

謝佳叡、唐書志（2017）。

探究九年級生推論形式之邏輯結構的建構與轉化。

臺灣數學教育期刊，4（2），1-32。

doi: 10.6278/tjme.20170914.001

探究九年級生推論形式之邏輯結構的建構與轉化

謝佳叡¹ 唐書志²

¹ 國立臺北教育大學數學暨資訊教育系

² 臺北市立百齡高中

本研究基於 EP-spectrum，將學生的數學證明之演繹推理發展視為是從探索、論證，再到證明的過程。本研究的基本立場是，學生對於幾何的探索與論證活動能提供學生證明所需邏輯結構之預先經驗，因而透過探索與論證活動學生對於證明的學習可用回想與轉化以取代重新建構。因此，本研究主要目的是探討學生在參與幾何探索和論證活動時展現的推論形式，從而分析、比較學生在探索、論證和證明區段所展現之推論形式推測學生的邏輯結構之建構與轉化。為了能考察學生如何理解與學習數學幾何證明過程，本研究設計一系列幾何性質的探索教學活動，並實際進入課堂對 35 位九年級學生進行教學形式演繹，透過這樣的教學試驗，本研究發現學生在一系列的學習活動中，從探索到證明所呈現出的推論形式其背後反映之邏輯結構彼此的連續性與不連續性，研究結果也顯示，學生透過這樣的探索與論證活動有助於學生演繹推理發展和數學證明的學習。

關鍵詞：推論形式、數學探索、數學論證、數學證明、邏輯結構

通訊作者：謝佳叡，e-mail：lyz@abel.math.ntnu.edu.tw

收稿：2016 年 3 月 29 日；

接受刊登：2017 年 9 月 14 日。

Hsieh, C. J., & Tang, S. J. (2017).

Construction and transformation of logical structures in ninth-graders' inferring types.

Taiwan Journal of Mathematics Education, 4(2), 1-32.

doi: 10.6278/tjme.20170914.001

Construction and Transformation of Logical Structures in Ninth-graders' Inferring Types

Chia-Jui Hsieh¹ Shu-Jyh Tang²

¹ Department of Mathematics and Information Education, National Taipei University of Education

² Taipei Municipal Bailing High School

This study followed the Exploration-Proof Spectrum, [EP-Spectrum], by observing the development of deductive reasoning to provide evidence of the spectrum from exploration to argumentation and then to proof production. The aim of this study was to evaluate students' performance at making inferences during explorative and argumentative activities. The teaching experiment, employing the exploration approach, was conducted with a class of 35 ninth-graders in Taiwan. We compared the different types of inferences made during exploration, argumentation, and proof. Through a teaching experiment concerning one specific geometric property, the study discovered that the continuity and discontinuity of a logical structure exists in each stage prior to the proof stage, and some results demonstrated that exploration and argumentation are useful to students' deductive reasoning.

Keywords: inferring type, exploration, argumentation, proof, logical structure

壹、緒論

一、背景

儘管有研究指出，將證明從數學課堂剔除是很多國家數學課程的趨勢（Hanna & Jahnke, 1996），然而從數學教育對數學證明相關研究的重視程度看，證明在學校數學中仍然是重要的議題（Ball, Hoyles, Jahnke, & Movshovitz-Hadar, 2002; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000）。在臺灣，數學證明在中學數學教學內容中也仍佔有相當的比例。NCTM 在《Principles and Standards for School Mathematics》中明確指出，無論在數學領域或其他領域，多數人皆能認同證明和推理對於學生洞察力的發展與表達都提供了強而有力的方法（NCTM, 2000），但我們仍必須實際進入課堂考察學生數學證明的學習過程，才能對於證明如何發展學生的洞察力有更深入地體認。

Hanna 等人（2009）從數學教與學的觀點認為數學證明主要由兩個要素組成：（一）遵循演繹法則之精確的推論鏈（chains of inference），以及（二）形式化的符號、語法、操作準則。其中，「遵循演繹法則的推論鏈」意指在數學證明中，一系列的語句和語句之間的有效性連結，也泛指證明步驟與步驟間的合法性與流暢性；形式化的符號、語法、操作準則是意指數學證明的特殊書寫形式。不可否認的，使用形式符號記錄是數學特有形式，但即便是以文字表示的數學語句，其語法也經常異於其他學門的表示語法。舉例來說，幾何作圖常用的語句「以 P 為圓心， \overline{AB} 為半徑畫弧，交直線 L 於 Q 」，這樣的敘述方式就很少在其他學科使用，對於沒學過這樣敘述方式的學生而言是一種全新體驗。因此，即便學生在某個數學證明題的論證或解釋已經取信於他們的老師，他們仍然要學習以特定的證明格式加以紀錄，才算是完成證明的學習。

學生在學習證明會遭遇困難幾乎是每位數學老師的體驗，也有大量的研究致力於學生證明的學習困難探討，但如何教學生克服這些困難目前透過研究所得到的知識仍很有限（Stylianides & Stylianides, 2009）。Epp（2003）總結了一些有關學生證明學習困難的相關研究所揭露的成果，他在親自進行課程教學後發現學生所遇到的困難遠超過老師的預期。許多研究則進一步找尋導致學生證明學習困難的原因，並提出建議的改善方式；而當中的一些研究其結論中就指出，學生在證明學習上無法達到老師的預期主要是因為他們受到證明的離散樣步驟（discrete-like steps）以及多面貌的證明形式的困擾（Hsieh, Lee, & Wang, 2009; Pedemonte, 2007）。Leron（1983）指出數學證明過程經常是單向的從假設到結論，並且以一步接一步的線性樣貌呈現，這樣的教學形式會僵化學生的證明學習，因此，他從學生證明行為的實際考察提出了一種替代方法，稱為「結構證明方法」，這是一種有層次的呈現方式而非只是線性的紀錄方式。Miyazaki、Fujita 與 Jones（2015）也認為幾何證明結構常常是超乎線性而更類似於一種流程圖的結構，並提出使用

開放性問題的流程圖證明結構可以協助學生更理解證明結構。然而，Lamport（1993）卻認為關鍵問題不在此，他認為諸如 Leron 所稱的結構證明方法雖有利於證明教學，卻沒有讓學生的證明更為嚴謹，或更能避免學生在證明在上可能發生的錯誤。如同 Lamport 所指出的問題，無論採用線性或其他證明結構方式，學生都必須面對證明的步驟與步驟之間連結的有效性議題。針對此議題，Pedemonte（2007）則立基在 Toulmin 的模型下，主張一個證明的每一步驟都可以視作一個演繹步驟，而每一個步驟都包含了三個元素：主張（claim）、資料（data），以及依據（warrant），並認為導致學生學習證明的困難的原因之一，就是因為這樣的演繹結構與學生進行論證或臆測的結構並不一致。

Stylianides 與 Stylianides（2008）認為在學校數學推動數學證明是項挑戰，因為要達到這個目標需要學生掌握許多能力。Martin、McCrone、Bower 與 Dindyal（2005）認為證明與推理是數學的重要面向，但如何培養學生具備這種高階思維的技能仍難以捉摸。Hsieh 等人（2009）明白指出，學生要完成一個證明，需要在多個步驟之間的邏輯推理上達到一定的品質，並認為學生的證明品質可以由三個面向決定，分別是（一）主要組件面向：每個步驟所主要強調的提取結果；（二）局部推理面向：步驟與步驟間的推理與參考依據，以及（三）邏輯序列面向：將主要組件在證明中按邏輯排列；而學生最感到困難的就在於他們需要在短短數個步驟之間分別指明不同的推論依據，並且需要將這些步驟以適當的方式陳列。從 Hsieh 等人的觀點看，一個成功的證明需要在這三個面向都有相當的品質要求，而這三個面向中，第一個涉及演繹推論的操作對象，後兩個則都直接連結到演繹推理，這也意味著演繹推論是證明的根本要素之一，因此探討學生保有的證明結構對於學生的證明建構極為重要。

Harel 與 Sowder（1998, pp. 236-237）則從另一個角度來看學生的證明困難原因，他們認為學生對證明的理解、欣賞和產生感到困難最主要的原因是：「在教師眼中這些推論都是理所當然的，並且教師們總是直接講授明確的命題證明，而不是透過探索和臆測活動」。因此 MacPherson（1985）和 Mariotti（2000）就認為整合探索活動在證明教學中是無可取代的。Usiskin（1980, p. 419）也表達了類似的觀點，他說：「我們似乎在證明教學上失敗了，因為我們太常忽視數學家何時且為何做證明、證明可能形式的多樣性，以及數學家如何寫下證明」。根據 Usiskin 的說法，數學家們都是試圖從已知的假設陳述開始，進而推斷一個還不確定是否為真的猜想，並且試圖推斷出任何可能的結果，因此，證明僅在經過大量的探索之後才進行。事實上，而這樣的產生論證的方式也是一般大眾所熟悉的過程。生活上，我們經常需要對自己所產生或觀察的事件結論進行成因的解釋或說明，這也是學生熟悉的證明經驗，例如，這樣的過程就經常能在偵探小說或重視演繹推論的電視影集中經驗到。Salmon（1973）在他的《邏輯》一書中曾使用福爾摩斯探案中的例子來說明論證的特徵與使用的邏輯結構。Salmon 指出，情節中偵探對於案情發展

經常做出斷言 (assertion)，但若偵探沒有提供一個論證或依據，人們是無法核證 (justify) 或推論 (inference) 結論的真實性，而這個論證或依據經常需要偵探從實踐中獲得。相較之下，數學課堂上學生卻很少事先進行探索，幾乎只是被告知他們應該證明什麼 (Usiskin, 1980)。

不難看出，「需要有依據」及「有效串聯依據」的概念是證明或論證的兩大精神，而透過探索獲得相關依據的手法，此與 Usiskin 所述數學家在進行證明活動之過程十分類似。可惜的是，在中學數學證明的學習歷程中，教師們卻經常忽略這個事實。課堂上我們要求學生證明或論證的敘述經常不是他們自己產生的斷言，因此學生對於證明沒有需求感和擁護感。Hanna 等人 (2009) 更直接點出這一個觀點，他們認為透過理解「論證」與「數學證明」之間的關係也許是證明活動設計的關鍵，因為論證只需要學生求使用擬真性論述 (arguments of plausibility)，文句的連結僅需具合理性不一定需要到演繹層次；而數學證明則必須是使用具必然性論述 (arguments of necessity)，文具連結需具組織良好的演繹推論鏈。這也能理解為什麼當數學教師提出一個證明題並要求學生回答時，學生常常提供的卻是論證的過程，經常忽略他們的答案是否支持題目的斷言，甚至也會出現探索式或儀式形式的答案 (Harel & Sowder, 1998)。因此本研究認為，如果我們可以在證明的學習前先提供一個學生探索或發現的過程與機會，讓學生可以產生自己的斷言並論證這個斷言，將會有助於數學證明的學習。

