

蘇意雯、黃俊瑋、陳靜惠、林明怡（2014）。  
以數學史劇本設計引動教師專業成長之研究。  
**臺灣數學教育期刊**，1（2），25-52。  
doi: 10.6278/tjme.20140904.004

## 以數學史劇本設計引動教師專業成長之研究

蘇意雯<sup>1</sup>   黃俊瑋<sup>2</sup>   陳靜惠<sup>3</sup>   林明怡<sup>4</sup>

<sup>1</sup> 臺北市立大學數學系

<sup>2</sup> 國立臺灣師範大學數學系

<sup>3</sup> 臺北市華江國民小學

<sup>4</sup> 新北市莒光國民小學

本研究以數學史劇本設計為進路，觀察個案教師在參與過程中之專業發展變化概況。研究團隊有師資培育者、高中數學教師及研究生，參與教師們以組成教師社群的方式進行，在每兩週一次的會議中，針對素材之蒐集、閱讀與統整，以及如何融入於數學史劇本之編寫等議題，進行分享與討論。研究者群為參與觀察者，透過「觀察」、「訪談」、「文本收集」等多元方式，蒐集會議與活動之現場觀察、訪談以及會議記錄、會後回饋單、問卷調查、心得撰寫、數學史劇本等相關研究資料，進行分析與後續研究。研究結果發現如下幾點：1. 藉由教師社群的對話，參與教師互相激勵。2. 閱讀讓教師認識數學知識之不同風貌。3. 影片觀摩與欣賞提供編寫劇本之靈感。4. 討論讓劇本創作更精緻。5. 專家諮詢與座談會開拓參與教師之視野。透過本研究歷程，參與教師在數學專業知識與數學史知識有所增長，對數學教學知識也能有所反思，並增進了對劇本寫作的瞭解。

**關鍵詞：**數學史、劇本、教師專業成長

---

通訊作者：蘇意雯，e-mail：[yiwen@utapei.edu.tw](mailto:yiwen@utapei.edu.tw)

收稿：2013 年 9 月 24 日；

接受刊登：2014 年 9 月 30 日。

Su, Y. W., Huang, J. W., Chen, C. H., & Lin, M. Y. (2014).  
Enhancing teachers' professional development through HPM script design.  
*Taiwan Journal of Mathematics Education*, 1(2), 25-52.  
doi: 10.6278/tjme.20140904.004

## Enhancing teachers' professional development through HPM script design

Yi-Wen Su<sup>1</sup>      Jyun -Wei Huang<sup>2</sup>      Ching-Hui Chen<sup>3</sup>      Ming-Yi Lin<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Department of Mathematics, University of Taipei

<sup>2</sup> Department of Mathematics, National Taiwan Normal University

<sup>3</sup> Taipei Municipal Huajiang Elementary School

<sup>4</sup> New Taipei City Juguang Elementary School

A group of teachers were observed for determining how they develop professionally. The study involved the teachers designing scripts based on the history and pedagogy of mathematics (HPM). The research team consisted of a teacher educator, high school math teachers, and graduate students. The teachers participated in discussion sessions held biweekly, shared their experiences on issues such as the collection, perusal, and integration of information and on the addition of this information to the HPM script during script production. The research team comprised participant observers who collected meeting minutes, interviewed the teachers, and analyzed data from post meeting feedback sheets, questionnaires, reports, and HPM-script-related research information. The researchers made the following observations: (1) Through teacher community dialogues, the participating teachers inspired each other. (2) Reading helped the teachers recognize different aspects of mathematics knowledge. (3) Film viewing for appreciation and analysis provided inspiration to write the scripts. (4) Discussion led to the scriptwriting becoming more refined. (5) Counseling and panel discussions broadened the teachers' perspectives. Furthermore, it was found that the participating teachers' knowledge of mathematics and history of mathematics had increased. The teachers could also exchange their mathematics pedagogy knowledge and enhance their understanding of script writing.

**Keywords:** history and pedagogy of mathematics (HPM), script, teacher's professional development

## 壹、前言

### 一、研究背景與動機

聯合國教科文組織（UNESCO）1966 年發表《關於教師地位之建議書》，其中提到：「教學應被視為一種專門職業：它是一種公眾服務的型態，它需要教師的專業知識以及特殊技能，這些都要經過持續的努力與研究，才能獲得並維持。此外，它需要從事者對於兒童的教育以及福祉，產生一種個人的以及團體的責任感。」（行政院教育改革審議委員會，1996，頁 24）。時至今日，在十二年國教實施之際，教師專業成長之議題仍舊受到各方重視。研究者發展本研究的構想主要來自國科會兩個補助計畫：「古代數學文本在課堂上的使用」（洪萬生，2001）與「數學教師專業發展與 HPM」（洪萬生，2003），其中，數學史與數學教學關聯之國際研究群（International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics, HPM），主要關注如何利用數學史的研究成果、以及數學史與數學教育的互動，來提升數學教師的教學品質與學生的學習成效。在上述第一個計劃中顯示，由於古代數學文本在中學課堂上的恰當使用，讓參與教師的學生充分暴露在數學的人文趣味之前，為數學教育的價值打開了一個嶄新的面向（洪萬生，2001）。在第二個計劃中，參與教師學習如何運用數學史融入數學教學，也從中發展出種種可用的策略，例如：廣泛閱讀數學史及數學教學相關書籍；以考慮數學邏輯、歷史和學生認知這三面向的學習工作單引動教師融入數學史於數學教學；以教學後實作心得作為反思之用；多方參與和數學教育有關之座談；經由專家諮詢及以學校為中心之實踐社群方式促成共同成長等等（蘇意雯，2004）。研究者也發現涵蓋邏輯、歷史、學生認知三面向的 HPM 學習工作單，可以有效連結參與教師對於 HPM 理論的瞭解與實作，裨益學生對於數學內容的掌握。

國立教育資料館於 96 年度教育頻道教學影片製作的數學領域中研發了十個單元的數學史動畫。研究者在 96 學年度的任教過程中，針對 27 名在職國小教師的調查顯示，普遍認同數學動畫對教學有幫助（5 點量表平均分數達 4.48），經問卷詢問其理由，其中包含了「以動畫介紹數學史的故事，絕對比教師口述的方式更具吸引力。」、「對於一些不善於說故事的老師，透過內容適當且精彩之視聽媒材的教學輔助，肯定會使教學更加生動活潑。」等看法。

針對運用動畫於教學面向，國外學者 Bransford 等人（1988）利用播放影片故事做為教學材料，幫助學生學習解題，除了故事本身有趣，能讓兒童清楚看到數學與生活之連結，引發濃厚學習動機之外，也由於有了影像呈現問題，讓兒童更能理解問題的意義。就國內而言，黃仕奇與楊德清（2014）製作數常識數位動畫對小六學童進行實驗教學，結果也發現動畫實驗組學生之後測表現顯著優於對照組學生的表現。以數學史動畫來說，除了國內教育資料館所製作之數

學史動畫，美國公共電視台（PBS）和英國國家廣播公司（BBC）也有一些有關數學史單元的錄影帶節目。此外，T. M. Apostol 教授的研究團隊也製作了含有數學史成分，可以在課堂上使用的影片（網站名稱是 *Project MATHEMATICS!*。網址為 <http://www.projectmathematics.com/>），並曾召開教師工作坊，於工作坊中參與教師也提及了這樣新的想法及創新的教學方式改進了他們的教學，讓學生更有興趣學習數學。

承上所述，想要製作出一部優質的動畫，首要之務便是編寫出動人的劇本，不過撰寫出隱含數學發展，能涵蓋適合學生程度的相關數學知識，又能吸引學生興趣的劇本，並不是一件容易的事，對於現場的教師而言，要如何從無到有開發出數學史劇本？在這一段歷程中，教師們會有何轉變？這正是本研究想要關注的議題。

## 二、研究目的與問題

本研究的目的是在於藉由高中數學教師組成的教師社群，經由研究規劃完成數學史之劇本，從參與教師的創作歷程中，分析參與教師的專業成長與改變。

依據上述研究目的，本研究主要待答問題為：在撰寫數學史劇本之歷程中，參與教師所獲得的專業成長與改變為何？

## 貳、文獻探討

### 一、數學史與教師專業成長

#### （一）數學史與數學教學

數學概念已演化數千年，數學思維的發展過程以及古代數學家的智慧，正可以提供我們學習數學思考方面的洞見，因此將歷史問題應用於數學教學之中已受到關注（洪萬生，2000；劉柏宏，2007；蘇意雯，2011）。對於數學教學中為何要引入數學史？Furinghetti 與 Paola（2003）認為，在課堂上融入歷史不但可以激發學生在數學上的興趣，也可用數學為主體安排課程，探討數學的脈絡，幫助達成數學的目標。Barbin（2000）認為在數學教學中融入歷史維度最常見的理由是數學史可以讓我們思考「數學究竟為何？」以及讓我們對於概念和理論有更好的瞭解。Tzanakis 與 Arcavi（2000）也提出運用數學史於數學教學，能幫助數學學習、讓教師對於數學本質和數學活動的發展，有另一個觀點，進而提升教師自己教學知識，讓教師能喜好數學，視數學為一項文化成果。而 Grugnetti（2000）則認為數學史在教學上的影響如下：1. 使用古文本上的問題，讓學生比較現行策略與原始文獻之異同。2. 以歷史建構數學的技能和概念。3. 經由歷史的分析，讓教師瞭解為何某一特定概念對於學生造成困難。

九年一貫課程綱要所強調的十大基本能力中，在第六項文化學習與國際瞭解中的一項能力指標「連結數學發展與人類文化活動間的互動」，也正是 HPM 所關注的課題。在數學課堂上提

