

分數啟蒙課程的分析、批判與辯證⁽¹⁾

林福來* 黃敏晃**

*國立臺灣師範大學數學系

**國立臺灣大學數學系

摘要：本文檢討現行分數啟蒙課程，並探索分數課程改進時的理論基礎。

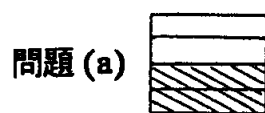
現況檢討，一方面根據調查資料，凸顯教學問題；一方面根據數學課程理論，檢驗現行課程。

分數概念改進時的理論探索，一方面以實徵資料，開啓現實的數學教育理念，並以小組討論方式辯證此理念所揭示的教育原則與學習理論；一方面整理文獻上被證實較有效的診斷教學法的理論基礎與教學原則。綜合後，形成分數啟蒙診斷教學研究的若干課題。

關鍵詞：分數課程、概念發展、教學理念、學習理論

一、現行分數啟蒙的教學與學習問題

在小學數學課程中，分數單元的教與學，向來就問題重重。例如，以下面這問題調查所得的數據，就呈現出很奇特的異象。



斜線部份是不是全部的二分之一？

是 ☐

不是 ☐

利用此題，在六月底學年快結束時，調查一所小學二、三、四年級的學生，學生的表現如下表所示（呂玉琴，1992）：

表1 學期末的表現

	答 對 率
二年級(48人)	79.2%
三年級(61人)	37.8%
四年級(59人)	56%

看到表 1 的數據，大家一定都想問：“爲什麼二年級學生的表現比三年級及四年級學生好那麼多？”

關於這個問題，立即想到的解釋大概是二年級下學期學生剛學過“二分之一與四分之一”。如果因爲剛學就表現得好，那麼從三年級學生的答對率不及二年級的一半，豈不也表示學生的學習保留效果極差。那些認爲答案不是二分之一的學生，他們中絕大多數認爲答案是四分之二。換句話說，此問卷題目涉及等值分數的瞭解。等值分數教材安排在四年級下學期。表 1 中的數據也表示調查對象中，仍有 44 % 的四年級學生不認同 $1/2$ 和 $2/4$ 間有相等關係。因此，從表 1 中三、四年級學生的表現可看出目前的分數教學效果欠佳。進一步訪談二年級學生，問他們爲什麼回答“是二分之一”，將學生的說明整理後，可分爲三種：

(1)瞭解 $1/2$ 等於 $2/4$ 。

(2)將斜線部份看做一份，全部有兩份，兩份中的一份就是二分之一。

(3)因爲斜線部份不是四分之一。

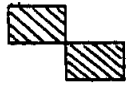
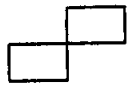

第(2)種與第(3)種說明，學生都說是老師教的。第(3)種說明的來源完全是教材安排所激發出來的。小學數學課程安排，二年級下學期開始學習分數，而教材中僅介紹二分之一與四分之一。因此，基於考試題目不能超過教材範圍的大原則，二年級學生所面對的數學問題之答案就一定是 $1/2$ 與 $1/4$ 中的一個。教師們抓住這一要點後，爲了學生的分數著想，自然就直接傳授給學生，如何將每一道分數問題視爲二選一的選擇題的選答技巧。這顯示，部份教師的教學完全著重在如何幫助學生應付考試，爲了讓學生考試時得到好成績，不惜發展各種應付的偏方，學生則在不自覺中記憶這些偏方。

第(2)種說明，將斜線部份看做一份，把它當作測量單位，來數數看全部有幾個單位，這種策略對於解單位分數的問題，非常有效，但是如果學生只會利用這種策略，當他們面對下列二道問題時，可能就會產生困惑。