無論從歷史、認知或社會觀點來看，一個證明的建構過程埋藏了許多重要的元件 (Durand-Guerrier, Boero, Douek, Epp, & Tanguay, 2012)，包含了探索 (exploration)、臆測 (conjecturing)、非形式解釋 (informal explanation)、核證 (justification)、論證 (arguments)、形式證明 (formal proof) 等 (Hanna, 2000; Hsieh, Horng, & Shy, 2012; Kleiner, 1991; Lakatos, 1976; Pedemonte, 2007; Pólya, 1981)，但無論是上述的哪一個元件，元件中所涉及的「命題式邏輯 (propositional logic)」同時也能反映出學生在進行該元件活動時所需推理方面的認知結構。本研究將的這樣的推理認知結構稱為學生的「邏輯結構 (logical structure)」，由於邏輯結構為隱藏在學生腦中之認知結構，我們無法直接觀察，只能透過分析學生展現出來的語句加以推測，本研究將學生所展現語句所隱含的推論形式稱為「邏輯推論形式」或簡稱「推論形式 (inferring type)」，用以作為探索學生邏輯結構的依據。嚴格說來，「邏輯結構」與「推論形式」有著不同意涵 (腦中與外顯)，但區別兩者非本文主要目的，避免徒增困擾，本文中所使用兩者皆指涉相同意思，其內涵都近似於 Pedemonte (2007, p.24) 對於「結構」的描述，意指作為語句之間的邏輯認知連接 (the structure is to be intended as the logical cognitive connection between statements)。舉例來說，學生的論證使用的是演繹推論或是歸納推論為吾人可以觀察之推論形式，其背後則是反映出學生之演繹或歸納的邏輯結構。

在推論形式方面，相較於數學證明僅接受使用具必然性的演繹推論，論證 (argumentation)

可被接受的擬真性論述其形式就更為多樣。舉例來說，Pedemonte（2007）認為學生在進行論證時使用的邏輯結構除了演繹結構，就包含了溯因結構（*abductive structure*）與歸納結構。而本文所探討的議題更從探索到證明過程，因此將更多學生可能使用的推論形式也納入學生反映的邏輯結構範疇，例如類比推理（*reasoning by analogy*）、轉化推理（*transformational reasoning*）、直觀推理等。

總的來說，本研究的發想主要來自兩個基本假定。首先，本研究認為學生在某個證明的學習上無法有好的成果，是因為他們在學習該證明時中沒有先具備足夠的經驗。建構一個新的幾何證明本來就是不容易，若學生在正式進入形式證明的學習前，先經歷相關的探索活動，如此學生對於新證明的學習就會從「建構全新經驗」變成「舊經驗的回想與連結」，學生將能更容易學習證明。其次，本研究同意探索、論證與數學證明之間的一個主要的差異在於對推論形式多樣性的接受程度，彼此可能有連貫與不連貫的地方，而學生對於證明的學習並非是從無到有的邏輯結構上之建構，還包含了在不同證明學習活動中對於推論形式要求與使用上的差異與切換之認識，本研究稱之為學生邏輯結構的轉化。中學老師幾乎都同意幾何證明對於學生來說是困難的，然而國內從邏輯結構角度切入探討探索到證明產出相關的研究仍不多見，因此，本研究有興趣進一步探究當學生在數學探索活動時所反映出的邏輯結構，以及學生從探索到證明跨越時邏輯結構的建構與轉化情況，期能對於探索活動在數學證明所扮演的角色與能提供的協助。

二、研究目的與問題

本研究主要是想探究學生正式學習數學證明前若先經歷探索活動、論證活動，其在參與探索和論證活動時展現的推論形式為何，從而分析、比較學生在探索、論證和證明階段所展現之不同類型的推論形式。本研究架構乃基於 Hsieh 等人（2012）所提出的「探索-證明譜線（*Exploration-Proof spectrum, [EP-spectrum]*）」（本文亦稱為「EP 譜線」），並聚焦於學生在證明過程的各階段中之推理或推論發展。為方便研究討論與篇幅關係，本文將光譜重新區分成三個區段，分別是探索、論證與形式證明，並將研究焦點放在這三個區段學生展現之推論形式的差異，以及學生從探索到證明所反映出的邏輯結構之建構與轉化，詳細內容我們將在下一小節中有更詳細的說明。最後我們會從教學的觀點討論以下二個問題：（一）實際學習歷程中，學生在譜線中各階段最可能展現或認同的推論形式為何？（二）如何幫助不同推論類型學生從其他推論形式橋接到演繹推論？

值得一提的是，本文使用「邏輯結構」或「推論形式」意旨學生在譜線各個階段與過程中所反映或展現的各種推理方式，我們參考 Peirce（1960）和 Pedemonte（2007）的作法，在不引起混淆的情況下將「邏輯推理（*logic reasoning*）」一詞的指涉對象聚焦在演繹推理、歸納推理與溯因推理等三種推論形式，而根據 Pedemonte（2007）的說法，這三種推理是論證階段主要使用的

推論形式。

貳、理論架構與文獻探討

本研究主要是奠基在 Hsieh 等人（2012）所發展的「EP-spectrum」模型，這個模型將學校所學的數學證明視為一系列活動的產物，此系列活動始於探索活動，中間經過臆測（conjecturing）、非形式解釋（informal explanation）、核證式論證（justificative argument），最後到證明產生。根據 Hsieh 等人的觀點，所有學生課堂上所經驗的數學證明活動廣義來看都可視為一種問題解決，最終試圖形成證明；但 Hsieh 等人同時也指出，學生在學習過程上如果僅從「理解一個別人建構好的證明」著手，而沒有經歷外在活動的經驗，要在心智上建構一個證明是困難的。本研究依循這樣的觀點，在假設學生對於探索、論證與數學證明之間所使用的推論形式具有多樣性差異的前提下，來看學生在證明學習上的邏輯結構發展，並試圖回答學生需要什麼樣的邏輯結構來發展一個數學證明，而這些邏輯結構是否可以透過探索活動來協助建構並成功跨越到證明？

為更清楚本研究的理論架構，以下對於 EP-spectrum 模型與各階段的推論形式加以闡述。

一、EP-spectrum 的觀點

根據 Hsieh 等人（2012）所述，EP-spectrum 意指一種觀點，這個觀點是將課堂上的證明過程視為一種臆測或性質的核證過程。EP-spectrum 就像是一個有序性的光譜表，位於譜線的一端是探索，另一端則是證明產出。譜線上的各個階段依序是探索、臆測、非形式解釋、核證式論證，以及證明產生，這些階段反映出證明教學活動或過程的重要元素，各元素彼此之間並不是互斥的，且並非所有的證明活動都需要經歷序列中所有的階段。另一方面，Hsieh 等人還提到，學生們可以同時體驗或運作多個階段的工作，而教師也可以視教學活動的內容、目標或學生的程度決定是否要包括或略掉 EP-spectrum 的任一階段。大抵上，本研究採用相似的觀點，並將研究興趣放在證明過程中各階段的學生可能展現的推理或推論，但為避免研究分析過於繁瑣，本研究適度將 EP-spectrum 活動階段加以簡化成彼此不必然互斥的三個區段，分別是探索活動（含探索與臆測）、論證活動（含非形式解釋與核證式論證），以及證明產出（特別指形式證明），本文稱本研究簡化後的 EP-spectrum 為「EP 簡譜」（如圖 1）。

在確定 EP 簡譜的區段後，本研究從文獻與辯證中進一步建構 EP 簡譜中可用來作為觀察學生各區段會使用或可能展現的推論形式。首先，承續 Hanna 等人（2009）的認定，本研究也同意將論證界定在理性對話的使用，因此在論證區段上不只接受學生使用具有必然性的演繹形式，也接受可以使用具有合理性但不一定具必然性的論述。實際的作法上，我們則採用 Pedemonte（2007）的設定，將論證活動的推論形式預設在演繹推理、歸納推理與溯因推理等三種形式；相對的，證明產出區段我們則特指最後數學教學期望的形式證明，也就是 EP-spectrum 中所採用

之具有必然性的演繹推論鏈，因此允許的推論形式僅包含演繹推理。而在探索區段，本研究則接受學生各種可能使用、合理使用或文獻中提及的所有非形式的推論形式，其中非形式(informal)包含了如類比推理、轉化推理、直觀推理、生活推理(everyday reasoning)等形式(form)。特別說明的是，由於數學上，形式的(formal)一詞包含了使用數學語言與形式符號，因此即便學生在論證過程是採用演繹、歸納或溯因推理，若沒有使用形式化語言也可能僅是非形式化解釋。據此，圖 1 顯示了 EP 簡譜與相對應的多樣推論形式，也構成本研究主要的架構。

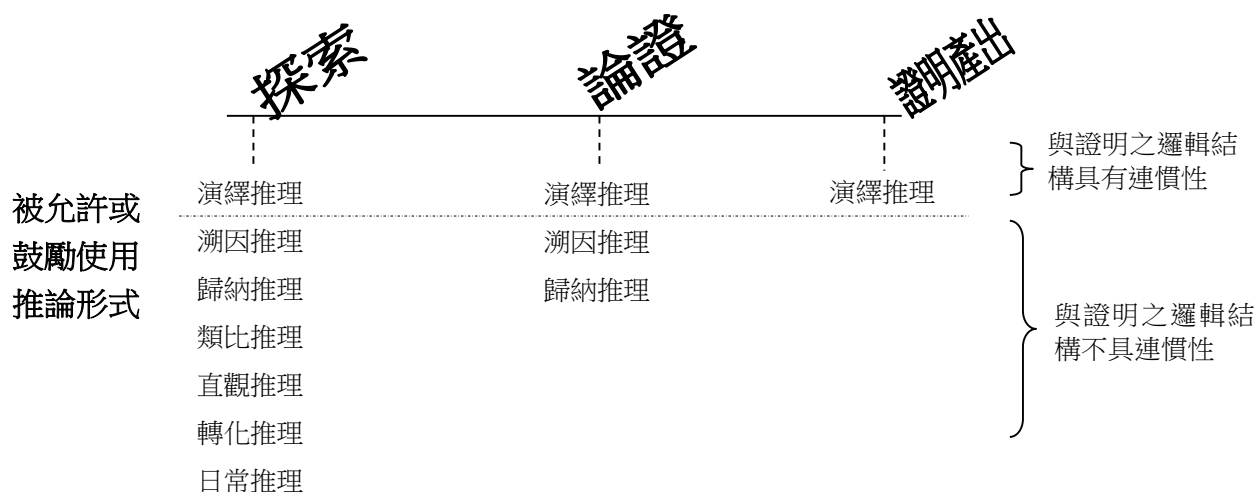


圖 1 EP 簡譜與多樣推論形式

圖 1 展示出，在探索或論證區段的活動中，被允許或鼓勵的推論形式多樣性多於證明產出區段，這也是為何我們無法預期學生從探索到證明應該且能保持邏輯連續性(logical continuity)。Pedemonte (2007) 就認為，如果學生的論證是基於對不同的例子觀察後，依據「模式的一般化」的推論形式來作為結論的擔保，那麼此論證活動反映的邏輯結構（即歸納結構）與之後進入證明區段的邏輯結構（即演繹結構）並不具有邏輯連續性。相同的，如果學生的探索是基於類比推理、轉化推理或直觀來作為結論的擔保，那麼同樣此探索活動的這些推論形式與證明區段（甚至於論證區段）所反映的邏輯結構也不具有邏輯連續性。如此一來，在實際教學上，教師要如何透過探索活動來幫助證明的學習？而在學理上，我們又如何確保透過探索或論證活動能夠提供證明所需要的邏輯結構？這些疑點我們期望能夠從實際對學生的考察獲得線索，而試圖探究這個問題時，我們需對各區段的使用的推論形式有更進一步的考察。