供數學史料，可以讓學生知道數學是人類的活動，瞭解文化的多樣性和培養多元文化的關懷，除了讓學生體會數學的人文面向外，適當的史料剪裁及文本的提供，正可當作數學教學上的範例，有助於學生對於數學重要概念的體會和啟發。透過數學史的融入，學生對於數學解題的認知將會從「知道」解法提昇到「欣賞」解法的境界，因而可能啟發他們對數學概念的認知（Siu, 1993）。

綜括來說，以數學史融入數學教學所能達成的目標，可以涵蓋三個範疇，那就是情意、認知及文化活動（Fasanelli, 2000）。對照我國九年一貫數學學習領域的基本理念中，也提及了數學史的重要性：「教師教學裡，引進與主題相關的數學史，對學童學習會有很正面的意義，尤其能協助學童抽象觀念具體化，因為不論在科技應用層面或思想突破方面，數學重要概念的演進確有其實用面考量，因此提供具啟發性的數學史方面的讀物實屬必要。」（教育部，2008，頁 23）。經由國小數學史融入數學教學實作，我們發現透過數學史能為學生揭開數學神秘的面紗，讓學生瞭解數學的起源，也能正面增強他們的數學學習態度（沈志龍、蘇意雯，2009；林妙霜、蘇意雯，2009；施昱光、蘇意雯，2012；蔡幸霓、蘇意雯，2009）。劉柏宏（2007）的研究中也發現，體驗過和見識過一些同儕和歷史上數學家的解題策略後，也引發學生開始注意數學知識的發展元素，因此在對於數學知識的產生與歷程方面，學生的論述開始強調數學家所扮演的角色。再者，學生的學後觀點也呈現出他們理解到數學知識承先啟後的階段性過程。可見在教學中適時強調數學史，正可對學生之數學學習有所幫助。

## （二）教師專業成長

對於在提升教師專業素質的方向，行政院教育改革審議委員會（1996）建議對在職教師要建立教師進階制度，提供多元進修管道，才能不斷提升教師教學品質，協助教師生涯發展。同時，也建議各級學校辦理校內進修活動，以落實發揮教學研究會功能，使教師的在職進修在教育專業成長中真正日新又新、教學相長，增進專業智能，更提升教學品質，有效達成教學目標（行政院教育改革審議委員會，1996）。也就是說，學校不只是教師執行改革的場所而已，也應成為教師學習改革和發起改革的地方，而教師與教師之間彼此合作也能形成相加相乘的效果。近年來，教育部（2009）並提出教師專業學習社群具有減少教師之間的孤立與隔閡、激發教師進行自我反思與成長、提高教師自我效能與集體效能、促進教師實踐知識的分享與創新、提高教師素質進而提升學生學習成效以及促使學校文化質變，行政、教學相輔相成等價值。

在強化教師專業發展的面向上，歐用生（1996）以教育行政者的觀點，提出了 1. 加強教師的職前教育。2. 發揮導入教育的功能。3. 加強質的研究。4. 落實學校本位課程發展。5. 實施夥伴視導。6. 培養批判的反省能力等六項途徑。對於在職教師而言，主要重點擺放於後四項，這幾點也是本研究加以考量的範疇，特別是批判反省能力的培養，也就是反思。反思層次可以

包括一般的反思，即對個人直接或間接經驗的覆誦；自我的反思，即對個人實務經驗的反思；教學的反思，即對教學中各面向問題的反思；學理的反思，即對與一般化理論聯繫的反思。愈是深層的反思，愈能促使教師對教學事件有更深入的了解，從而擬定最佳的行動對策，並促進教師教學專業的成長（Goffree & Dolk, 1995）。反思實作正是近年來在數學教師教育研究中，一個相當受重視的議題（Lerman, 2001）。以促進教師專業成長的研究來看，教師要形成新的教學實踐策略，達到理論與實踐相結合，並促進學生成長的教學目的，自我反省是一個相當重要的途徑（潘世尊，2000）。

Clarke 與 Hollingsworth（2002）提出「專業成長互連模式」（The Interconnected Model of Professional Growth, IMPG），檢視在職數學教師專業成長歷程。其模式是認為經由反思和付諸行動等兩種傳導機制，串連外在、實務、個人及結果四個領域，導致教師發生改變。此四個領域意指：

1. 外在領域：指外界提供的資訊、刺激或支援。
2. 實務領域：指教師的教學實作。
3. 個人領域：包含教師知識、信念或態度。
4. 結果領域：指教師改變教學行為後，所呈現的教學成效。

最近數年，歐洲地區探討於師資培育上針對教育議題的情景寫作，串連成劇本（ATEE-RDC 19, 2003），研究發現，情景寫作可以引動教師創造性的思維（Viebahn & Hilton, 2006），可做為反思和學習的工具（Snoek, 2003），也可以促進教師培育者之專業發展（Cautreels, 2003）。上述這些教師專業成長模式，亦是本研究之重要參考依據。

就數學史與數學教師專業發展而言，Schubring（2000）認為過去的數十年中，對於教師的數學史能力培訓，主要目的如下：

1. 讓教師知道過去的數學，也就是數學史的直接傳授。
2. 促進教師對於他們即將教授之數學的了解，這是方法論以及認識論的功能。
3. 授與教師融入歷史素材於教學的方法和技能，意即在課堂中運用數學史。
4. 促進教師對於自身專業以及課程發展的了解，這涵蓋了數學教學史的部分。

然而，從目前師資培育者的實作和經驗中，遭遇不少待解決的問題。例如數學教師在他們的歷史知識和自信上仍然相當不足。因此必須要靠在教師訓練上擴展和推廣歷史的成分。為了能更進一步整合歷史及數學，更好的教學素材和範例的發展也是必要的。就教師專業發展而言，數學史的引入可以改變教師對數學的洞察力和了解，歷史的軌跡並不僅是一種揭示，也是教師反思的來源。Lakatos（1976）便嘗試透過對特定問題歷史發展過程的重建，傳達數學思考的多種面向。數學史讓我們思考數學是一個隨著時間反思，並改善的過程。有了這樣的體認

後，教師會改變教數學的方式，也能對學生的迷思採取包容和理解的正向態度，能用同理心處理學生的錯誤。

Furinghetti 與 Paola (2003) 提出給老師現成的教學序列，讓教師馬上可以實行，這樣固然方便，可是最好的方法，還是創造一個可讓教師自由發揮的環境，只有自己親手設計、實作，才能得到最好的教學效果。從 HPM 的施行來看，Tzanakis 與 Arcavi (2000) 認為，在原典、二手文獻和教學素材三者，教學素材最為缺乏。美國數學教師協會 (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]) (1986) 也提及數學教師所需要的專業發展，包含學科內容知識、教學知識以及資源素材。唯有當教師有機會瞭解以及開發素材後，才有可能在自身的課堂上去使用那些素材。有關 HPM 劇本的研製，是本研究欲開發的重點，至於參與教師在研發教材過程中所經歷的正向轉變，正可以說明此 HPM 進路，對於教師專業發展的影響。

## 二、數學敘事與劇本寫作

對於志於數學史的現場教師而言，欲獲得數學史相關專業發展，則可信、可靠的數學史資料或相關數學普及書籍的閱讀，為最方便且有效的策略。而此一教師專業發展策略，正呼應了近年來各國越來越重視培養學生的閱讀能力，以及強調學生的閱讀表現的趨勢，特別是諸如學生基礎素養國際研究計畫 (Programme for International Student Assessment, PISA) 或是促進國際閱讀素養研究 (Progress in International Reading Literacy Study, PIRLS) 等國際性機構的閱讀評比。而落實學生數學閱讀之前，教師本身對於數學文本的閱讀以及相關素養，也是教師專業發展過程所不可或缺的重要一環。在過去的研究中 (蘇意雯, 2004)，我們發現設計數學史的學習工作單，引動教師融入數學史於數學教學，是促進教師專業成長相當重要的一個策略，而 HPM 學習工作單的實施，也獲得學生的認同。基於上述理念，在現今數位化的時代，我們更期待在數學教學方式與媒體上，能有更多樣性的發展。因此，把數學思想發展的脈絡融入數學學習，由教師寫作成劇本呈現，將來並繪製成動畫，藉由數學概念思維脈絡的發展，以及劇情人物的鋪排，激發學生學習數學的興趣。整合歷史進入數學教學，以數學為主體，安排課程，探討教育的議題與數學的脈絡，從一個新的觀點佈置新的工作環境，以幫助學生達成有效學習數學的目標 (Furinghetti & Paola, 2003)。根據 Nagaoka (2000) 在 HPM 指南書 *History in Mathematics Education* (Fauvel & van Maanen, 2000) 中的資料分析，顯示出編製 HPM 卡通正是嶄新的嘗試，至於在編製卡通之前，劇本的撰寫是相當重要的一項工作，如何撰寫出寓教於樂的劇本，正有待國內團隊去經營，與國際接軌。

近年來，關心數學與敘事的關係的學者們認為如何解題或推理可以類比於小說中的如何敘事，並認為數學思維和故事之間可以有很重要的連結，也希望以故事方式呈現數學思維的發展（Gerofsky, 1996; Solomon & O'Neill, 1998）。好的數學概念，可用之證明某些論證，一則好的故事，則具有不同方式的啟發力量（Thomas, 2002）。如果能連結兩者，應該能對數學普及的推廣有所幫助。這也呼應了林芳玫和洪萬生（2009）的研究，他們從數學與敘事切入，比較兩本數學小說，探討數學與說故事乃至文學敘事之關聯。研究中也發現數學小說的敘事風格，與作者所運用的數學知識息息相關，也因此演變成為一個嶄新的文類，為數學的「隱喻」（metaphor）賦予了極有價值的意涵，也為我們打開一個全新的科普書寫與分享空間，提升中小學師生乃至一般社會大眾的閱讀興趣。

