPM TongXun*, 3(10), 2-7. (in Chinese)】
- *蘇慧珍 (2003)。「數學期望值」學習工作單。 **HPM 通訊**, 6 (8/9), 2-11。【Su, Hui-Chen (2003). Worksheets for mathematical expectation. *HPM TongXun*, 6(8/9), 2-11. (in Chinese)】
- Doxiadis, A. (2004). *The mystery of the black knight's Noetherian ring: An investigation into the story-mathematics connection with a small detour through chess country*. Retrieved from <https://apostolosdoxiadis.com/wp-content/uploads/2008/05/the-mystery-of-the-black-knight-SITE-EDITION.pdf>