二、探索、論證與證明的推論／推理形式

Piaget 與 Garcia (1991) 認為推論(inferences) 可能被認為只是意義與意義之間所蘊含的言外之意。由此，當人們試圖透過對一個探索活動的觀察與連結來形成各種臆測時，他們其實是在試圖找尋一些「適當且有意義」的蘊涵關係，因此大量的推論形式就會浮現。大多數的情況

中，論證和證明活動的重點在於核證而不是發現，但論證也可能涉及發現面向，有時甚至會有創造性面向。這也是為什麼論證所含的推論形式不能排除歸納推理與溯因推理，此也吻合 Pedemonte (2007) 將歸納結構與溯因結構納入於論證結構的觀點。因此本研究同意學生在論證階段使用的推理包含演繹、歸納和溯因推理三種，而只有演繹推理可以被數學證明接受。由於演繹與歸納推論較為大眾所熟知，以下針對溯因推論稍加描述。

「溯因推理 (Abductive reasoning，國內也有學者譯作「發想」)」一詞在不同的領域有不同的意涵。在哲學、科學或計算機科學中，溯因推理經常意指「最佳」或「最合適」的解釋 (Josephson & Josephson, 1994)。Peirce (1960) 則認為溯因推理一詞在使用上有兩個意涵：一種猜測 (guessing) 的邏輯推論，以及一種逆向演繹推理 (reverse deduction)。Pedemonte (2007) 則採用後者的觀點，認為如果給定結論，學生使用一個或一些定理為依據，來回推「給定的已知是否可以」應用這個或這些定理以推得結論，這樣的步驟就稱為溯因步驟。Magnani (2001) 也提到類似的說法，並認為溯因推理在科學原理發現過程有其重要性。本研究大致採用這樣的觀點，將溯因推論視為從結果 (結論、斷言) 來追溯原因 (條件資料、前提) 的推論過程，亦即從觀察或結論與某些依據來生成假設 (以解釋這些觀察或結論)。本研究相信溯因推論的過程經常是學生進行證明或論證時，策略選擇的採用重要來源。舉例來說，想證明某一個三角形內的兩個角相等 (求證)，學生可能首先想到的策略或定理是「等腰三角形兩底角相等的性質」(依據)，因而回溯已知條件中是否有相關資料來取得支持，此時便使用了溯因推論的過程。不難看出，在方法上溯因推論更像是一種解析法，而解析法正是要形成數學證明的主要使用策略之一。

若將焦點放在探索活動，更為多元的推論形式就會出現，其中「轉化推理 (transformational reasoning)」就是當中的一個常見形式。轉化推理一詞來最早是由 Simon (1996, p. 201) 所提出，係指「一種透過對一個或多個物件進行操作所產生的心理或生理機制，這個機制可以讓人們將操作這些物件所發生的現象與結果與操作所蘊含的概念或內容產生聯繫，進而發生轉化現象」。舉例來說，學生透過對於摺紙的操作，將紙張操作的結果與幾何概念內容產生聯繫，如對折一個線段所產生的折線轉化為中垂線或中點，對摺一個角產生的折線轉化為角平分線等相關性質。若以此機制進行推論，本研究即視為一種轉化推理，而這個推理路徑也可能雙向的，且本研究認為在探索活動中轉化推理是學生很重要的推論形式之一。

Garnham 與 Oakhill (1994) 提出了另一個常見於探索活動的推論形式，稱為「日常推理 (everyday reasoning)」。顧名思義，日常推理是人們在實際生活情境上會使用的推論形式，如肚子痛可能是因為吃壞肚子，有人發燒就被認為是感冒了、嬰兒哭了是因為肚子餓了等等。Garnham 與 Oakhill 認為此推論形式使用的物件是取自於人們生活周遭的熟悉物，因此適合用來作為人們心理操作模型的分析。由於日常推理主要也來自生活經驗，實作與所聞所見則是經驗的主要來

源，因此「實作檢驗」、「眼見為憑」、「經驗法則」等就成了人們推論的依據與方式。由於數學探索活動經常結合生活物件或題材，因此學生可能自發性的加入某些生活經驗但題目沒有給定的條件並進行推論，如「1 片披薩」學生會認為就是「八分之一個披薩」，因此 16 片披薩是兩個完整的披薩；又如「四邊形紙板」學生經常會自動設定成長方形或正方形紙板進行推論等。

其他圖 1 所列常見於探索活動的推論形式還有「類比推理」，這也是數學教學常見的推論方式，例如懸掛一個三角形紙板的頂點其鉛垂線會將三角形分成兩個等面積的三角形，因而類比認為懸掛四邊形也會有相同性質就是一個類比的例子。另外，「直觀推理」也是一種在數學教育上用來解釋和預測學生推理的方法，Tirosh 與 Stavy（1999）則針對直觀推理提出兩種學生常用的直觀法則，包含 More A - More B 和 Same A - Same B 兩類，例如學生認為「兩個等面積（性質 A）的多邊形也會等周長（性質 B）」就屬於後者。不過，本研究所稱的直觀推論並不限定在 Tirosh 與 Stavy 所規範的直觀法則中，而是學生根據感官、知覺直接反映出的斷言，亦即支撐斷言的理由並沒有透過資料推論而來，如「看起來是一個矩形」、「中點連線可以看出切成四個全等的三角形」等。

簡而言之，當學生試圖建構意義之間的蘊含關係時，豐富的推論類型與多面向的探究方式會自然的浮現，因此界定各種不同推理形式對我們分析學生表現是有幫助的。學生為了確保探索過程順利的進行，他們經常需要確認自己所得到的東西是正確的（self-justification），有時他們也必須要運用社群核證（social-justification）更進一步提供令人信服的證據來解釋他們的臆測或斷言，此時已經進到了論證的區段。不同於探索區段證據是以建構「個人意義」為主，在論證區段學生還必須考慮如何形塑並分享適當的「共同意義」。從個人意義到共同意義的轉變是數學論證重要的推理特性，也是走向演繹推論與形式符號的重要關鍵，而這是一個漫長的過程，非一蹴可及，因此 Hsieh 等人（2012）在他們的 EP-spectrum 中依照學生不同的成熟度展現又將之分成非形式解釋與核證式論證，而這樣的現象在我們的教學試驗當中也確實展現。例如，當學生被要求對其他人解釋他們的原因時，他們確實有脫離非形式解釋而利用符號表徵進行記錄與溝通的傾向，但因本研究聚焦在推論形式上因此不再加以區別這兩類。

參、研究過程與方法

一、研究設計

將探索活動融入證明教學是重要的（MacPherson, 1985; Mariotti, 2000）。在臺灣的中學數學教科書中，探索活動也經常在幾何概念與性質的教學上扮演重要的角色。實際上，一份有 1034 位隨機抽樣的臺灣中學生所共同參與的研究調查發現，超過八成的中學生認為一個理想數學教師應該提供讓學生探索或動手做的活動讓學生欣賞數學（謝豐瑞、唐書志、宋玉如、王婷瑩，

2008)。這些事實都表明探索性的教學方法應該是可行的。

二、教學實驗與研究參與對象

為了調查學生如何理解以及如何做數學證明，本研究設計了一系列的探索活動，並在實際的課堂教學中使用。因為在臺灣的數學課堂中，一般證明的教學活動不會包含「EP 簡譜」上的每一個活動，因此本研究將整個系列教學視為一個教學實驗。實驗教學是使用探索方法進行證明和推理，教學主題是「證明連接任意四邊形各邊中點所得到的四邊形為平行四邊形」。實施對象採方便取樣，選取臺北市某國中的一個普通班 35 名九年級學生。該國中的整體學習表現在臺北市位於平均值左右，而實驗對象的班級在該校學習成就平均表現則是中間偏弱，學習落後的學生稍多於同學其他班，但由於是常態編班所以班上仍有三、四位程度很好的學生。

這個教學實驗的目的是檢驗學生在帶有探索和論證活動的證明學習活動中，所展現的推論形式的真實現象。進行教學實驗的時間在九年級上學期第一章相似形單元教完後，參與的學生還沒有正式於課堂中介紹「證明」這個概念，有關證明概念則在實驗時間點後三個月才正式介紹，因此也能排除補習的因素。然而，學生已經在數學課中看過他們的老師在口語上使用證明一詞，也看過教師以嚴謹的步驟來解決幾何的證明，舉例來說，實驗班級的學生在八年級就先學過三角形、全等、平行線、四邊形、平行四邊形等相關知識，諸如此類的幾何活動學生從八年級下學期開始約已經有四個月的學習經驗因此學生對於「證明」是有經驗的，然而，在這之前所使用的用語並不是「證明」，取而代之的是「說明」、「試著說說看」、「你的理由是什麼」這樣的語言，因此也不是正式介紹嚴謹的數學證明形式。

本教學實驗所取材的數學內容來自學生使用的課本，這個新的幾何命題對於大多數的學生是一個新的內容，所有的學生都被要求在學這個證明之前先經歷一個特別的探索與論證性質的活動。主要證明活動學習內容如圖 2：

已知：如右圖，四邊形 $ABCD$ 中， E 、 F 、 G 、 H 分別為 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{DA} 上的中點。
求證：四邊形 $EFGH$ 為平行四邊形。

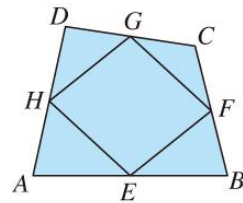


圖 2 主要證明活動學習內容

在我們的教學實驗中，這個教學活動分成三天（共四堂課）進行，總計約 150 分鐘。這樣的時間遠大於一般課堂一個證明題教學的時間。實驗教學會經歷 EP 簡譜中的每一個活動，尤其

在每一個活動中強調學生動手探索。下一節我們會詳述活動流程。

三、探索活動、研究工具

本研究的教學實驗設計架構如下。首先我們將上述的主要證明活動學習內容分成三個部分。

第一部分：連接線段 \overline{AC} ，說明 $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$ 且 $\overline{EF} = \frac{1}{2} \overline{AC}$ ；

第二部分：同理，說明 $\overline{GH} \parallel \overline{AC}$ 且 $\overline{GH} = \frac{1}{2} \overline{AC}$ ；

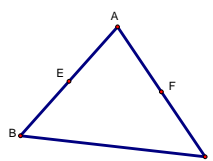
第三部分：運用上述兩部分的結果，以及平行四邊形判別性質，得到四邊形 $EFGH$ 為平行四邊形的結論。

本研究設計四個教學活動來完成上述的三個部分，教學活動是透過三份學習單呈現（每天使用一份學習單）。所有的活動描述、使用的教學任務與該活動的屬性描述如表 1。

表 1

教學實驗的活動任務與活動屬性

活動序	活動任務	活動屬性
活動1：	本活動設計主要透過摺紙進行實際的探索操作與論證思考，具體任務如下：	
1(a)	請學生任意畫一個三角形並剪下來，並使用摺紙找出其中兩邊的中點。	探索；
1(b)	摺出兩個中點的連線段，觀察這一條連線段，並寫出想到的任何性質。	論證。
1(c)	請學生利用摺紙設計一套方法，來說明上面寫的性質是對的。（最後學生必須交回摺紙。）	
活動2：	本活動設計主要是提供論證的經驗，具體任務如下：	
2(a)	老師提供一個畫有三角形 $\triangle ABD$ （如右圖）的紙張，其中兩邊的中點點 E 和點 F 。請學生在老師發的紙上， $\triangle ABD$ 外任取一 C 點，然後自己用筆連出一個四邊形 $ABCD$ 。	探索； 論證。
2(b)	請學生找出 \overline{BC} 和 \overline{CD} 的中點 G 、 H ，並連結 \overline{GH} 。並請學生在此圖形上連出 \overline{EF} 。接著讓學生觀察這些圖形後，自己寫出想到或發現了什麼？並請學生寫下要怎麼跟別人解釋他們的發現是正確的。	
2(c)	比較自己和周圍同學手上圖形的 \overline{EF} 和 \overline{GH} ，並寫下他們的發現。	