那麼如何將抽象的數學概念敘事書寫，以吸引讀者呢？我們不妨考慮從數學思維的脈絡發展開始說故事。歷史和故事是明顯相關的，傳承過往證據最早的形式就是通過故事（Weeks, 2003）。在動畫製作的過程中，故事比起製作的技巧總是最被優先考慮（Jones & Oliff, 2006），動畫內容非常重要，故事的吸引力決定了觀眾的注意力。對於動畫故事的發想，專家是於構思過程中關注觀眾、故事與角色三者之關係（吳佩芬、嚴貞、范光義，2009）。以科普傳播創作的劇本樣式而言，傅麗玉（2012）發現世界觀導向之架構（Worldview Oriented Framework, WOLF）有利於創作出能整合文化學習與科學學習的劇本架構。以原住民族文化為例，WOLF 的學科教學模組就包含傳承傳統世界觀－文化內涵與傳統智慧的學習、表達自我世界觀－學生的看法與對話提問、探索世界觀－文化與傳統智慧的體驗探索、形成新世界觀－相關科學知識概念的學習與實驗、聯結原住民族的世界觀與學科世界觀：文化傳統智慧與相關科學概念的相互解釋等五個步驟（傅麗玉，2012）。

此外，在撰寫劇本的同時，也必須掌握構成劇本的四大要素：主旨、情節、人物、對白。亦須考量讀者之需求，注意諸如「不安定的情緒」，「平衡的破壞」等衝突的問題，運用比較細膩的衝突觀念，來尋找戲劇的素材，並慎選素材以及考量教育的功能（曾西霸，1989）。本研究中的參與教師必須考量的是如何安排數學與敘事的結合，以融合數學與人文面向，進而軟化數學之於學生抽象、艱澀的印象，並從中思索引發學生學習動機的元素。研究者也將從此完成數學史劇本設計的歷程中，探討參與教師的專業成長。

## 參、研究方法

### 一、研究設計

本研究以質性研究中的觀察研究方式進行。質性研究探討問題在脈絡中的複雜性，從研究對象本身的架構來瞭解行為，必須從團體內部，瞭解成員的信念和價值如何發展和改變，以敏



銳的眼光將查覺到的意義和現實呈現出來（歐用生，1996）。在本研究中，研究者參與被觀察情境，成為其中的一員。參與觀察視參與程度有別，觀察可能由外顯或內隱進行（王文科、王智弘，2007）。研究者參與其中，也擔任諮詢者的角色，此類觀察較趨向外顯之色彩。以下的篇幅，研究者將對本研究所規畫之實施策略，逐一說明。

### （一）組成以學校為中心之教師社群

本研究是以學校為中心，由三位同校教師以及一位他校教師組成教師社群，於 HPM 教學關懷下，調融數學史與數學知識，經由自我詮釋進行數學史劇本之撰寫。在進行劇本創作與編寫的歷程，規劃藉由社群成員之間的討論與交流溝通，讓參與教師不斷進行反思並付諸於劇本編寫的實作行動中，以呼應 Lerman（2001）的觀點，透過反思實作的過程，提供教師如何在課堂內行動的觀點，考慮專業化和他們如何繼續學習教和學，同時，也鼓勵了教師自主性與解放性。

### （二）廣泛閱讀數學史及數學知識相關書籍

本研究透過廣泛地閱讀數學史及數學教學相關書籍，希望能讓參與教師得以認識數學知識的不同風貌。

### （三）影片觀摩與欣賞

由於參與教師們過去並無實際參與劇本寫作與設計之經驗，因此，讓參與教師對於目前已有的數學影片加以賞析，尋求製作靈感，也是本研究之策略之一。

### （四）劇本創作與討論

創作數學史劇本是本研究中參與教師的主要工作和目標，在創作過程中研究團隊需要不斷進行討論，希望能藉由相互對話激盪出適合之劇本。

### （五）專家諮詢與座談會

數學史劇本的編寫與故事的鋪陳對於一般中學教師而言，並非簡單的任務，因此，除了從書籍或培訓中瞭解劇本寫作的基本知識與制式的形式架構外，領域專家在專業知識與經驗上的分享，亦是相當重要的一環。

研究者將本研究中，數學史劇本創作歷程、知識元素、劇情元素以及相關介入策略等架構以圖 1 來呈現：

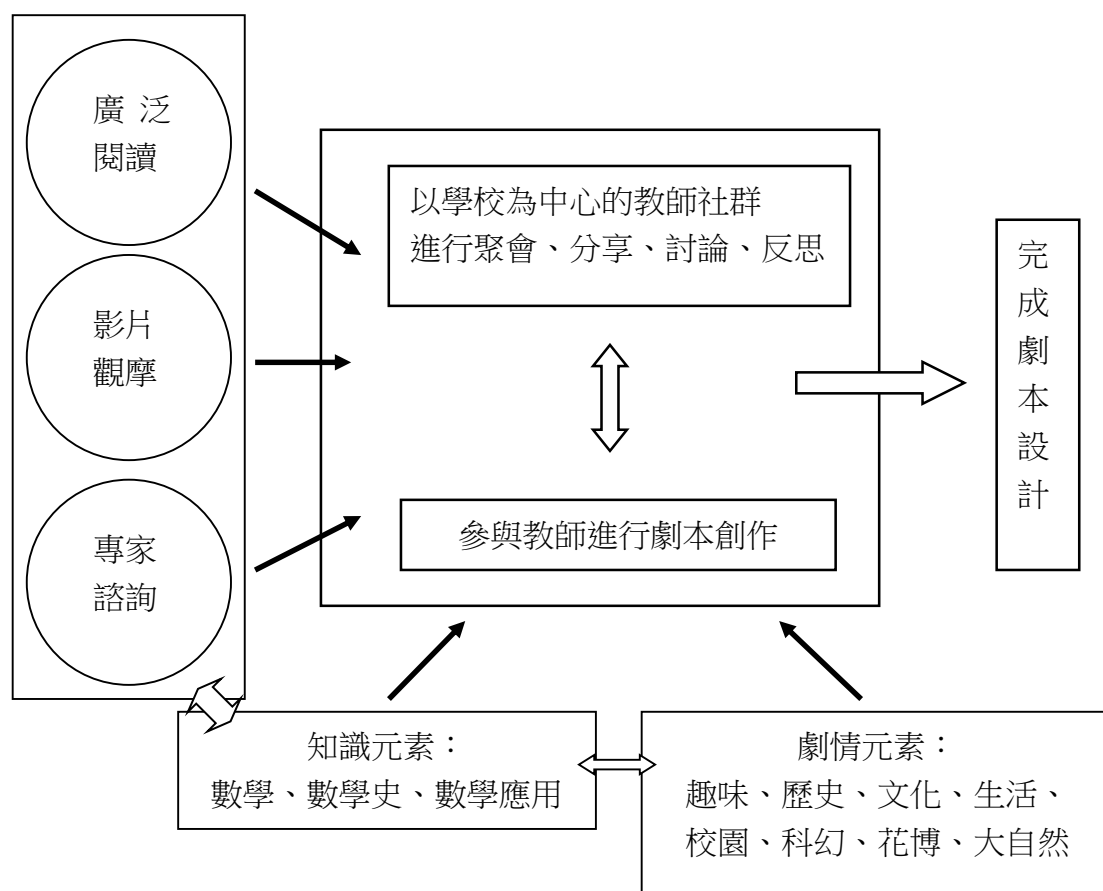


圖 1 數學史劇本創作與介入策略架構圖

## 二、研究對象、參與人員及研究場域

本研究主要目的是以數學史劇本設計引動教師專業成長，因此，參與本計畫的數學教師是本研究主要研究對象，此四位教師教學年資均超過十年以上，平均教學年資為 15.5 年，他們的基本資料如表 1 所示。同時，研究參與者除了四位參與數學史劇本設計的數學教師以及一位師資培育者為主要成員之外，還包含了四位研究生，進行觀察、記錄與討論的工作。

本研究的研究場域，主要以捷運高中為中心，原則上每兩週進行一次聚會討論。主要工作為收集劇本相關的數學史資料、並進行閱讀、反思、討論、影片欣賞以及劇本設計等。研究者的身份既是參與者，諮詢者，也是觀察者，除了全程參加參與教師們的討論聚會外，並且針對參與教師們所提出的問題，或所遭遇的困難，提供諮詢的管道。另一方面，研究者也在計畫執行期間，持續進行觀察蒐集資料，以評估參與教師的專業成長狀況。

表 1

參與教師基本資料分析表

成員	性別	教學 年資	學歷	何時開始 接觸數學史	是否曾經使用 數學史融入教學	是否曾撰寫 數學史劇本
L 師	女性	12 年	碩士	大四	否	否
T 師	男性	26 年	40 學分 班結業	2002 年國科會 計畫相關活動	是	曾與團隊 合作撰寫
H 師	女性	10 年	學士	大三	是	否
S 師	女性	14 年	碩士	大四	是	是

### 三、研究流程與步驟

本研究的流程主要分成「觀摩」、「資料蒐集」、「劇本撰寫」、「劇本產製」、「分析」五個階段：

#### （一）觀摩階段

首先研究者與參與教師先進行文本分析，每一次的文本分析是提供一個深度而非廣度的分析，主要傾向專注於單一文本的詳細分析，我們所選擇的文本是國立教育資料館所拍攝之數學史動畫。因為文本分析包含對細節的仔細關注及嚴格質問，閱聽人需要被引導不要下立刻直接的評斷並且應被鼓勵提出支持他們觀點的證據。這種類型的分析意味「把熟悉的變陌生」—這些數學概念原本是教師很熟悉的，但是此處教師必須仔細觀察這些概念如何被布置而且思考為何他們被以這種方式組合在這個過程裡，也要瞭解影像與聲音文本必須向其他文本一樣被「閱讀」。因此我們也要求教師觀賞數學相關動畫，並寫下教學目標以及心得。