問題 (b)  斜線部份是全部的多少？

問題 (c)  斜線部份是全部的多少？

在問題 (b) 中，學生的困惑是數不出全部的份數。

在問題 (c) 中，斜線部份形成的圖案是 () 學生將此圖案當作測量單位，然後在整體圖形中，尋找跟此圖案視覺上同構的部份，想要數看看共有幾個，結果只找到一個同構的圖案 ，還留下一部份空白的區域 ()

不知道該怎麼辦，因此不認為問題 (c) 的答案是三分之一。由此可以看出“以斜線部份當作單位來測量整體”這種解題策略，至少有兩個使用的侷限性。第一個侷限是此策略不適用於一般真分數的問題。第二個侷限是，當學生僅能憑視覺，辨認同構圖案的個數時，此策略也不適用。超越同構圖案束縛的框框，有賴於學生發展出“分量中的等分，僅須等量，不須同形”這種對分量的瞭解。原策略侷限了學生分量不變性瞭解的發展。

學生如果在二年級，學分數的這種解題策略，當他們升到三年級時，分數教材延伸到一般的真分數，基於上述的第一個侷限性，教師不得不放棄“以斜線當單位來測量”的解題策略，另以別種方式來教一般真分數。從學生的角度來看，同樣的分數單元，在二年級與三年級的學習，就變成是兩場不同規則的遊戲。

分數的啟蒙教學，不乏教得很好的教師，但調查顯示，有的教師強調應付考試的偏方，有的教師教不具良好發展性的解題策略。學生的分數啟蒙學習，在二、三年級時又分別是兩場不同規則的遊戲，可以想像得到其結果是學生分數概念的瞭解欠佳。利用問題 (a)，在剛開學的第一個月 (九月) 調查一些剛升三、四、五年級的學生 (呂玉琴，1992)，這群學生分別在二年級下學期學過二分之一與四分之一、三年級下學期剛學過一般真分數，四年級下學期學過等值分數。經過一個暑假，學期初的表現如下：

表 2 學期初的表現 (問題 (a))

	答 對 率
三年級(42人)	35.7%
四年級(44人)	43.2%
五年級(37人)	43.2%

表 2 中，三年級學生的表現顯示二年級教師教的偏方在一個暑假後已經失效了，五年級學生的表現，顯示等值分數的學習成果非常有限，超過一半的學生對問題 (a) 回答不是，表示他們分數概念還停留在最低的了解層次，即分母等於整體量的個數，分子等於部份量的個數。

(一)教學問題

根據以上的分析，可以凸顯現行分數啓蒙教學 (teaching) 方面的兩個問題：

1. 應付考試，發展偏方。
2. 教不具發展性的解題策略。

另外，在呂玉琴 (1992) 對國小教師的分數教學知識的調查中，亦證實國小教師的分數教學，有下列兩個問題：

3. 教師不了解學生的學習狀況。
4. 教師對於學生的學習困難，不會進行診斷教學。

(二)學習問題

如果從學生的觀點來看分數的啓蒙學習 (learning)，則本節的分析，凸顯的問題有：

1. 短暫記憶解題偏方。
2. 二、三年級分別玩不同規則的遊戲，概念學習無發展性。

另外，對台灣學生數學學習特性進行分析 (參閱 Lin, 1988; Lin, 1990)，證實學生的數學學習，有下列諸問題：

3. 沒有機會發展自然的想法，沒有學童法。
4. 完全依賴課堂上教的演算法則，很會做典型問題。
5. 未養成獨立的思考習慣。

二、現行分數教材分析

現行的分數教材編排如下：

二年級：二分之一與四分之一。

三年級：真分數 (分母在 100 以內)。

四年級：分數的種類 (真分數、假分數、帶分數) 等值分數、同分母分數的加減)。

五年級：約分、擴分、通分、百分率、異分母分數的加減、分數乘以和除以整數。

六年級：分數乘、除運算。

因為二年級進行分數啓蒙教學時只介紹 $\frac{1}{2}$ 與 $\frac{1}{4}$ ，所以教師才配合教材，發

展出將分數問題當作二選一的選擇題處理的偏方。教材設計時，將 $1/2$ 與 $1/4$ 從其他單位分數及一般真分數中隔離，單獨在二年級先學，對學生的分數概念發展，是否形成易學的效果猶缺正面證據，但缺陷則如上節所分析，早已顯現。因此，現行分數教材影響教學的第一個問題是：