（續下頁）

表 1 (續)

活動序	活動任務	活動屬性
活動3：	本活動則正式切入主要學習內容。具體任務如下：	
	3(a) 任意畫出一個四邊形並將它剪下來，用筆標出四邊中點。接著將上面這個四邊形與其他同學交換。	探索； 論證。
	3(b) 請同學觀察至少兩個同學手上的圖形，寫出想到或發現了什麼？接著跟同學說一說他們的發現。	
	3(c) 老師提供一個情境：「有同學嘗試將幾個中點連結起來」。如果你也這麼做，你會發現什麼？請學生寫下他們的發現。並請學生寫下要怎麼跟別人解釋他們的發現是正確的。	
活動4：	本活動主要是進入賞析這個證明。具體任務如下：	探索；
	4(a) 請學生閱讀[圖2]的學習內容（先不回答）。請學生回憶並寫下當四邊形 $EFGH$ 具有哪些條件時，可以立刻被判定為平行四邊形。	論證； 證明。
	4(b) 請同學試寫一個心目中說明為什麼[圖2]中四邊形 $EFGH$ 是平行四邊形的「證明」。	

四、資料收集

本研究資料的收集除了三份根據教學活動所設計的學習單外，也包含所有課堂的那些操作摺紙與圖形；此外本研究也對所有三天的課堂活動（共計四節課）進行完整錄影，錄影主要是紀錄教師教學與學生反應所使用的語言與行為，以輔助紙本資料。教學所使用的學習單主要是以活動任務說明與開放性問題的形式呈現，所有學習單的內容完全根據表 1 所述來設計，包含活動引導語、學生思考問題與作答區、一些相關進階問題等，而學習單設計也會依據實際上課的學生情況於下一堂課前進行調整。而為了確保學習單的效度，本研究透過焦點團體（包含一位在職教師與兩位數學教育專家）進行表面效度檢核。有關學習單的使用，我們請合作教師在教學實驗的課程中要求學生記錄他們的觀察與想法，學生可以使用或選擇任何他們想要使用的表達方式，甚至包含把摺紙結果直接貼在學習單上。

在實際執行上，前三個活動的探索活動中，本研究合作老師並未主動介入或限制學生活動問題的結論，完全由學生自己觀察，再透過學生相互討論讓彼此觀察的結果，直到活動 4(b) 時，本研究特別設計在學生無法完成證明時，教師會依序給予一～三個提示後再分別調查他們是否可以完成問題。

五、資料分析

在資料處理上，本研究採取的分析方式是依據 Patton (2002) 建議之「內容分析」、「歸納分析」等發現導向的質性分析方法。由於學生都是一個單一個體，本研究盡可能尊重並嚴肅看待每一個學生的想法；另一方面，使用微觀視角分析個別學生的想法也能降低了分析的複雜性，因此更容易顯示每個學生的邏輯結構或推論形式。然而，本研究並非是一個個案研究，而是試圖將整體學生視為一個分析單位 (analysis unit)。因此本研究依學生在課堂上學習單上反應的描述資料，進行主要組型之確認和分類。

在形成組型的實際作法上，由兩位研究者分別整理學生在活動操作與記錄，將參與學生的反應進行分類，最後相互檢視類型的合適性以作為分析者的三角校正，若遇到歸類無法一致者則經小組討論後歸入其中一類；若學生展現多種的推論類型則經小組確認後歸入當中較為主要的類別，若無法決定其主要類別，則會分別統計。

由於本研究聚焦在推論形式類型，在組型分析之初我們先以理論架構中所提之各類推論形式作為歸類的參考，初始包含演繹、溯因、歸納、類比、直觀、轉化與日常推理等，但學生實際表現出的形式十分多元，因此隨著實際檢視學生的回答後也產生了新的組型，例如在活動 2 中，我們發現學生透過不同點 C 的選取操作後，得出一個平行的不變性的斷言，此則運用了歸納推理。但研究同時也發現有些學生僅透過一個特殊圖形（如等腰三角形）便進行通例性質的推論，此種推論儘管可視為特殊的歸納推論，但研究仍將之區分，將這種以特例進行歸納之推論形式命名為「特例推論」。

此外，研究也會因應學生實際的展現，細分原有之推論形式以更貼合學生表現。舉例來說，進行組型分析時，發現同樣使用演繹推論來進行論證的學生，有學生已經直接使用形式符號進行演繹推論，所依條件也都是題目提供或已經證實的，研究將之歸類於「符號演繹」。然而，有學生儘管仍進行的是演繹推論，但卻藉由口語、文字、簡易圖形或符號進行演繹推論，當中也使用了未經證實的條件，如學生 S28 在任務 1(c)時紀錄：「(1) 將底角往內折，把底邊對齊底邊。(2) 而線段 $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC}$ 。(3) $\therefore \overline{EF} = \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CD} \dots$ 」(參見圖 7)，這類學生未使用符號表徵且未達到形式證明要求的嚴謹程度，我們將之區分出來並命名為「口語演繹」。

在組型分析時，我們發現學生在探索階段會將實作摺紙所得到的摺痕、形體當成依據直接進行論證，如摺中點連線摺痕或是將三角形摺成長方形就宣稱對邊相等，諸如此類直接採用實作所得但沒有進一步驗證，我們會歸為「實作檢驗」，這也是一種眼見為憑的推論模式。另一種也是眼見為憑卻更直接根據感官、知覺直接反映出的斷言，如學生反映「看起來是一個矩形」、「中點連線可以看出切成四個全等的三角形」，卻沒有任何輔助的證據等，我們都歸為直觀推論。

值得一提的是，由於本研究設計非以量化研究為主，因此分析學生在各活動邏輯結構的類

型統計僅是參考，報導上仍是以是否有學生展現類型並佐證為論述依據。錄影資料則是在對於我們分析的詮釋有疑義時，轉而觀察影片資料，以確認教師與學生當時所使用的語言與無法實際記錄於紙本的行為表現，以輔助紙本資料。

肆、結果與討論

一、學生在探索與論證區段上展現多樣的推論形式，但論證區段不使用歸納法

本研究之教學實驗是從探索和操作活動開始，學生一開始並不知道這是一個數學證明的學習。在教學實驗的活動 1 和活動 2 中，除了一些正確使用演繹推理的學生外，本研究在學生學習單上也觀察到許多不同類型的推論形式。而在演繹推理上，展現的表徵方式與嚴謹程度也不相同。

表 2、表 3 為活動 1(c)和活動 2(b)學生展現的推論類型統計，表中學生形成之推論形式類別和編碼可參閱資料分析一節。從表 2 可以看出學生無法回答或回答不具實際意義的比例很高，可能是因為學生平時的數學課不常有動手探索與提出解釋的機會，因此突然請學生自己利用摺紙設計一套方法來說明自己提出的性質時，出現空白或使用不具實際意義的抽象說明的人很多，但從表 3 也可以發現，一旦有這個經驗後空白或不具實際意義的說明比例降低了許多。

表 2

任務1(c)展現的推論類型

推論形式 ^a	口語演繹	符號演繹	直觀	特例	實作	空泛 ^b	空白	合計
人數	4	4	3	2	4	7	8	35
%	11.4	11.4	8.6	5.7	11.4	20.0	22.9	100.0

註：^a歸類依據請參考「資料分析」一節。^b不具實際意義的說明。

表 3

任務2(b)向他人解釋自己發現時展現的推論類型

推論形式 ^a	口語演繹	符號演繹	直觀	特例	實作	空泛 ^b	空白	合計
人數	11	5	5	0	7	3	4	35
%	31.4	14.3	14.3	0	20.0	8.6	11.4	100.0

註：^a歸類依據請參考「資料分析」一節。^b不具實際意義的說明。

雖然空白或空泛回答的比例不少，仍可以看出在活動 1、活動 2 中探索與論證階段學生確實會展現多樣的推論形式。例如在活動 1 之任務 1(b) (c)的探索活動與論證，我們發現有學生使用尋找特例來解釋他們的發現，例如，學生 S26 選擇等腰三角形作為例子來探索，並將結果擴展到一般三角形。也有學生提供摺紙的實作當成證據，摺紙的作品上有許多摺痕，可以知道學

生試著透過摺紙解決問題，但並未輔以文字加以說明。

值得一提的是，研究進一步發現在 2(b)「在跟別人解釋他們的發現時…」轉而使用演繹推理（尤其是口語演繹）的人數明顯增加。本研究檢視兩個活動之間的教學影帶發現，在活動一之後，教師曾針對三角形兩邊中點連線性質的證明進行教學，我們認為該教學對於學生向他人解釋自己發現時所用的方法產生了影響，使得更多學生會傾向使用演繹方法來說明，這或許也能解釋表 3 中這兩類推論的比例增加了。

此外，在我們的教學實驗中也發現了許多其他類型的非正式推理。在任務 3(c)的「連接四邊中點所形成圖形」探索活動中，一些學生通過直觀得出結論，例如學生 S29 就說：「看起來是一個矩形」，原因就是 he 從自己所畫的鳶形（特例四邊形）直接經由視覺得出。我們也發現確實有一些學生在這個探索區段使用實作來支持自己的結論，例如學生 S29 在任務 2(b)時直接表示「用尺量一量後加起來」，這用的是實際生活經驗的實踐驗證方式。

本研究也發現，就算是進入說服他人的「社會核證階段」，學生在論證上也會使用非演繹形式的推論。例如學生 S24 在 3(c)任務中向他人解釋所得是平行四邊形時，他使用的方式是：「直接把這個圖給他（她）看」，亦即該生認為透過把「操作結果」展示給他人看也是一種證明，這是一種「眼見為憑」的日常推理模式。同樣的，學生 S29 在任務 2(b)時向別人解釋為何三角形兩邊中點連線長會第三邊的一半時，他就表示「①量同位角的角度；②拿尺量！（實際證明）」；在 3(c)任務時這位學生則寫道：「（連接四邊中點）出現了四邊形了！看起來像長方形。」向他人解釋所得為何是長方形時他就表示：「拿尺量和量角器，數數看幾個邊」，皆表明了這種用實際測量數據來支撐所得結論的證明方式，也被學生作為一種說服他人的核證方法。

實際考察學生學習單，本研究另也發現許多學生會透過摺紙活動直接將紙張操作的過程與結果直接轉化為幾何概念內容，將摺紙所形成最後圖形或形成的摺痕作為數學斷言、事實或補助線來源的依據，也就是 Simon（1996）所述的「轉化推理」。這樣的推論形式在探索區段與論證區段都有出現。例如，學生 S21 在任務 3(c)連接四邊中點時，透過觀察得到許多全等三角形的組合，如圖 3 所示。該生在解釋所得結果時，直接透過圖形的拼貼轉化成三角形全等的概念，也以此作為論證的依據。又如，學生 S34 在解釋兩邊中點連線長度是第三邊長的一半時，該生直接將三角形摺成長方形（學生作法可參見圖 4）並將該摺法之簡要步驟與圖形記錄於學習單上，從其論述中可以看出該生將這樣的表達直接作為解釋內容主體，而不只是輔助的角色。這些實例都揭示轉化思維仍存在於學生論證區段，以及學生在社會核證階段自然展現的說理形式仍十分多樣性。