#### （二）資料蒐集

這個階段中，參與教師針對各自所選定感興趣的主題單元主題，進行數學史與相關數學知識的深入研究。所選主題必需適合中學生學習的題材，太深奧的內容非但不適於學生，其數學精神也不易於劇本與動畫中呈現。再者，訂定主題後，開始藉由書籍、網路、期刊等媒介進行資料之蒐集與求證，選取適用的題材。

#### （三）撰寫劇情設計

在選定主題單元，以及完成相關資料之蒐集後，參與教師在此階段必須思考如何轉換成劇本模式，初步寫出對這個故事的描述，並簡介其對特定閱聽人的吸引力，同時並提出人物簡介、情節摘要與成本。因此教師依所選之主題，列出單元教學目標及相關能力指標，適用對象，人物簡介、情節摘要，並對其餘教師介紹。

在劇本撰寫過程中，研究群引進 Jahnke (1994) 的「詮釋學循環」(hermeneutics cycle) 以便發展「文本-脈絡-讀者」之心理探究與反思能力。Jahnke (1994) 認為當教師將歷史引進教學活動時，他必須同時說明數學知識的「斷代」與「演化」面向，也就是在古代數學家、數學物元，以及數學理論之間的互動環和數學史家以及數學史研究成果做出詮釋，於是構成一個所謂的「詮釋學循環」。在這個循環過程中，任何人包括教師或學生都扮演了「詮釋者」的角色。這種心理探究結合數學學習心理學、HPM、課程、教學。詮釋學方法的運用，無法將詮釋者排除在外，在本研究中研究者與參與成員建立「共同學習夥伴關係」(co-learning partnership)(Jaworski, 2001)，深入數學文本，成員間互相討論、集思廣義，以引動學生數學學習動機為主軸，進而研究獨立單元之動畫劇本。

#### (四) 劇本產製

此一階段，透過小組成員定期對創作劇本分享與意見討論，輔以專家諮詢和座談會，參與教師不斷進行反思與探索，並修改劇本。過程中，有關於數學史和數學知識二者之協調，教師必須深入詮釋。研究者以圖 2 的模型來說明此一實作模型。此模型中的 T 代表教師教學；E 代表教科書編者；S 代表課程標準；K 代表數學知識；C 代表教科書內容；M 是古代數學家；O 是數學物元；T 是數學理論；I 則是體會各循環之後的自我詮釋。如圖 2 所示：

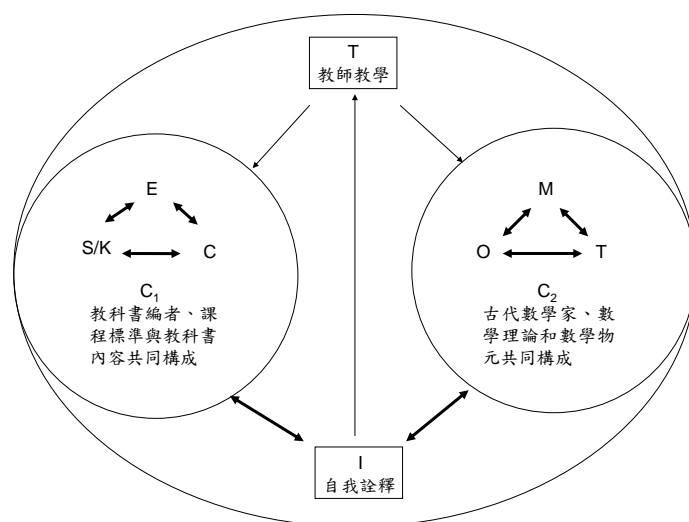


圖 2 HPM 實作模型。引自「運用古文本於數學教學—以開方法為例」，蘇意雯，2007，台灣數學教師(電子)期刊，9，65。

以劇本寫作來考量，除了在 C<sub>1</sub> 理解教科書上的教學安排，經過自我詮釋瞭解內涵外，必須到 C<sub>2</sub> 中開始尋找中、西方的素材，經過小組討論後，蒐集到歷史的素材。接著，又回到了自我

詮釋的部分，希望能用深入淺出的方式，佈置出相關的情節。最後，在教師教學的部分，則以動畫的方式來呈現。依循此模型的運用，我們希望能藉此先製作出數學史的劇本，參與教師也能藉由此一進路，得到專業上的成長。

### （五）分析階段

藉由研究資料之搜集，分析參與教師們的初始狀態及觀察紀錄參與教師們如何進行劇本撰寫，以瞭解以學校為中心的教師社群，如何幫助現場教師完成數學史劇本之撰寫，也從中分析探討藉由研究設計規劃，在研究進行的歷程中，現場教師們所獲得的專業成長，以及個人教學與數學相關信念之改變情形。

## 四、研究資料之蒐集

本研究中藉由問卷填答、現場觀察、訪談、討論、心得撰寫以及成品分享，期望瞭解參與教師們在參加研究前後之專業成長與改變。研究中所蒐集、分析的資料來源如下：

- （一）會議資料：包含每次開會的會議記錄以及會議錄影資料。
- （二）回饋單：針對每次開會討論的內容與教學過程，設計相關的回饋單，即時瞭解參與教師的想法，以及學習上的心得與回饋反思，並瞭解所遭遇的困難。
- （三）觀察筆記：在本研究每次上課與開會的過程中，透過研究生們對於參與教師的近距離觀察與互動，記錄參與教師的學習狀況以及成長與轉變。
- （四）訪談資料：針對參與教師進行訪談，以便於事後的分析與觀察，期瞭解教師在研究歷程中各個階段的想法與情意，以及隨研究歷程所帶來的成長與轉變。
- （五）學期心得：透過參與教師的自陳，於每一學期末各繳交學期參與本計畫的心得報告，陳述其學習、寫劇本、作動畫之心得、感想以及自身的成長與轉變。
- （六）數學史劇本：參與教師最終所完成的數學史劇本。
- （七）信念問卷：在研究一開始，研究者請參與教師填答呂玉琴與溫世展（2001）所發展的數學教學相關信念問卷，研究結束時，也請參與教師再度填寫該份問卷。
- （八）專家審查意見：在動畫完成之後，諮詢專家針對數學史動畫提出評論與建議。

透過「觀察」、「訪談」、「文本收集」等多元性的資料來源與蒐集方法，探究參與計畫的數學教師們其專業成長過程，並以多重觀察方法，多種資料、多位研究者的方式進行觀察，除了所收集轉譯的資料請參與教師確認之外，碩士班研究生先做初步的探討分析，接著再由博士班研究生與師資培育者做進一步的核證，以確保分析的三角測定，提高研究資料的可信度。

## 五、資料之編碼

本研究中，資料的編碼方式為「來源-知識情意-資料類別-日期-教師」共五碼。「來源」、「知

識情意」、「資料類別」與「日期」編碼方式如表 2 所示。其中「來源」為影響參與教師或造成教師專業成長的來源。包含了 TS（教師自己）、PT（專家建議）、OT（其它教師）、ST（學生）、BK（書籍）、OS（其它資源，如網路等）共 6 類。而知識情意則分成 CK（數學知識）、HMK（數學史知識）、PCK（數學教學知識）、SK（對學生的知識）、BF（信念）、PK（劇本知識）、OT（其它教師）、LF（生活知識）、OC（其它特質）等 9 類。而資料類型包含了記錄（會議記錄）、回饋（教師回饋表）、觀察（會議觀察）、訪談（教師訪談）、專家（專家審查意見）、問卷（信念問卷）、心得（教師心得）、劇本（數學史劇本）。最後一碼則為教師代碼，包含 T 師、S 師、L 師、H 師。

例如研究者對其中之一參與教師於 99 年 08 月 20 日進行訪問的對話：「我認為數學是解決問題的工具、也是一種溝通的工具，更是一切科學的根本知識，所以大家都應該學習數學的語言、具備數學的知識。」，以 TS-BF-訪談-20100820-T 編碼呈現。又例如 T 師於 99 年 10 月 13 日的小組會議中發表的談話紀錄：「古人寫了很多案例，包括植物、向日葵的、葉序生長、人體骨骼、螺旋線，很多都印證黃金比例，很不容易。」，以 TS-HMK-紀錄-20101013-T 編碼呈現。

另外，劇本部分因未有具體日期，因此於學生與教師觀看影片的心得部份以「資料類型-劇本名稱」二碼表示。而本研究中以 CA 指稱微積分劇本；以 TR 指稱三角劇本；以 CS 指稱圓錐曲線劇本；以 FS 指稱斐氏數列劇本。

表 2

本研究資料之編碼

來源	知識情意	資料類型	日期
TS（教師自己）	CK（數學知識）	記錄（會議記錄）	西元年月日
PT（專家）	HMK（數學史知識）	回饋（教師回饋表）	20110101
OT（其它教師）	PCK（數學教學知識）	觀察（會議觀察）	
ST（學生）	SK（對學生的知識）	訪談（教師訪談）	
BK（書籍）	BF（信念）	專家（專家審查）	
OS（其它資源，如網路等）	PK（劇本知識）	問卷（信念問卷）	
	EM（情感）	心得（教師心得）	2011 期中
	LF（生活知識）		2011 期末
	OC（其它特質）		2013 期末
		劇本（數學史劇本）	
		CA（微積分）	
		TR（三角）	
		CS（圓錐曲線）	
		FS（斐氏數列）	