(一)不當地將 $1/2$ 和 $1/4$ 從真分數中抽離，形成獨立之學習單元。

進一步分析，還可以發現現行分數教材存在很多有待改進的問題。例如：

(二)教材序列僅做線性截割分配。

各年級的分數教材序列編排，基本上僅單純地從數學結構的角度，將分數概念與分數計算，進行線性的截割分配。較高年級的分數教材，沒有重新結構低年級的分數教材。

分數與小數、比、百分率等概念關係很密切，最先學習的分數概念，如果教材適當地設計，就可編織出許多活的路線，預留作為後學概念的前置經驗（參閱本文第五節的說明）。現行分數教材缺乏為相關概念的學習進行良好的路線編織。

(三)促進分數概念發展的學習活動不夠充份。

如果將“整數”與“分數”教材對照，即可發現學生學習困難較少的“整數”單元，學習活動多且時間充裕；而公認學習上較困難的分數單元，活動安排少，學習時間也短。例如：整數有唱數、數數活動，而分數並沒有唱分數、數分數的活動；整數有從數詞去對應具體物的活動，分數也沒有。

再看等值分數的教材，僅利用幾個分數的區域表徵，表現同一整體區域上的 $1/2$ 與 $2/4$ 的部份區域大小相等，就導出 $1/2 = 2/4$ 。可是就算學生能認同區域相等的事實，仍可能被困在兩個分數的分母與分子各不相等，而無法接受兩分數相同。像這種學習困難，教材中並沒有適當地排除學習障礙的設計。

(四)例題情境不具衍生概念的代表性。

根據例題情境在數學學習過程中所扮演角色的重要性，Lange Jzn (1987) 將情境分為三個等級：第一級的情境僅僅是為數學運算做包裝，比如傳統數學應用題的情境。第二級的情境，是一種真實世界的問題，期望學生在其中發現相關的數學，將其組織、結構，以求解該問題，第二級的情境提供學生應用所學的概念解題的問題領域。第三級的情境是能用來介紹並發展數學概念的生活問題或自然現象。

現行二、三年級的真分數教材少有現實生活情境，多的是幾何圖形，其功能僅及第一級而已，不具衍生分數概念的代表性。

(五)分數表徵不夠多樣化。

教材中一再引用的都是分數的區域表徵，例如問題 (a) 中的區域圖。學生分數概念的發展受此影響，很多停留在此表徵所呈現的“部份量 / 整體量”這種分數意義的了解，妨礙學生發展出更一般化的分數概念。比如說，分數是兩獨立量的比較結果。

(六) 太快或太早將實物的分量抽象化為分數。

學生剛開始接觸分數概念，是進行實物的分配時，遇到有餘量還需再分配的過程中所經驗到的。當學生經驗過三分之一塊蛋糕、三分之一塊麵包、三分之一個蔥油餅、……等實物的部份量，察覺到每一次經驗都有個共通的不變性，即分量相對於整體量的關係。有這層察覺之後，才可以逐步地拋棄實物單位。教材中太早拋棄實物單位，並且缺乏“拋棄過程”的設計，而整數教材中反而有。換句話說，現行教材沒有安排讓學生的實物分量經驗，先過渡到“分數是兩量比較的結果”，最後才抽象化為“分數是數”的發展性設計，太快就將分量直接抽象化為分數。