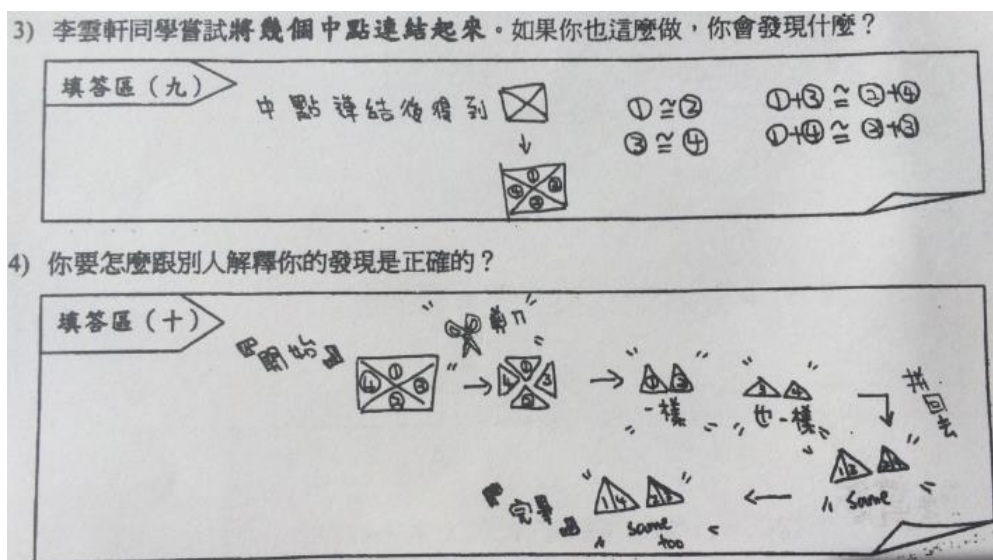


圖 3 學生 S21 在任務 3(c)的作答紀錄

研究也發現，即便在論證區段時學生看似進行演繹推論，背後意涵也未必如此。例如，在 3(c)跟他人解釋四邊形中點連線中所形成圖形的任務中，學生 S15 從所操作的圖形中認為：「它是平行四邊形，因為連起來有四個邊」；或如 S34 認為四邊形是矩形，因為對邊平行而且鄰邊不相等（學生實際作法參見圖 4）。這些推論並不具備演繹推論的有效性，也無法被視為數學證明，儘管如此，就「論證形式」而言確實屬於演繹方法。這樣的現象也顯示，即便學生的紀錄形式像是以演繹推論方式呈現，可能學生在論證、探索中使用的仍是非演繹推論的方法。

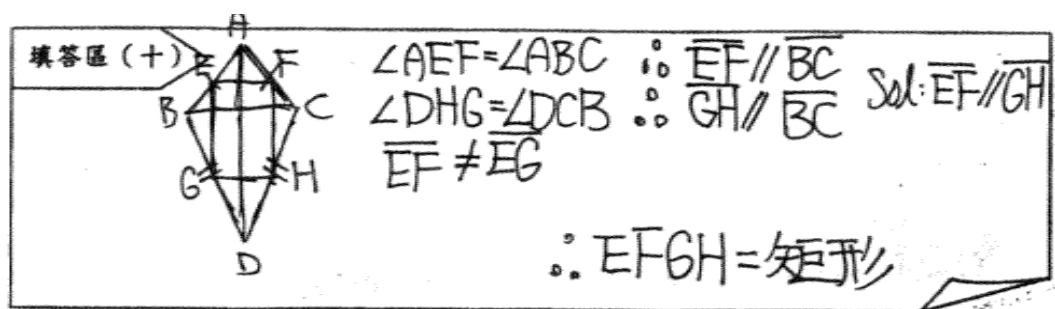


圖 4 學生 S34 在任務 3(c)的作答紀錄

然而，進一步思考學生 S34 完整的論證過程，他是先透過自己所畫的圖形先得到中點連線四邊形 EFGH 為長方形的結論，再回溯尋支持是長方形的證據與條件，而不是從既有的條件中透過推論的方式得到是長方形，就論證形式來說，學生更像是進行溯因推理，此被 Pedemonte (2007) 歸為論證推理之一，意指學生所提之支持理由並不能直接從已知的資料中得到，這樣的推論方式與學生使用未經證實的定理性質進行推論應有所區別。例如在任務 2(b)中，S5 想要

像他人解釋為什麼「 $\overline{EF} = \overline{BD} = \overline{GH}$ 」時，他的理由是：「畫一條直線垂直三條線」；同一個問題 S6 提出的解釋是：「因為同為角相同」。這些學生用以支持結論的理由都無法直接從資料取得。

事實上，在活動中任務 1(c)涉及的三角形中線性質（連結 \overline{AC} ，求證 $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$ 且 $\overline{EF} = \frac{1}{2} \overline{AC}$ ）是這個班級學生事先學過的內容。研究發現，任務 1(c)老師是請學生設計一套摺紙操作來形成他們自己的結論並加以說明，儘管幾乎每個學生都能透過摺紙操作來進行觀察，但超過三分之一的學生並沒有依照任務要求在解釋性質時將操作方式紀錄下來，而是直接提供形式的證明方式。這說明了學生可能不知如何將非形式的作法加以記錄，或是他們無法將已經形式化的證明轉為操作活動；前者可能的原因之一是因為學生在課堂上有很少實際操作的經驗並展現他們的發現，以致他們並不知道如何表達非形式的推論操作，而後者則表明了演繹推論涉及與探索或論證不同的能力，不一定能相互取代。這樣的現象也顯示，學生在探索或論證活動中所使用的驗證方式，並不一定能和證明所使用的演繹法相互轉換，換言之，EP 簡譜的證明發展不一定能逆向進行，教學上也不能寄望學生能跳過探索階段直接學習數學證明，待學會數學證明後能將論證或探索的推論自行補上。

另一有趣的現象是，在活動 2(c)、活動 3(c)中探索任務，很多學生透過和同學交換圖形並透過觀察多個例子後，以歸納的方式形成臆測或得到結論，但這一群學生卻沒有人使用歸納推論的方式作為說服其他人的依據，亦即沒有展現類似於「因為觀察的圖形都是（有）…，所以認為…」這樣的論述。這也意味著，就學生而言，歸納推論是一種探索的方式，但說並不是一個向人說理的方式。這也告訴我們，Pedemonte（2007）所述的論證推理的三種推論形式受試學生並沒有出現歸納推理，但會使用轉化推理。

二、探索與論證活動會增進學生表徵的辨識與連結

在我們的教學實驗中，探索除了可以視為是學生的一種心理活動，也是一種促進學生心理運作與外界環境互動的活動。例如，在任務 1(b)中，學生被要求寫下「觀察給定三角形中的兩邊中點連線的發現」，35 位同學只有 2 人（5.7%）沒有任何想法以致無法寫下任何的觀察結果，該班的數學老師就表示以該班的數學表現，這樣的現象是很令人印象深刻的事，這也意味著大多數的學生都能透過特定表徵上的探索活動（如摺紙），回憶或擷取某些已經學過的事，該師也相信如果以形式符號表達原問題，是不會得到這樣好的回應。

此外，研究也發現探索活動能提供檢測學生知識或意義網絡的環境，亦即學生在探索活動的環境下許多概念或關係的連結鍵反而容易浮現。例如實驗班學生在之前學到「三角形兩邊中點連線」的性質時，當時並沒有與相似三角形有所關連，然而在本教學實驗的任務 1(b)中讓學生觀察這個性質時，僅有 42.9%（15 人）提到連線段與第三邊平行或長度為一半的關係，卻有

超過一半的學生 (51.4%) 提到三角形的相似性質，特別是「AA 相似性質」。儘管可能是因為三角形相似性質是學生剛剛學過不久的數學內容，但三角形兩邊中點連線的性質與 AA 相似性質並沒有直接關連，即便是有也應與 SAS 相似性質關連才是，本研究認為是因為在這個探索活動中學生確實在操作過程中受到視覺效果影響，把兩個不同學習單元的內容連結起來，此也直接影響部分學生在長度為一半關係之論證上，直接使用三角形相似性質，這應是操作活動帶給學生的刺激所造成。

本研究進一步比較兩組學生之間的差異，發現那些提到三角形相似性質的學生看到的是整個圖形，而另一組看到三角形中點連線性質的學生看到的是圖形組成元素。本研究認為而在數學證明的學習過程中，理解元素之間的關係有助於論證能力的發展，此也意味著，看到三角形相似性質的學生由於是關注於整個圖形而非圖形組成元素，因此在證明學習上將比看到三角形中點連線性質的學生更困難，而這樣的結果也符合 van Hiele 提出的幾何思考層次模型。

研究也發現，那些在任務 1(b) 提到中點連線與底邊平行或長度為一半的 15 名學生中，有 4 名學生在任務 1(c) 中提供了使用摺紙的完整論據。如 S36 為例，該生證明三角形中點連線 \overline{DE} 長是第三邊 \overline{AC} 長的一半時 (見圖 5)，他沿著 \overline{EF} 將上方小三角形頂點 B 往下摺到 \overline{AC} 上，此圖形自然形成四個三角形，而這個作法確實提供了輔助線的建構洞察，以及一個可發展成為證明的方式。這個方式除了認為能讓他們掌握到組成元件之間的關係，也可以讓證明的組件真實化以提供學生適當的內在連結，我們相信若學生沒有透過操作而進繪製 \overline{DE} ，是很難進行連結的。另一方面，在 18 個觀察到相似性的學生中，雖然也有 4 名學生使用摺紙支持他們相似形的觀察，但沒有一個成功地透過摺紙證明他們的論點。以 S21 為例，見圖 6，可以看出他的操作並不能支持他兩三角形相似的發現，也很難發展成一個證明。這個現象也提供我們一個重要的線索關於學生證明能力發展的檢測，當學生在操作活動中能達到對於元素之間關係的理解，會更能掌握數學證明的學習，而這樣的結果同樣也可以從 van Hiele 提出的幾何思考層次模型加以解釋。