## 肆、研究結果與討論

### 一、研究結果

首先，研究者針對研究歷程中，參與教師針對本研究設計之回應，進行下列說明：

#### （一）藉由教師社群的對話，參與教師互相激勵

在教師社群運作的過程中，可觀察出資深教師在數學知識或教學經驗的分享上，起了火車頭的帶動作用，同時也鼓勵、感動了其它參與教師：

我很佩服 T 老師，他說他快要退休了，可是他都永遠那麼認真、戰戰兢兢的做好每一份工作。

每次的討論，不管他多忙多累，他都不會缺席，並且踴躍發言，準時繳交回饋單，這不知道要有多大的毅力和堅持才能做到。(OT-EM-心得-20110613-L)

由 T 老師的心得分享，讓我瞭解多元思考的方式與教學文化傳承的重要，這也是資深教師應有的責任。(OT-OC-回饋-20110223-S)。

而同儕教師在設計故事上的出色表現，也成為仿效學習的對象：「我覺得 H 師可用「驚豔」兩個字來形容！沒想到她竟然可以把數學寫成那麼吸引人的小說」(OT-EM-心得-20110613-L)。另外，在會議回饋單之中，教師們也提及團隊、伙伴的重要性：「團體（團隊）的力量，頗有影響力的。」(OT-OC-回饋-20101215-L)「藉由 L 老師、S 老師的綱要描述，會產生壓力（另一種推力）。」(OT-OC-回饋-20110311-T)「多虧 L 老師協助，否則真要開天窗了。」(OT-OC-回饋-20101110-T)「學習社群是一種增進自我很好的方式，有同伴的陪伴，比較不孤單。」(OT-EM-回饋-20110223-H)

從上述教師們的回饋裡，也顯示教師社群帶來的影響力與彼此間相輔相乘之效。也就是說，研究過程中固定的聚會討論是劇本寫作歷程的基石，同時，資深教師的帶動以及成員間的砥礪亦是推動社群運作的重要動力與助力。

#### （二）閱讀讓教師認識數學知識之不同風貌

閱讀是本研究中引動教師專業成長的重要元素，透過廣泛地閱讀數學史及數學教學相關書籍，以及固定的討論與心得分享，諸位教師得以認識數學知識的不同風貌，也反思過去的學習歷程與教學活動（OT-BF-記錄-20101013）。從參與教師最終所設計的劇本內容可發現，這些劇本涉及了數學與歷史、文化、建築、生活、測量、大自然以及美學等面向（TS-HMK-劇本-CS-S、TS-HMK-劇本-CA-H、TS-HMK-劇本-TR-L、TS-HMK-劇本-FS-T）。而數學內容的取材，亦不限於教科書中的數學知識，包含了圓錐曲線作圖器、定義的由來與正焦弦的意義，又或者戴德金分割、卡瓦列利原理和微積分發展史中，牛頓與萊布尼茲的不同觀點，也包含與測量星球距離

與半徑有關的三角知識，同時，也討論了黃金分割、古希臘黃金比例等涉及數學之美與數學哲學的主題（TS-HMK-劇本-CS-S、TS-HMK-劇本-CA-H、TS-HMK-劇本-TR-L、TS-HMK-劇本-FS-T）。而此「閱讀→報告→反思」的進路，正是促進教師專業成長的重要向度。

### （三）影片觀摩與欣賞提供編寫劇本之靈感

在本研究中，教師們觀摩與欣賞的影片計有：迪士尼數學樂園動畫，DISCOVERY 所發行之伽利略傳記影片、中國科技古文明探索影片、國立教育資料館關於數學史的動畫、中小學教材相關的 FLASH 動畫等，同時也加上由成功高中數學教師們所編，話劇社同學們所演的數學史影片。（MV-PK-紀錄-20100819、MV-PK-PK-紀錄-20101215、MV-PK-紀錄-20101013、MV-PK-紀錄-20101124、MV-PK-紀錄-20101229）

透過上述影片賞析與觀摩的過程，以及影片欣賞心得分享所引發的討論與集思廣益，參與教師們也對於自身數學史劇本的編寫與設計上，得到諸多的靈感與新想法：

發現大家著重的點不大相同，比如大部分人都覺得第二部很沉悶，但 S 老師覺得它有呈現史料，能找出它的優點，果然專門學數學史的人看的點和我們不一樣。」（MV-HMK-回饋-20101229-H）

從影片欣賞中看到不同方式的呈現，適當的佈局及配樂會大大增加影片吸引人的程度。」

（MV-AK-回饋-20101124-T）

「伽利略的對話錄」內容及劇情，歷史背景與對話適當穿插，讓整個過程高潮迭起，又能表達伽利略的想法，是一部非常棒的影片。（MV-AK-回饋-20101229-T）

每看一次影片，對於我自己未來即將要編排的劇本的想法，都會不大一樣，看影片其實是有幫助的。（MV-AK-回饋-20101229-H）

### （四）討論讓劇本創作更精緻

創作數學史劇本是本研究中參與教師的主要工作。隨著教師們大致擬定所欲融入的數學、數學史知識內容之後，便開始關注於「劇情」的設計本身。包含角色之設計，角色的個性，所在的時空與場景，故事的設計與鋪陳，並討論如何讓故事更動人，增加「趣味」、「衝突」、「懸疑性」以及「張力」等元素（TS-PK-心得-2011 期末-L、TS-PK-心得-2011 期末-S、TS-PK-心得-2011 期末-H、TS-PK-心得-2011 期末-T、OT-PK-記錄-20110513、OT-PK-記錄-20110513、OT-PK-記錄-20110608）。最後，在劇本初稿定稿之前，參與教師們也討論了「數學與數學史知識」以及「劇情之趣味可及性」的比重之間作衡量與調整取捨。（OT-PK-記錄-20110513、OT-PK-記錄-20110608、OT-PK-記錄-20110615）



整個研究過程中，參與教師不僅在數學學科本身的專業知識上有所成長與新的認識，並對於一般數學教師甚少接觸的領域「編劇」，包含劇本創作、劇本寫作、劇本寫作的重要元素與流程，以及如何將數學、數學史素材與故事劇情相結合等方面得到了啟發與成長：「針對劇本的內容作實際的討論，什麼地方不好提出意見來修改，這些意見不僅對劇本的寫作有幫助，也對未來自己在進行相關單元的教學時，有一定的助益。」(OT-PCK-回饋-20110608-T)「經由討論，可釐清概念或引入新的想法。」(OT-CK-回饋-20100929-L)

從教師們的回饋與心得，我們也可以發現，透過伙伴們之間的討論與反思過程，可以幫助瞭解更多元的觀點與不同的見解，從而在劇本寫作與教學上得到啟發：「藉由同儕的集思廣益，使自己的思考多元呈現，增加寫作方向的視野，讓我的思考脈絡更加完整。」(OT-PK-回饋-20110223-H)「知道其他伙伴要如何編排故事情節，讓自己也有不一樣的想法。」(OT-PK-回饋-20101215-T)「與同儕的討論中，除了可以新增知識與見聞之外，也可以釐清自己的概念，再調整蒐集資料的方向。」(OT-CK-心得-20110128-S)「其他老師的建議也讓自己對於題材的蒐尋更有方向。」(OT-CK-回饋-20101110-L)「在與大家的討論過程中，我學習到劇本的數學內容可以不用太多，能夠讓老師在播放時隨時可以停止問問題，在動畫影片播放時要注意要求學生作筆記或報告，以增進學生的學習效果。」(OT-PCK-回饋-20110426-L)

#### (五) 專家諮詢與座談會開拓參與教師之視野

數學史劇本的編寫與故事的鋪陳對於一般中學教師而言，並非簡單的任務，因此，除了從書籍或培訓中瞭解劇本寫作的基本知識與制式的形式架構外，領域專家在專業知識與經驗上的分享，亦是促成教師們獲得專業成長的重要因素。座談會上任團長的分享，帶給參與教師很多啟發：「利用舉例的方法讓我們明瞭什麼是感人的劇本。例如：『8歲一個人去旅行』，光是劇名就讓人有期待與想像的空間。接著利用動作和語言來表達表達出害怕、興奮的情緒。」(PT-PK-心得-2011 期末-T)、「任團長經驗分享所舉的三個故事例子，對個人的想法產生些許影響，尤其在『感性』的層面上。」(PT-PK-回饋-2011 期末-L)。此外，參與教師也體悟到故事的衝突性，引發讀者的共鳴：「由雞城故事說明如何利用誤會或委屈產生衝突，當故事內容貼近觀眾的日常生活，若誤會或委屈是觀眾有發生過的經驗，就更容易引起共鳴與感動。」(PT-PK-心得-2011 期末-T)座談會中，特別強調劇本的「有趣性」以及如何營造出故事中的「衝突點」，以產生出乎觀眾意料之外的結果，進而吸引閱聽人的目光(PT-K-記錄-20110420)。參與教師們也從中得到創作的靈感和啟發，進而修改了原本所設定的劇情內容，更明確了劇本編寫的理念與方向。

專家的分享一方面使得參與教師們反思吸引學生的元素，同時也更瞭解創作劇本的基本技巧與注意事項。劇本設計完成後，也邀請大學教授以及其他學校的高中教師提供建議與改進方向。教師們提到了審查者的建議對數學知識上的幫助，例如專家們對於 H 師的劇本提出了「戴德

金分割 (Dedekind cut) 是指實數扮演著對有理數分割的角色，但是在利用下和、上和夾擠積分值的時候，所牽涉到的『上、下和』中的成員並不全是有理數的子集合。因此若要以戴德金分割聯繫積分的上、下和，需要更細緻的說明。」、「戴德金分割與卡瓦列利原理之連結宜加強！」。就讓 H 師表示在專家審查過程中，對自己劇本中的數學知識更加瞭解：