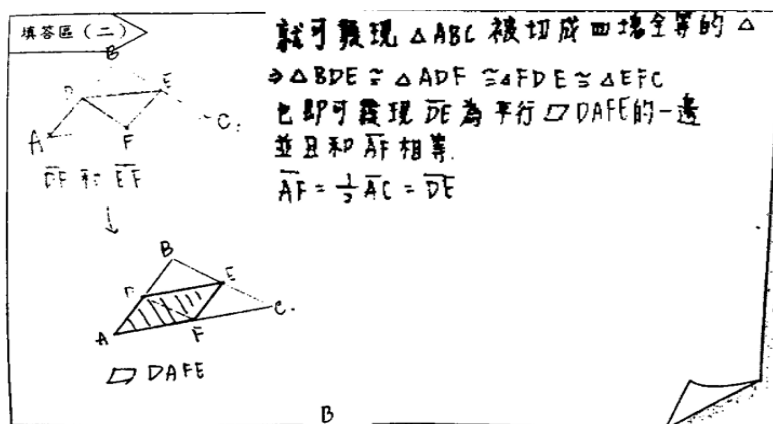


圖 5 學生 S36 在任務 1(c) 的作答紀錄

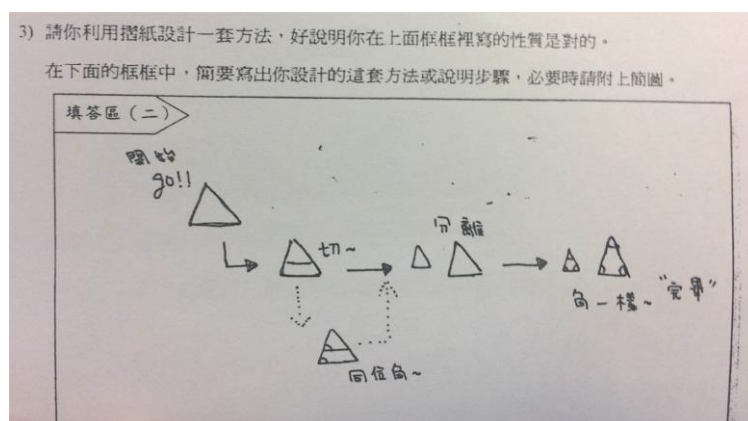


圖 6 學生 S21 在任務 1(c)中使用摺紙論述 AA 相似性質

三、學生動手做後的推理反應有可能正向協助演繹形式，但並非都是

如第一小節所述，在「EP 簡譜」的探索區段，我們可以看到以核證為目的所提供連結鏈的推論類型十分多樣，有些類型並不具有演繹或因果關係。事實上，對數學物件之間的演繹或因果關係的缺乏意識，是學生在任何操作活動初始階段常見的現象。將原本沒有關連的兩個元件連接在一起是學生在幾何論證的困難點，而透過實體物件的操作或許可以提供這樣的連接經驗。

在我們的教學實驗中，當學生在任務 1(c)中被要求設計一套操作方法核證這個已經學過的性質時，有 48.6% (17 人) 提供了較為完整的論述，但如「結果一」所述，這些學生當中大多數人並非提供摺紙操作的驗證方法，仍是直接使用形式紀錄，可見操作與解釋的方式不一致，但那些提供摺紙設計以進行驗證的同學，當他們試圖透過摺紙將線段搬移或進行比較時，可以將原本沒有關連的物件加以連接。例如學生 S28 證明三角形中點連線 EF 長是第三邊 AD 長的一半時（其作法與說明請參見圖 7），可以看出他通過手動操作這樣的外在動作，完成了連接兩個「遙遠」對象的心理內在動作，並建立一個有意義的核證或因果結構。這個有意義的核證或因果結構有機會可以被發展成為一個數學證明，而這個證明是學生自己所建構出來的，自然更為穩固。

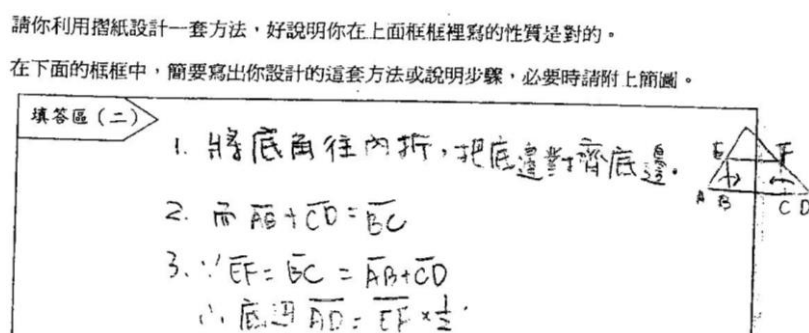


圖 7 學生 S28 在任務 1(c)的作答紀錄

在進一步的觀察中，我們發現儘管許多學生的說明是非形式的表達方式，但粗略的核證或證明架構可能已經開始萌芽，數學概念與關係的連接鍵確實可以通過探索和論證加以重組。例如，學生 S36 在任務 3(b) 中發現「四邊形 $EFGH$ 是平行四邊形」，她在任務 3(c) 的非形式解釋（參見圖 8）中已具備演繹推理結構。若相比這位學生（S36）在任務 1(c) 所使用的推論形式（參見圖 5），可以看出其演繹推理結構更顯得清晰，甚至可以看出離正式演繹證明只有一步之遙。

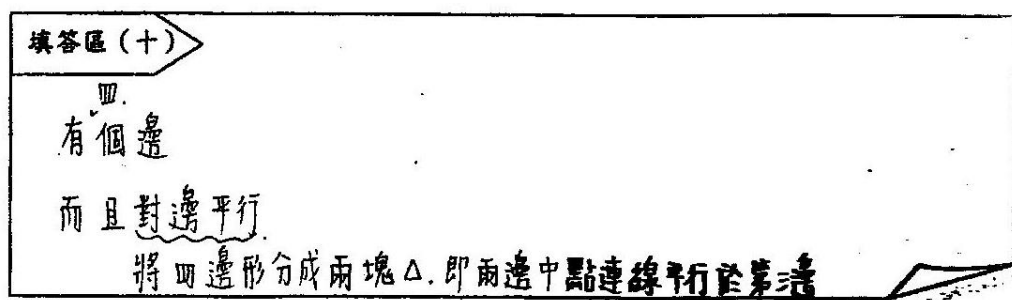


圖 8 學生 S36 在任務 3(c) 的紀錄

然而，研究也顯示動手操作後的推理反應並非都能正向協助演繹形式。研究發現學生在任務 3(b) 的探索活動後向別人解釋觀察時（任務 3(c)），只有約一成的學生會使用演繹推論（詳見表 4）。有 22.9%（8 人）的學生則是訴諸定義或簡單屬性，如直接說「有一對平行的邊且等長」所以平行四邊形，但對於為什麼平行、等長就不再加以陳述，其他 17.1%（6 人）的觀察則停在更簡單的組成，例如，四邊中點連線是一個四邊形，因為「它有四個邊」。在這些推論方式中，使用演繹、溯因、轉化、定義或一般元件等方式都是經過「解析」的方式來進行核證，而不是直接透過直觀。但也有學生反而受到操作活動的影響，使用了無效的推論，如其中 4 人使用訴諸視覺感官的日常推理（如給他看圖、看起來像是…）、有 6 人使用不具實際意義的抽象語言當成說明（如「實際操作」、「言語說不盡」等）。

表 4

任務 3(c) 展現的推論類型

推論形式	演繹 ^a	轉化 ^b	定義	元件 ^c	日常 ^d	空泛 ^e	空白	合計
人數	4	1	8	6	4	6	6	35
%	11.4	2.9	22.9	17.1	11.4	17.1	17.1	100.0

註：^a 包含形式演繹，以及使用未經證實的條件進行演繹。^b 是指直接透過圖形的拼貼轉化成論證依據。

^c 更簡單的組成元件，如有四的邊。^d 是指訴諸視覺觀察，如給他看圖、用尺量等眼見為憑的日常推理。^e 使用不具實際意義的抽象說明，如實際操作、言語說不盡。

研究同樣也發現有一些學生使用了特例歸納方式作為連結橋樑，他們從一些特例的觀察獲得了一般性結論，其中不自覺地使用了這些特例所賦予的額外性質達到他們心中的「正確結論」。例如，S34 在任務 3(c) 中畫出一個類似鳶形的四邊形 $ABCD$ ，並以此圖作為探究起點，因此觀察得到四邊形 $EFGH$ 為長方形的結論，從他的解釋中可以發現將四個角為直角是他額外增加的條件（參見圖 4），這種特例進行歸納推論的確實是學生在探索中會使用的方法。由於在課堂探索活動經常只能操作少數的例子，因此學生並不總是能夠掌握教師預期傳遞的一般化信息（例如繪製一個「任意的四邊形」）。此所可能產生的另一種情況是，學生將看到的現象視為已知或假設條件，而沒有進行確認，本研究也認為此結果對於學生學習證明會產生阻礙，可能會發生學生無法判斷哪一個性質是可用的、哪一個又需要驗證，因此產生這種直接使用「未經過證實的條件」進行演繹推論的形式。例如，S21 在任務 3(c) 中（參閱圖 3），學生從操作中得到四個三角形兩兩為全等三角形，並且使用圖形的拼貼直接轉化成證據；相同的情況也發生在 S36 的 1(c)（參閱圖 5）中，學生從摺紙中直接觀察出四個三角形全等就開始進行推論。

我們的研究也發現，學生在操作活動後得到一個從數學上看是正確的結論，但在解釋時卻採用錯誤的論證來支持這個結論。例如，學生 S29 在任務 1(c) 中想要使用摺紙來解釋三角形兩邊中點連線和底邊平行，他提到：「將連線往下摺與底邊重疊便可知道是否平行」（如圖 9 所示），這並不是一個在演繹推論上有效的驗證方法。又如 S34 在任務 3(c) 中（如圖 4 所示）受到自己所畫圖形影響，將四邊形 $ABCD$ 視為鳶形並得到 $EFGH$ 是一個矩形的結論，他進行的論證中除了他沒有提供論證中有關四個角為垂直的依據，從其記錄上看他是以 $\overline{EF} \neq \overline{EG}$ 作為是一個 $EFGH$ 是一個矩形的依據，這些都是在證明上無效的演繹推論。

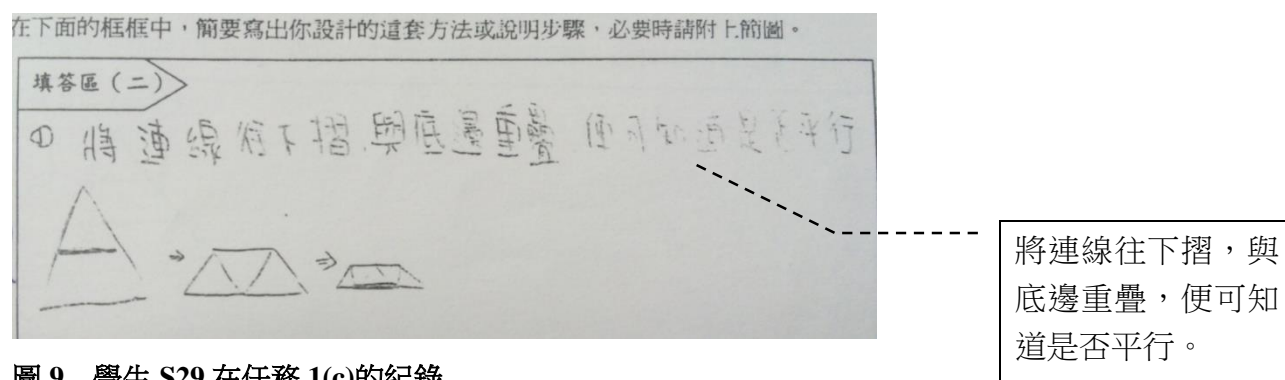


圖 9 學生 S29 在任務 1(c) 的紀錄

綜合上述，我們可以看出在學生操作過後進行論證區段，學生確實會採用非形式的表達方式，這些方式有的已經具有核證或證明架構的雛形，但仍有許多學生展現演繹推論的謬誤。這種在探索後的論證活動所產生的演繹謬誤大致可分成三種類型：（1）來自直覺或特例歸納的錯誤結論；（2）使用未經證實或錯誤條件的推論；（3）無效的推論支持正確結論。

四、邏輯結構的連續性有助於學生學習證明

從證明的邏輯結構觀點來看，演繹推理似乎被認為是最終目標。其他類型的推理，如直覺或歸納推理，在數學證明中沒有生存的空間。然而，本研究認為學生開始學習證明時，探索活動不應該被忽略，而且在探索活動中所使用的那些不同的推論形式不應只被視為學習數學證明的鷹架。不僅僅是因為學生探索中已經開始使用演繹推理，可更深化未來學習證明的能力，而其他的形式的推理也是重要的數學能力，有些甚至可以與演繹推理相互轉化。從我們的研究觀察中得知，學生即使在探索觀察階段也經常需要藉助演繹推理來解釋他們的發現和驗證他們的斷言，若不考慮數學語言和符號的使用，它們之間的邏輯結構幾乎是相同的。舉例來說，當 S36 在經過任務 3(c) 探索活動後接著解釋其「四邊形 $EFGH$ 是平行四邊形時」的發現時，他說：「有四個邊，而且對邊平行。將四邊形被分成兩塊個 Δ ，即兩邊中點連線平行於第三邊」(參見圖 8)，可以看出雖然該生的論證經過高度的濃縮與簡化，但幾乎所需的必要元件（或想法）都已經展現在論證中，也已經反映了主要的邏輯結構。

若對照 S36 在任務 1(c)、2(b) 的活動歷程紀錄，在 1(c) 時該生透過摺紙發現會形成四個全等三角形（參考圖 5），並根據觀察與全等三角形性質宣稱四邊形 $DAEF$ 為平行四邊形。儘管此時從形式證明的觀點看，直接使用操作觀察得到的論點進行推論不能確保證明的正確，且當中仍然交雜著多種論證形式，但不可否認學生在此的確也運用的平行四邊形的性質進行了演繹形式的論證（因為四邊形 $DAEF$ 為平行四邊形所以 $\overline{DE} = \overline{AF}$ ）。進一步分析該生在任務 2(b) 上（如圖 10），他已經直接使用任務 1(c) 的結論套用在新形成的 \overline{GH} 上，可以看出學生在此的論述是承接活動一的結論，雖然該生使用的並未形式化，且使用演繹形式又更為隱晦，但中點連線與底邊平行且長度為一半的結論已經十分明顯，並不是僅透過觀察而來。

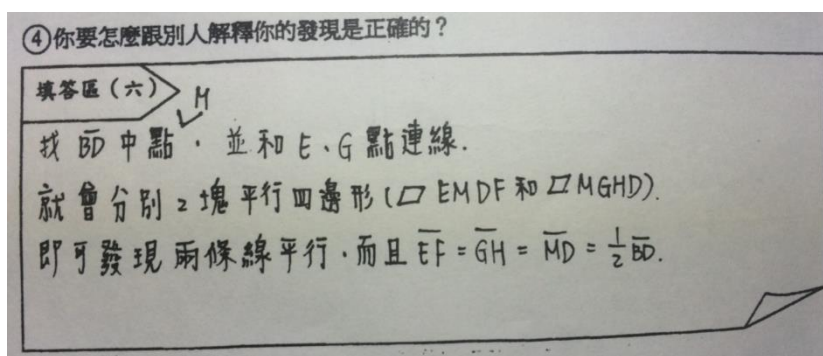


圖 10 學生 S36 在任務 2(b) 的作答紀錄

同樣的學生 S10 在任務 1(c) 觀察並驗證中點連線時，他透過摺紙得出「 $\overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{BC}$ 」的結論，而在描述他的理由時，通過操作觀察得到的四塊全等三角形、平行四邊形等論述（如圖 11）從

形式證明的觀點看並非可以直接使用的證明條件，但之後立基於此的推論卻是演繹推論。換言之，上述兩位該生經過探索活動後在論證上，已經展現了演繹推論的潛在特質，本研究將之稱為「演繹潛質 (deductive potential)」。事實上，研究也發現「在先前探索和論證任務 3(c) 中表現出演繹潛質的所有學生，全都能完成任務 4(b)「為什麼的四邊形 $EFGH$ 是平行四邊形」的證明」。這些例子都顯示了探索活動和證明之間推論形式上的連續性。本研究認為想要更平順、更有效率地進行證明教學，教師應該在每一階段都留意學生所反映出的邏輯結構連續性。

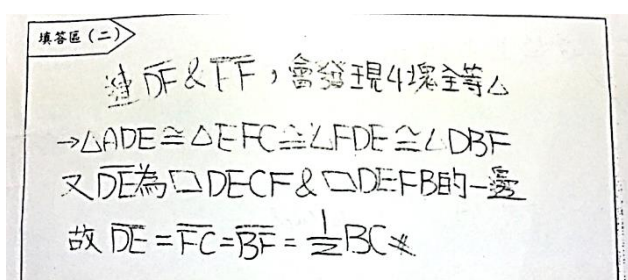


圖 11 學生 S10 在任務 1(c) 的作答紀錄

若從演繹推論所運作的對象來看，為了給出完整的數學證明，不僅需要使用演繹推論，也必須有演繹推論所運作的數學內容，也就是 Hsieh 等人 (2009) 所指涉的「主要組件」。這些內容或依據經常可以從探索中獲得。例如用直觀的洞察連結相關物件、用摺紙繪製輔助線以形成全等三角形、通過溯因論證尋求必要的資料。研究進一步分析後發現，在學生在活動 4 嘗試證明卻失敗後，當老師給予一～三個提示時，那些因而得以成功進行推論的學生似乎都與他們先前的探索或論證經驗有關。

表 5 顯示在任務 3(b) (c) 使用不同推論類型的學生，在給予不同提示下完成任務 4(b) 證明的學生分布。研究將學生分成兩個群組，群組一是在任務 3 中使用「解析」方法的學生（展現出使用定義，一般屬性進行演繹推理和溯因推理的學生，可參考前一小節），群組二是其他非群組一的學生。在給予三個提示中前兩個提示目的是請學生回憶他們在活動 3 和活動 1 的實踐經驗。從內容上看，提示二是構建輔助線的關鍵也是學生難點，而從表二中也能發現提示二確實也是影響最大的提示，特別是對那些傾向於使用解析方法來探索和論證的人，特別能夠透過探索的經驗幫助他們邁向形式證明；而沒有使用解析方法來進行任務 3(b) (c) 的人仍然有機會通過先前的探索和論證成功地建構證明，但成效沒有這麼的顯明。這些都表明當學生在探索活動所獲得經驗，同時也將其他非形式推論朝著演繹推論轉化。這也應證了本研究先前假設，幾何探索與論證活動能提供學生證明所需邏輯結構的預先經驗，學生對於證明的學習可用回想與轉化以取代重新建構。

表 5

不同推論類型的學生在給予不同提示下完成任務4(b)的學生分布

	完成人數		合計
	群組一	群組二	
未給予提示	5	4	9
提示一：轉一下圖形（參見圖 2），很像你在活動 3 看到的什麼？	1	3	4
提示二：回憶一下你在活動 1 所發現的	8	2	10
提示三：回憶一下你在活動 2 做的事情	2	0	2
合計	16	9	25

註 1：「群組一」表示在任務 3(b) (c)使用解析方法的學生；「群組二」表示其他非群組一的學生。

註 2：當天有 4 位學生缺席，6 位學生在三個提示後仍然失敗。

伍、結論與建議

一、從探索到證明的邏輯結構轉化的啟發與教學建議

如果將建構證明當作學生學習的目標，那麼培養學生使用演繹推論是必不可缺的。Hsieh 等人（2012）從認知觀點認為探索活動有助於證明的學習至少有下列四個理由：（1）可以揭示證明開始與過程所需的訊息；（2）有助理解證明過程；（3）激發臆測的一般化；和（4）核證證明的過程。由上述四點可以看出，教師若對探索活動的使用越了解，就越能做出合適的教學設計以提高證明的學習。針對學生從幾何探索活動到證明的邏輯結構建構與轉化，本研究透過教學實驗提出以下四個觀點。

觀點一、從表 1~3 中，我們發現許多學生在論證活動中，經常只會提供核證所有要求的各項主要組成部分，但沒有展現證明中所需要的推論細節，對於資料來源的交代或中間的推論的串接沒有表達清楚。因此我們建議在教學中，教師可以在操作活動時不斷地讓學生「解釋為什麼」這個理由會支持結論，讓學生有機會回填他們的推論過程，而這件事對於學生未來證明的建構或回憶是有幫助的，因為到了形式的證明區段才讓學生「解釋為什麼」有時為時已晚。教學上，老師也可以讓學生在探索後試圖取信他人的論證活動，來建構社會核證的論證概念，而不是僅僅表徵一個推論步驟。

觀點二、不同於觀點一的學生在論證中會提供所有主要組成部分而不提供推論細節，本研究也發現很多學生在論證中會憑空冒出「關鍵性質」來解釋為什麼他們的發現是對的，尤其是學生常以定義、性質作為理由，但缺乏進一步思考他們所提出的性質能不能從資料學生的已知中直接得到。例如，在活動 3 中，當學生被要求向其他人解釋為什麼四邊形的中點形成平行四邊形時，超過五分之一的學生只寫下了諸如「AA 相似」、「對邊平行且相等」；或是在證明線段相互平行時，直接提供「因為同位角相等」、「同時垂直一條線」等。學生提供的證據通常來自他

們直觀的觀察或他們所知道的事實、記憶或口訣。因此在驗證階段，他們仍然處於自我核證而非社會核證。對於這一類的學生，我們建議在教學中，教師可以經常詢問學生「溯因推論」的問題，例如：「如果結論是正確的，我們需要什麼條件？」，讓學生養成提供證據的習慣，來構建局部推理和證明的邏輯序列。

觀點三、Hsieh 等人（2009）指出臺灣數學課堂上的教學是十分緊湊的，教師通常必須快速進行證明教學，導致學生很難在學習證明的當下掌握當中的主要組件。在這個教學實驗中，老師設計了摺紙探索讓學生可以尋找證明的關鍵想法中的主要組件，而在教學實驗中，如果學生在經過探索活動後，到了證明區段卻不知道如何著手或開始，老師只需要提醒學生「想想我們在課堂上做了什麼」，那麼學生可能很容易回憶起證明的主要組件。因為對學生而言，學生親手做過更容易記憶，也更容易回憶，因此我們建議尤其對於尚未熟悉形式證明的學生，應在課堂中適時加入探索活動。

觀點四、對於數學證明而言，關注前提或依據是否為真，是一個時時得留意且重要的認知行為。問題在於學生通常對於「哪個結果他們可以直接在證明中使用？」、「哪個條件又是未經證實的命題」等感到困惑，也因此，一些學生會在證明中直接使用從探索活動所發現的結果或結論。例如，在活動 1 中，學生試圖論證三角形兩邊中點連線是底邊的一半時，通過摺紙他發現原來的三角形被分為四個小的全等三角形，並依據這個觀察結果直接執行「適當的」演繹推理。學生將他「看到的事實」或「一個特殊例」作為前提（儘管這個結果可能在數學上也是真的），在數學課堂上這些事實當下仍會被視為一個未經證實的主張，然而學生並不是總能清楚區分兩者的差別。眼見為憑、轉化推論、歸納推論等在探索中鼓勵使用的方式，在證明中卻不一定能被使用，這樣的不連續性將無可避免的造成學生學習證明的困擾。

可以看出，上述的四個觀點中，前三個觀點是再展現從探索到證明的邏輯結構的連續性，而第四觀點則表明了當中的不連續性。教學要如何從中拿捏是教師或數學教育工作者需要注意的事情。