在作品請專家審查以及請他校教師實施後，筆者的確也非常有收穫，比如大家都有提到的，劇本中戴德金分割的部分的確未有交代與微積分的關係，以及它的重要之處 (PT-CK-心得-2013 期末-H)

劇本中卡瓦列利原理與黎曼和的差別在於一個是分割體積，一個是分割面積，不同的維度拿來一起呈現，似乎容易讓讀者混淆，或者不容易比較出其中的差別，這是之前在教學時筆者未曾注意過的觀點，也因為有此次的機會，讓我對它有了重新的體認。(PT-CK-心得-2013 期末-H)

L 師的劇本故事情節為兩名高二的學生在放學回家途中因時空震盪被拋置太空中某未知星球，在可看到遠方的地球，及不知道該星球大小的情況下，必須算出該星球與地球的距離，如此才有機會回家。在劇本中 L 師畫出下圖 3，並說明假設地球為 E 點，人在 A 點，目標是希望能求出  $\overline{AE}$  長。針對這樣的安排，專家也提出「E 必須在 ABO 所形成的平面上，這一點似乎未見強調，否則無法確定相關角度。並且若是 ABO 的關係是在緯圓上，則對 E 取觀察的角度要特別說明。」。讓 L 師反思：「張教授所說的盲點，重新想過共平面的問題。」(PT-CK-記錄-20130619-L、PT-CK-專家-2013-L) 以及「感謝蘇教授安排了專家諮詢，其中張教授一針見血的指出了劇本中的疏漏之處，如圖 3，劇本中需強調 A、O、B、E 四點共平面。雖然之前我反覆詳讀參考資料多次，但始終忽略了『A、O、B、E 四點共平面』的陳述。」、「藉由其他老師動畫的專家意見回饋，也學習去瞭解戴德金分割的進一步意義，與三角測量中共平面的問題。」(PT-CK-心得-2013 期末-L)

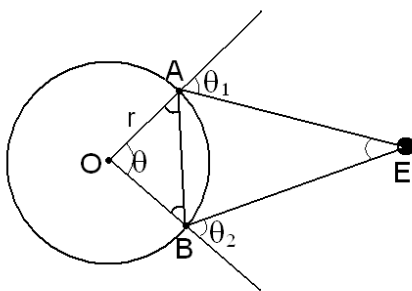


圖 3 三角函數劇本之附圖

由上述可看出，座談會以及專家諮詢和審查，提供參與教師們有關創作劇本上的幫助與靈感，前者使得教師們更瞭解好劇本的重要元素，後者則釐清了教師們數學知識上的盲點，也促進數學知識上的成長。

以數學史劇本引動數學教師專業成長的策略包含兩大主軸：（1）以學校為中心的教師社群進行聚會、分享、討論、反思。（2）參與教師進行劇本創作。對於劇本內容而言，基於教師自身的數學與數學教學信念，進行知識元素和劇情元素的融入。研究主軸進行的過程中，並藉由廣泛閱讀、影片觀摩以及專家諮詢等策略的介入，一方面推動教師專業成長，同時也精緻化知識元素、劇情元素的使用，以及兩者之間的融合、取捨與平衡，最終完成數學史劇本設計。

## 二、討論

以下我們進一步討論本研究中，透過數學史劇本設計以及相關介入策略，所引動參與教師所獲得的專業成長：

### （一）數學專業知識與數學史知識之增長

#### 1. 搜尋數學與數學史相關教學素材與資料的能力增強

透過資料檢索的過程，教師們培養搜尋有用而可信參考資料的能力，並藉由成員們的分享，認識並閱讀更多優良的數學普及讀物。同時，教師們亦能從《HPM 通訊》、台灣數學博物館、高瞻計劃資源平台、國立教育資料館之中的數學、數學史影片等網路資源，獲得所需的材料以及相關的數學與數學史知識。我們以 L 師和 H 師為例，他們分別提到：

在蒐集資料的過程中，蘇教授也提到了高瞻計畫，我覺得裡面有許多資料可以當作高中教學的補充教材，例如弧度制及三角測量。雖然我目前並未將它放入劇本中，但是我覺得對教學很有幫助，也算是自我成長。（OS-CK-心得-20110613-L）

這一學期的討論，增加了許多數學史的知識，知道了許多好書，例如阿草的數學天地、什麼是數學...等，也發現在網路上有許多可用的資訊，例如高瞻計畫...等等。（BK-HMK-心得-20110128-L）

我想，收穫最多的其實是自己。對於三角函數的課外資料比較熟悉，手邊隨時有多本相關書籍可供查閱。對於數學小說（例如爺爺的證明題、博士熱愛的算式...）或相關的科學繪本（魔法校車...）的興趣漸增。（BK-CK-心得-2013 期末-L）

構思劇本，將高中數學的內容融入故事情節。對我而言，收穫最多。從一開始搜尋資料，感謝教授及團隊老師提供許多建議，讓我能善用網路資源及課外書籍，解決當初構思劇本的問題。（OS-PCK-心得-2013 期末-H）

藉由資料的蒐集，豐富了數學史的知識。（OS-HMK-心得-2013 期末-H）

在教師們接觸了許多數學普及讀物之後，L 師也打算將自己看過的數學普及讀物，用於教學過程中：「當初閱讀過的文獻及資料，即使有一些並未放入劇本中，但卻能成為日後教學的補充資源。」(BK-CK-心得-2013 期末-L) 因此，透過書籍與相關網路資源的閱讀，的確能為參與教師無論是在搜尋資料能力上或者是自身數學、數學史、數學教學等專業知識上帶來成長與助益。

## 2. 數學專業知識之成長

研究過程中，四位教師除了針對選定的單元，進行相關數學知識與數學史資料之搜集、閱讀與統整之外，閱讀與討論的內容也包含其它老師相關主題單元的數學知識、數學史知識。透過大量閱讀、數學史學習單觀摩，以及反思和討論的過程，參與教師在本研究的四個數學主題之相關數學專業知識上獲得成長。例如：

與同儕的討論中，除了可以新增知識與見聞之外，也可以釐清自己的概念，再調整蒐集資料的方向。(OT-CK-心得-20110128-S)

看了這本書，我才知道實際上地球的緯度計算的方式與基本的繪製地圖的方法，增加了許多實用的知識。(BK-CK-心得-20110128-L)

高瞻計畫的內容有許多是針對高中數學教師設計的，當中有關三角函數的部分很豐富，許多內容雖然設計動畫用不到，但是教學上會有幫助。(OS-CK-回饋-20101124-L)

參與教師們也分別從其它教師所設計的劇本內容，學到過去不瞭解的數學知識：

關於圓錐曲線作圖器，重新想了相關的數學原理。(OT-CK-記錄-20130619-S)

戴德金分割以前沒有深入想過，和以前有不一樣的想法（用有理數去定理無理數）。(OT-CK-記錄-20130619-H)

討論過程中，從別人角度看事情（例如：三角測量之前沒想法這樣的呈現方式）。(CK-記錄-20130619-L)

## 3. 數學史知識之成長

從參與教師的反思以及會議的討論中，我們可以發現參與教師從閱讀數學普及讀書、數學史資料，也從設計數學史劇本並与其它教師分享、討論的過程中，在數學史知識上獲得成長：「這一學期的討論，增加了許多數學史的知識，知道了許多好書。」(BK-HMK-心得-20110128-L) 「更瞭解圓錐曲線正焦線、三角函數測量相關數學史。」(OT-HMK-記錄-20130619-H)

而數學史知識相當豐富的 S 師，也分享了研究過程中的收穫：

從與其他老師的討論以及其他老師的動畫中，我還是學得了應用數學史的不同角度觀點。傳統上我的數學史應用在課堂上，都是利用學習單來作學習，其實編個故事也不錯，學生從故事情節中學習會更加生動有趣。(OT-HMK-心得-2013 期末-S)

可見從聚會討論以及觀摩其它教師的劇本，有助於參與教師數學史知識的增長。另外，L 師也提到：「有學生來問問題，所以去找相關歷史資料作整理。」(ST-HMK-記錄-20130619-L)

最後，從這些教師最終所設計的作品「數學史劇本」裡，亦可看出這些教師在數學史知識上的學習成果與相關應用。例如：圓錐曲線正焦弦的意義與發展史(TS-HMK-劇本-CS-S)、微積分發展過程牛頓與萊布尼茲的不同觀點(TS-HMK-劇本-CA-H)、三角測量的相關歷史(TS-HMK-劇本-TR-L)以及斐氏數列和黃金比之歷史等(TS-HMK-劇本-FS-T)。

#### 4. 領略數學的多元面向

透過數學閱讀以及討論、反思與諮詢的過程，以及數學史元素的加入，諸位老師們更加認識了數學知識的不同風貌，也瞭解引入數學史帶給學生多元認識的機會：「教學操作在自己的手上，有些必須完整陳述，融入數學史主要作為動機，課本以外另一個面向接觸，讓學生多元認識。」(TS-PCK-紀錄 20101027-T)

另外，從參與教師的回饋：「在思考有關三角部分的劇本內容時，我希望達到以下原則：……三、與日常生活結合。」(TS-LF-心得-20110128-T)或者「知道自然界及建築的黃金分割比例的例子，可在教學時提起。」(OS-CK-回饋-20101013-T)乃至於教師設計劇本所包含的「海綿寶寶」、「花博」、「數學小說、校園生活」(TS-LF-紀錄-20101215、TS-LF-紀錄-20101229)等情境，可看出參與教師嘗試將數學與日常生活結合。

### (二) 反思自身之數學教學

歷經本研究中學習寫劇本與製作動畫的過程，參與教師也從中反思自己的教學：

經由教師的交流，吸收這些資深教師的教學經驗，這些經驗也都潛移默化地成為教學的一部份。

另外，在製作動畫的過程中，由於需要去思索如何呈現的問題，同時就會思考這樣的教學成效如何，並進一步去改進自己這方面的教學技巧。(OT-PCK-心得-2013 期末-S)

所謂「不經一事，不長一智」。經由此次的計畫參與，讓我在教學的生涯，擁有更多元的視野，更勇於嘗試不同的教學方法與研究。更重要的是，它讓我在教學的過程中，更加注意以學生的角度去思考教學方法的適妥性。(TS-PCK-心得-2013 期末-T)

從自己三角函數劇本的設計中學習，學習如何將科普書中的知識打亂重整，並作了一個教案。(TS-HMK-記錄-20130619-L)

對知識看法及呈現方式有不同感覺，高中老師（雖）具備這些知識，但切入角度不同，潛移默化受到影響。（OT-PCK-記錄-20130619-T）

透過本研究的過程，參與教師不止學習如何設計數學史劇本，更對教學方面獲得了啟發與改變。諸位數學教師接觸數學史等多元的面向後，更有能力，也更願意利用更多元的方式於融入數學課堂中，例如 T 師提到：

拓展原有的生活經驗及學習慣性，去接觸純數學教學以外的領域（例如劇本及動畫）。如今在教學時，除了以往我重視的講解清楚、條理分明之外，我也會去注意嘗試把其他元素（例如故事導引或動態的概念）放入教學之中，讓教學更多元。（OS-PCK-記錄-20130619-T）

不盡然會改變教學內容，但多了更多選擇，詮釋方式更多元。引起學生動機方面，例如：黃金比例相關單元有學生畢業後回來問，提供另外一種介紹方式，故事容易讓學生接受，起個頭之後，有興趣的學生會更認真，嘗試去理解。學會從更多元的面向切入教學。（OS-PCK-記錄-20130619-T）

另外 T 師與 S 師也提到教學想法上的改變：「重視數學史與數列之間的連結，才不會格格不入，也才能相輔相乘。」（TS-HMK-紀錄-20100915-T）「由伍團長的演說中，我也感受到其實當老師站在台上時，同時也是一位演員，必須要讓自己的表演能夠感動學生。」（PT-BF-心得-2013 期末-T）「對學生學習而言，動態的圖形學習效果比靜態的要容易理解與吸收。」（OS-BF-心得-2013 期末-S）

透過研究一開始和研究結束所填問卷的比較，我們也發現參與教師們在信念上的改變。教師們對於數學教學信念問卷上更加認同的項目包含：「數學宜採學生討論、發表的教學法」，「數學教學活動應與生活結合」（OS-BF-問卷-20110819），除了過去習慣的傳統講述式教學法之外，教師們轉而認為，教學過程中，學生之間的討論與發表是重要的，也認為數學應與生活之間作實際的連結。這顯示出參與教師教學轉變的契機，能重視學生討論以及數學的實用面向。且參與教師們不再認為「數學老師需要直接解答學生所提的問題」、「數學教學應該要能在短時間內看出成效」、「傳統的紙筆考試能夠客觀地評量學生學習能力」、「評量應該要容易計分」。（OS-BF-問卷-20110819）從這裡看出，他們對於數學知識評量的觀點也有所改變，質疑方便計分的紙筆測驗，是否能真實地評量學生真實的能力，也思索不應著重短期的成效，而是長期的學習與思考能力等。綜合來看，透過數學劇本寫作的過程，讓這些教師反思了自己的教學與評量，並埋下新的希望種子。

### （三）學習劇本寫作與完成劇本

參與教師除了在數學與數學史知識上的成長之外，學會編寫劇本以及完成劇本創作皆是參與者主要收穫與成長。研究中，除了劇本寫作相關培訓之外，也邀請了紙風車劇團任團長參與座談會，為各位老師解決劇本編寫之問題與相關的經驗分享。專家諮詢與座談會帶給參與教師很多收穫，在座談會的過程中，任團長以劇團中「8歲一個人去旅行」、「雞城故事」、「阿第谷」等三齣戲劇的劇情設計，演示了如何從個別角色的個性、所發生的事件等面向出發，擴張至整個故事架構的鋪陳。使得諸位教師在劇本創作上獲益良多。參與教師們提到：「任團長經驗分享讓我學習到劇本創作的基本技巧與應注意事項，這項對於門外漢的我來說，幫助非常的大。」

（PT-SC-回饋-20110420-L）、「座談會相關問題諮詢針對我們的劇本型式，詢問團長的意見，從團長的回應中知道劇本的設計是否可行與應注意的方向、角度與內容等。」（PT-SC-回饋-20110420-S）。座談會的安排，著實為大家解決編寫數學劇本過程中所遭遇的一些困難和問題（PT-PK-記錄-20110513、PT-PK-記錄-20110608、PT-PK-記錄-20110615）。「劇本創作期，是收穫最豐碩的階段。期間學到了劇本寫作的格式，也接受『紙風車』任團長的創作技巧指導。」（PT-PK-心得-201306-T）

參與教師們都從任團長的經驗分享中，得到創作的靈感和啟發，進而修改了原本所設定的劇情內容，也更明確了劇本編寫的理念與方向。四位參與教師在數學史劇本設計歷程中對於劇本故事與情節的安排上皆發生了轉變，以下將分別加以說明。

在研究團隊中，S 師具有較豐富的數學史知識，因而從研究一開始便有了明確的目標，然而劇本中，所置入的數學知識與數學史知識密度太高，經專家諮詢後，適當刪減內容，聚焦在圓錐曲線作圖器部份，為了吸引學生興趣，故事內容也以學生熟知的卡通人物為主。

H 師原欲以牛頓與萊布尼茲之間對於微積分不同的想法作為故事的主軸，後來為了引發學生動機，以及貼近學生的校園生活，先進行數學小說創作，將小說背景改成校園，並以故事中男女主角兩位學生對於微積分想法的不同觀點，分別代表牛頓與萊布尼茲的想法，最後再將小說改編成劇本。

L 師原欲以相關數學史發展作為故事背景，後來在閱讀更多數學史書籍之後，改成以測地探險隊測量地球半徑為故事主軸，最後又為了能引發學生興趣，將數學史上測量地球半徑的想法隱含其中，把劇本改成具科幻形式的未來世界外太空探險。

T 師原欲以古希臘數學家對黃金比的想法為背景，後來一方面為了呼應當時流行的花博參觀，也為了貼近學生的生活，並以引發動機與共鳴，最後將劇本改成以校園、學生為主體，並將數學史料與花博活動、相關景物圖片作連結。

經過戲劇專家對劇本創作的經驗分享，以及相關諮詢與討論後，教師們在數學史與趣味間抉擇，最終選擇專家的建議與想法，採納了戲劇化、張力、趣味性等元素，轉向能吸引學生為主的情節，包含科幻、卡通、校園生活與花博等。而這些作品的內容不再局限於數學史或數學知識，而是呈現出數學與歷史、文化、建築、生活、科幻、測量、花博、大自然以及數學之美之連結。此時數學史已非劇本情節的主軸，數學史故事不再貫串整場，而是將之融於故事中，時而成為教材內容的知識主體，時而擔任穿針引線的角色，純數學史劇本轉變為更多元化的劇本，如表 3 所示。

表 3

數學史劇本涉及之多元面向

劇本名稱	數學知識	數學史與數學文化內涵	數學與生活應用	劇情元素
圓錐曲線	圓錐曲線作圖器	正焦弦的意義	數學與建築	海棉寶寶
	圓錐曲線定義	圓錐曲線史		卡通人物
	圓錐曲線命名由來			
微積分	黎曼和	微積分發展史	數學與擀麵	校園生活
	戴德金分割	牛頓與萊布尼茲的不同觀點		
	卡瓦列利原理			
三角函數	測量星球距離	三角測量史	外太空探險	未來世界
	測量星球半徑		測量	時空震盪
斐氏數列與	斐氏數列	古希臘黃金比例	花博與大自然	花博
黃金分割	黃金分割	數學之美		學校生活

## 伍、結論

研究者透過（1）以學校為中心之教師社群；並藉由（2）廣泛閱讀數學史及數學教學相關書籍、（3）影片觀摩與欣賞、（4）專家座談會經驗分享與諮詢、（5）劇本創作與討論等策略，經由研究期間參與教師的回應，以及相關的討論與觀察發現，本研究促進在職數學教師在數學知識、數學史知識、數學教學知識以及編寫劇本等面向的專業成長，最終參與教師們也完成了各自的數學史劇本。

基於上述之研究歷程，本研究發現參與教師們在以下面向有所成長與改變：

### 一、數學專業知識與數學史知識之增長

（一）搜尋數學與數學史相關教學素材與資料的能力增強。

（二）透過閱讀相關數學史資料或數學科普書，學到新的數學知識與數學史知識，並用諸於劇



本設計。也從其它教師設計的劇本內容，學到過去不瞭解的數學知識，以及從劇本寫作和專家回饋中，反思與自己劇本相關的數學知識。

(三) 領略數學的多元面向：透過閱讀、討論與分享，參與教師有機會接觸數學之於教育、歷史、文化、社會、生活、實用性、趣味性等多元面向，融入劇本設計中。

## 二、數學教學知識的反思

透過數學史資料與科普書籍閱讀、教學經驗分享與討論、影片觀摩欣賞、專家座談會等活動以及數學劇本的創作使得參與教師在數學教學想法上產生了改變，教師們歷經劇本寫作的過程中遭遇的困難，更能從學生的角度，看待數學學習的困難並反思自己的教學。