二、結論

本研究從教學方法的觀點，將學校的證明教學視為從探索活動到形式證明的完整過程。儘管我們在探索和論證中看到很多學生展現的推論形式類型，而數學證明中只能接受演繹推理，本研究認為如果教師可以在證明的學習前，先提供學生一個探索或發現的機會與過程，讓學生可以在同一個議題先產生自己的斷言，並透過論證向他人解釋這個斷言，對於形式證明的學習是有幫助的，而這些假定也在我們的教學實驗中獲得了驗證與修正。

從我們的教學實驗中發現，即便在論證區段，學生自然展現的推論類型仍存在形式與非形式兩種不同類型，其中非形式的類型包含了如類比推理、轉化推理、直觀推理、生活推理(everyday

reasoning) 等形式，由於數學上的形式的 (formal) 包含了使用數學語言與形式符號，因此即便是採用演繹、歸納或溯因推理卻沒有使用形式化語言，也可能歸於非形式化解釋。因此就我們將這些類型重新分類為解析方式與非解析方式，其中解析方式包括使用定義、一般性質、溯因推論與演繹推論等。研究結果表明，採用解析方式的學生在學習證明時具有主導地位，這類學生即便在證明的學習遇到阻礙，也很容易從回想中獲得證明的訊息，這也意味著為了讓證明教學流暢、具有更高效率，教師應該更加將重點放在探索活動學生邏輯結構的連續性。這個研究也指出 Pedemonte (2007) 將論證結構的範疇僅包含演繹結構、溯因結構與歸納結構三類應予以調整，因為研究實際觀察學生的論證過程發現他們也會使用轉化推論與類比推理，這些邏輯結構也不應被排除在論證推理的範疇。

本研究認為數學探索活動可以被視為檢視個體知識或意義的情境網絡，數學證明不在只是冷冰冰的抽象思考遊戲，是可以摸得到、感受到的，因此也是學生與數學概念、關係的樞紐帶。同時，探索活動可以鼓勵學生同時關注證明的「主要組件」與「邏輯序列」，因此是一種很有效率的學習方式。但研究也顯示，儘管探索活動具有啟發式學習的特徵，但由於學生在操作活動時聚焦的對象和關係具推論形式的多樣性，也可能導致後續證明學習的阻礙，例如將眼睛觀察到的現象未加證實的直接使用，老師們也必須有所警覺。

其次，適當的探索活動和論證活動能激發學生數學概念和性質之間關係的重新組織，透過外在操作動作來促進學生的內在轉化，就像學生 S28 在任務 1(c) 上所展現的那樣 (圖 7)，由學生自己建立一個有意義的核證或因果結構。雖然這個表徵仍是非形式的，但透過這樣的轉化，粗略的核證/證明架構已開始萌芽。此外，進行探索活動也能協助學生建構證明的主要組件，如透過探索活動提取同底的不同三角形中點連線這個組件，透過摺紙摺痕建構輔助線等，這些通常是學生學習證明的困難點。探索和論證除了提供了輔助線的建構洞察，也可以讓證明的組件真實化以提供學生適當的內在連結。

最後我們提出呼籲，證明的功能主要在於核證，而不是發現。我們不能期望學生在心理上樂於為一個不是他們發現的事實進行辯護，這是本研究再教學實驗中最深的感受。當我們在過程中發現學生想要告知別人他的發現是對的，那時臉上所展現出的活力與企圖，才是我們期望學生學習證明、甚至是學習數學的表情。如果我們想為學生提供更多瞭解證明的機會、學習如何建構一個證明、甚至鼓勵他們親近證明，在證明教學之前先進行探索和論證活動應該是不可或缺的。

參考文獻

謝豐瑞、唐書志、宋玉如、王婷瑩 (2008 年 12 月)。國中理想數學教師類型探討。中華民國第二十四屆科學教育學術研討會發表之論文，國立彰化師範大學。【Hsieh, Feng-Jui, Tang, Shu-

- Jyh, Song, Yu-Ru, & Wang, Ting-Ying (2008, December). *The types of ideal lower secondary mathematics teachers*. Paper presented at the meeting of the 24th Science Education Conference, National Changhua University of Education. (in Chinese)】
- Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N., & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The teaching of proof. In T. Li (Ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Vol. III, pp. 907-920), Beijing, China: Higher Education Press. doi: 10.1142/4962
- Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. S., & Tanguay, D. (2012). Argumentation and proof in the mathematics classroom. In G. Hanna and M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI study* (pp. 349-367). Dordrecht, The Netherlands: Springer. doi: 10.1007/978-94-007-2129-6_15
- Epp, S. (2003). The role of logic in teaching proof. *The American Mathematical Monthly*, 110(10), 886-899. doi: 10.2307/3647960
- Garnham, A., & Oakhill, J. (1994). *Thinking and reasoning*. Cambridge, MA: Basil Blackwell.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation, and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1-3), 5-23. doi: 10.1023/A:1012737223465
- Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996). Proof and Proving. In A. Bishop, M. A. K. Clements, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 877-908), Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/978-94-009-1465-0_24
- Hanna, G., de Villiers, M., Arzarello, F., Dreyfus, T., Durand-Guerrier, V., Jahnke, H. N., ... Yevdokimov, O. (2009). ICMI study 19: Proof and proving in mathematics education: Discussion document. In F. L. Lin, F. J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICME Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education*. (Vol. 1, pp. xix-xxx). Taipei, Taiwan: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education* (Vol. III, pp. 234-283). Providence, RI: America Mathematical Society. doi: 10.1090/cbmath/007/07
- Hsieh, F. J., Horng, W. S. & Shy, H. Y. (2012). From exploration to proof production. In G. Hanna and M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI study*. (pp. 279-303). Dordrecht, The Netherlands: Springer. doi: 10.1007/978-94-007-2129-6_12
- Hsieh, F. J., Lee, F. T., & Wang, T. Y. (2009). How much proofs are students able to learn in mathematics class from their teachers. In F. L. Lin, F. J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICME Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 208-213). Taipei, Taiwan: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- Josephson, J. R., & Josephson, S. G. (1994). *Abductive inference: Computation, philosophy, technology*. New York, NY: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9780511530128
- Kleiner, L. (1991). Rigor and proof in mathematics: A historical perspective. *Mathematics Magazine*, 64(5), 291-314. doi: 10.2307/2690647
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge, UK: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9781139171472

- Lamport, L. (1993, February 14). *How to write a proof*. Retrieved from <http://research.microsoft.com/en-us/um/people/lamport/pubs/lamport-how-to-write.pdf>
- Leron, U. (1983). Structuring mathematical proofs. *The American Mathematical Monthly*, 90(3), 174-185. doi: 10.2307/2975544
- MacPherson, E. D. (1985). The themes of geometry: Design of the nonformal geometry curriculum. In C. R. Hirsch & M. J. Zweng. (Eds.), *The secondary school mathematics curriculum: 1985 yearbook* (pp.65-80). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Magnani, L. (2001). *Abduction, reason and science: Processes of discovery and explanation*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1-3), 25-53. doi: 10.1023/A:1012733122556
- Martin, T. S., McCrone, S. M. S., Bower, M. L. W., & Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof. *Educational Studies in Mathematics*, 60(1), 95-124. doi: 10.1007/s10649-005-6698-0
- Miyazaki, M., Fujita, T., & Jones, K. (2015). Flow-chart proofs with open problems as scaffolds for learning about geometrical proofs. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 47(7), 1211-1224. doi:10.1007/s11858-015-0712-5
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research & evaluation method* (3rd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 23-41. doi: 10.1007/s10649-006-9057-x
- Peirce, C. S. (1960). *Collected papers of Charles Sanders Peirce* (Vol. 1). Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Piaget, J., & Garcia, R. (1991). *Toward a logic of meanings*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Pólya, G. (1981). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving* (Vol. I and II). New York, NY: John Wiley & Sons.
- Salmon, W. C. (1973). *Logic* (2nd ed.). Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Simon, M. A. (1996). Beyond inductive and deductive reasoning: The search for a sense of knowing. *Educational Studies in Mathematics*, 30(2), 197-209. doi: 10.1007/BF00302630
- Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2008). Proof in school mathematics: Insights from psychological research into students' ability for deductive reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(2), 103-133. doi: 10.1080/10986060701854425
- Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(3), 314-352.
- Tirosh, D. & Stavy, R. (1999). Intuitive rules: A way to explain and predict students' reasoning. *Educational studies in mathematics*, 38(1-3), 51-66. doi: 10.1007/978-94-017-1584-3_3

Usiskin, Z. (1980). What should not be in the algebra and geometry curricula of average college-bound students? *The Mathematics Teacher*, 73(6), 413-424.

附錄：部分本研究使用之學習單示例

從探索到證明活動開始嘍

- 中點到線段兩端點的距離必須相等。
- 兩條平行線指的是兩條同時和某一條直線垂直的直線。

活動一

- 1) 首先，讓我們來看看自己

還記不記得怎麼用摺紙找出一條線段的中點，以及畫出兩條平行線。

- 2) 接下來讓我們複習一下三角形中點連線性質以及相關的數學性質。

①請在老師發的紙張上畫一個和別人不一樣的三角形，小心地把它取（或剪或割）下來。

②找出各邊中點，並且摺出其中兩個中點的連線段。

③關於②中的這一條連線段，請在底下的框框裡寫出你想到的任何性質。

填答區（一）

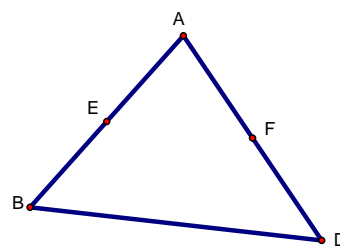
- 3) 請你利用摺紙設計一套方法，好說明你在上面框框裡寫的性質是對的。

在下面的框框中，簡要寫出你設計的這套方法或說明步驟，必要時請附上簡圖。

填答區（二）

活動二

老師會發給你一個三角形，和右圖這個相似，記為 $\triangle ABD$ ，其中兩邊的中點已經被標示出來，分別是 \overline{AB} 的中點 E 和 \overline{AD} 的中點 F 。



填答區（四）

我看得懂上面數學符號與句子裡的意思嗎？請勾選最符合自己現況的一個方格：

☐看得懂 ☐看不懂（請寫出哪裡不懂）

1) ①請你在老師發的紙上， $\triangle ABD$ 外任取一 C 點，然後自己用筆連出一個四邊形 $ABCD$ 。

②利用摺紙的方法找出 \overline{BC} 和 \overline{CD} 的中點，並摺出一條直線連結這兩個中點。

你想到或發現了什麼嗎？請將想到或發現的事情寫在下面的框框裡。

填答區（五）

2) 請你繼續用原子筆在老師發的圖形上連出 \overline{EF} 。你想到或發現了什麼？寫在下面的框框裡。

填答區（六）

活動三

- 1) 請你在老師發的空白紙上任意畫出一個四邊形，並且將它剪下來，用筆標出四邊中點。
- 2) 將上面這個四邊形傳給下一位同學。
- 3) 看一看你和周圍同學手上的圖形，你有沒有發現什麼？

填答區（八）

看過幾個圖形後，.....

☐ 沒什麼特別的 ☐ 我發現到_____（請簡單說明）

- 4) 李雲軒同學嘗試將幾個中點連結起來以尋求各種可能的發現。
如果你也這麼做，你將發現什麼？請在框框中寫下你的發現與理由。

填答區（九）