## 三、對劇本寫作的瞭解

參與教師們學會編寫劇本的架構與方式。最終分別完成以斐氏數列與黃金分割、三角函數、圓錐曲線、微積分為主題的數學劇本。

本研究主要透過數學史劇本的撰寫，引動參與教師們的專業成長，希望藉此一進路與策略，可以提供國內數學教育社群參考，讓師資培育以及數學教師專業發展的取向能更加多元豐富。本研究的規劃是由參與教師創作數學史劇本之後，再自行繪製成動畫，雖然在劇本的撰寫上，參與教師投注了相當多的精力，可是受限於動畫繪製技巧的不足，很多劇情的鋪陳在動畫中無法完整呈現，致使動畫成品並不完全盡如人意。研究者反思，日後相關研究在動畫部分，可委由專業人員繪製，讓數學教師專注於劇本創作，以及在動畫製作時，與繪製人員密切溝通想法，如此相信會有更為精緻的動畫成品產出。

在撰寫數學史劇本之歷程中，本研究所展現出的教師專業成長改變，是全體參與教師所共同顯露的部分，但是參與教師們雖然整體發展出上述的專業成長特質，事實上個別教師在每一面向上的成長狀態並不全然一致，例如之前就在數學史領域浸淫甚久，有濃厚素養的 S 師，在本研究中數學史知識之增長就不如未嘗試過運用數學史融入於教學的 L 師，還有常和同儕分享教學感受，獲得特殊優良教師殊榮的資深教師 T 師，經由本研究所引動的數學專業知識成長幅度也不如其他參與教師。也就是說，隨著個人的教學經驗及之前的學習經歷之差異，參與教師在各面向成長的層次也有所不同，針對個別參與教師的深入分析及探討，正有待之後更進一步的研究。

## 誌謝

本文得以完成，主要來自國科會的專題研究計畫(計畫編號：NSC 99-2511-S-845-001-MY3)的部份研究成果，在此感謝國科會之補助。至於文責部分，則由作者群自負。

## 參考文獻

- 王文科、王智弘（2007）。**教育研究法**（第 11 版）。臺北：五南。
- 行政院教育改革審議委員會（1996）。**行政院教育改革審議委員會總諮議報告書**。臺北：作者。
- 吳佩芬、嚴貞、范光義（2009）。專家於角色動畫故事構思之概念圖發展模式。**科技學刊（人文社會類）**，**18**（1），35-50。
- 呂玉琴、溫世展（2001）。國小、國中與高中教師的數學教學相關信念之探討。**國立台北師範學院學報**，**14**，459-490。
- 沈志龍、蘇意雯（2009）。當動畫與學習工作單相遇—數學史融入國小數學教學之實作研究。**教師天地**，**163**，70-77。
- 林妙霜、蘇意雯（2009）。數學史讓數學變有趣。**師友月刊**，**509**，81-83。
- 林芳玫、洪萬生（2009）。數學小說初探：以結構主義敘事分析比較兩本小說。**科學教育學刊**，**17**（6），531-549。
- 施昱光、蘇意雯（2012）。運用數學史數位素材於國小教學之實作研究。**國民教育**，**52**（3），65-71。
- 洪萬生（2000）。《無異解》中的三案初探：一個 HPM 的觀點。**科學教育學刊**，**8**（3），215-224。
- 洪萬生（2001）。古代數學文本在課堂上的使用（行政院國科會專題研究計畫成果報告，NSC 89-2511-S-003-031; NSC 89-3511-S-003-121）。臺北市：行政院國家科學委員會。
- 洪萬生（2003）。數學教師專業發展與 HPM（行政院國科會專題研究計畫成果報告，NSC 91-2521-S-003-006; 92-2521-S-003-002）。臺北市：行政院國家科學委員會。
- 教育部（2008）。**國民中小學九年一貫課程綱要：數學學習領域**。臺北：作者。
- 教育部（2009）。**中小學教師專業學習社群手冊**。臺北：作者。
- 傅麗玉（2012 年 12 月）。「飛鼠部落」3D 原住民族科學動畫劇本之 WOLF 架構轉化：以「水中螢火蟲」為例。論文發表於第 28 屆科學教育國際研討會。國立臺北教育大學，臺北。
- 曾西霸（1989）。編劇原理。載於馬景賢（主編），**我們只有一個太陽：78 年度兒童戲劇研習營成果手冊**（頁 24-32）。臺北：臺灣省政府教育廳。
- 黃仕奇、楊德清（2014）。數位動畫對小六學童數常識發展之研究。**科學教育學刊**，**22**（1），33-55。  
doi:10.6173/CJSE.2014.2201.02
- 劉柏宏（2007）。探究歷史導向微積分課程與發展學生數學觀點之關係。**科學教育學刊**，**15**（6），703-723。
- 歐用生（1996）。**教師專業成長**。臺北：師大書苑。
- 潘世尊（2000）。教師教學與課程發展的聯結：從自我反省、協同反省、到協同行動研究。**課程與教學季刊**，**3**（3），103-120。
- 蔡幸霓、蘇意雯（2009）。數學史融入國小數學教學之實作研究—以分數乘、除法為例。**台灣數學教師（電子）期刊**，**20**，17-40。
- 蘇意雯（2004）。**數學教師專業發展的一個面向：數學史融入數學教學之實作與研究**（未出版之博士論文）。國立臺灣師範大學，臺北市。
- 蘇意雯（2007）。運用古文本於數學教學—以開方法為例。**台灣數學教師（電子）期刊**，**9**，56-67。
- 蘇意雯（2011）。國小階段之數學史素材設計初探。**科學教育研究與發展季刊**，**62**，75-95。

- ATEE-RDC 19 (2003). Scenarios for the future of teacher education in Europe. *European Journal of Teacher Education*, 26(1), 21-36. doi: 10.1080/0261976032000065616
- Barbin, E. (2000). Integrating history: Research perspectives. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 63-90). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/0-306-47220-1\_3
- Bransford, J., Hasselbring, T., Barron, B., Kulewicz, S., Littlefield, J., & Goin, L. (1988). Uses of macro-contexts to facilitate mathematical thinking. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 125-147). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates & National Council of Teachers of Mathematics.
- Cautreels, P. (2003). A personal reflection on scenario writing as a powerful tool to become a more professional teacher educator. *European Journal of Teacher Education*, 26(1), 175-180. doi: 10.1080/0261976032000065742
- Clarke, D., & Hollingsworth, H. (2002). Elaborating a model of teacher professional growth. *Teaching and Teacher Education*, 18(8), 947-967. doi: 10.1016/S0742-051X(02)00053-7
- Fasanelli, F. (2000). The political context. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 1-38). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/0-306-47220-1\_1
- Fauvel, J., & van Maanen, J. (Eds.) (2000). *History in mathematics education: The ICMI study*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/0-306-47220-1
- Furinghetti, F., & Paola, D. (2003). History as a crossroads of mathematical culture and educational needs in the classroom. *Mathematics in School*, 32(1), 37-41.
- Gerofsky, S. (1996). A linguistic and narrative view of word problems in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 16(2), 36-45.
- Goffree, F., & Dolk, M. (Eds.) (1995). *Standards for primary mathematics teacher education*. Utrecht, The Netherlands: NVORWO/SLO.
- Grugnetti, L. (2000). The history of mathematics and its influence on pedagogical problems. In V. J. Katz (Ed.), *Using history to teach mathematics: An international perspective* (pp. 29-35). Washington, DC: The Mathematical Association of America.
- Jahnke, H. N. (1994). The historical dimension of mathematical understanding: Objectifying the subjective. In J. P. da Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 139-156). Lisbon, Portugal: University of Lisbon.
- Jaworski, B. (2001). Developing mathematics teaching: Teachers, teacher educators, and researchers as co-learners. In F. L. Lin & T. J. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 295-320). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/978-94-010-0828-0\_14
- Jones, A., & Oliff, J. (2006). *Thinking animation: Bridging the gap between 2D and CG*. Boston, MA: Thomson Course Technology.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge, UK: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9781139171472

- Lerman, S. (2001). A review of research perspectives on mathematics teacher education. In F. L. Lin & T. J. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 33-52). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/978-94-010-0828-0\_2
- Nagaoka, R. (2000). Non-standard media and other resources. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 329-370). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/0-306-47220-1\_10
- National Council of Teachers of Mathematics (1986). *Professional development for teachers of mathematics*. Reston, VA: Author.
- Schubring, G. (2000). History of mathematics for trainee teachers. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 91-142). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/0-306-47220-1\_4
- Siu, M. K. (1993). Proof and pedagogy in ancient China: Examples from Liu Hui's commentary on Jiu Zhang Suan Shu. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 345-357. doi: 10.1007/BF01273370
- Snoek, M. (2003). Guest editorial: Scenarios as a tool for reflection and learning. *European Journal of Teacher Education*, 26(1), 3-7. doi: 10.1080/0261976032000065599
- Solomon, Y., & O'Neill, J. (1998). Mathematics and narrative. *Language and Education*, 12(3), 210-221. doi: 10.1080/09500789808666749
- Thomas, R. S. D. (2002). Mathematics and narrative. *The Mathematical Intelligencer*, 24(3), 43-46. doi: 10.1007/BF03024731
- Tzanakis, C., & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 201-240). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/0-306-47220-1\_7
- Viebahn, P., & Hilton, G. (2006). Education the way ahead? An evaluation of a pilot course on scenario writing. *European Journal of Teacher Education*, 29(2), 127-144. doi: 10.1080/02619760600617268
- Weeks, C. (2003). Stories. *Mathematics in School*, 32(1), 43-46.