(七) 缺乏診斷教學的設計。

教材設計應讓一般學生常有的學習困難，在學習活動中呈現出來，教師才有導正的機會。

分數概念發展過程中學生常有的困難，例如：等分的辨認、整體量的辨認、相對比較之了解……等等，現行教材的診斷設計不夠充份。

三、理論檢驗分數課程

在前面我們曾分別就實況，描述當下分數啟蒙時，在教學、學習與教材上所呈現的一些待改進的問題。為了尋找分數教育的改進之道，有必要從課程理論的角度，更有系統地檢驗現行分數課程。分數的教學、學習與教材是我們關注的焦點。

國內的數學課程發展，向來欠缺嚴謹的理論基礎，一般依賴的是數學家的專業知識、教師的實務經驗、教育理論家的少許影響及這三類委員間弱程度的交互作用，最後仍由數學家主導出的課程。課程發展以出版教科書為終極目標，根本沒有出版前置的理論探討文獻。因此，談數學課程理論，非得借用國外文獻不可。

西方先進國家的數學課程發展理論，從 1950 至 1980 年間的文獻在 Howson, Keitel 與 Kilpatrick (1981) 所著的數學課程發展一書中，有良好的佈局整理。Howson 等人，將這段期間的西方數學課程分成五類，即行為式 (the behaviourist approach)，新數學式 (the new-math approach)，結構式 (the structuralist approach)，形成式 (the formative approach) 及整合教學式 (the integrated-

teaching approach)。各類的屬性含知識觀點、學習理論、教法、教材設計與編排等等。作者曾利用此分類法中各類的屬性來檢驗國內現行的國中數學與高中數學課程(參閱 Lin, 1982)，發現國內的國中與高中數學都具有行為式與結構式某些屬性，並非完全可劃分在某一分類。

西方國家的情況也有類似於我國者。例如：Streefland (1991, 1992)對荷蘭在八十年代的數學課程分別冠以傳統機械式(the mechanistic approach)與結構式之名。傳統機械式課程呈現許多行為式的特徵，Streefland的結構式則整合了上述的新數學式與結構式。Streefland的分類似乎很適合於用來系統地呈現國內現行分數課程的問題。

(一)從傳統機械式的角度看

國內有些分數教學教學生以偏方解題，置概念了解於不顧，這種教學甚至比傳統常被批判的機械性地引導學習，更具反教育性。在荷蘭 Streefland (1991, 1992)歸納其國內的傳統機械式數學課程特徵如下：

1. 機械性地引導學習。
2. 公式導向，以熟悉演算法則為教學目標。例如：約分、擴分、假分數與帶分數互換，及分數的四則運算。
3. 教師示範，學生模仿。
4. 最後配上一點應用。
5. 學生的數學知識為逐步堆疊而成，大部分是沒有良好連結的零碎片段。

將這些特徵，對照前面所描述的我國分數教學的現況，可以發現每一點都很適用於刻劃當下我國的分數教學。

(二)從結構式的角度來看

傳統以演算法則為主要學習目標的課程，在 1960 年代，被強調數學結構的新數學課程所取代，新數學課程純粹由數學家所規劃發展完全忽視學習理論，因而造成數學學習上的許多大災難。此教育環境成就了 Bruner, J. S. (1960)與 Dienes Z. P. (1973)這兩位結構式數學課程代表人物的貢獻。

結構式數學課程的特徵為(參閱 Howson, Keitel & Kilpatrick, 1981; Streefland, 1991)：

1. 強調數學知識的結構，連結具有相同數學結構單元之間的關係。例如：代數式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 與幾何面積間的對照闡釋。
2. 理論上，將學習者的認知結構視為是概念發展與思考能力的組合，認知發展

以螺旋式為宜。

3.學習歷程講究洞察 (insight)，提倡發現式學習。

4.編造符合數學結構的情境與教具，使教材有意義。例如：編造魔術花生，每顆魔術花生碰上一顆普通花生時，兩者即同時消失，學習者就在此情境中經驗負數特性。又如：在分數單元則使用分數圓盤教具。乘法中的分數，則被視為伸縮機器，分子、分母都被當作是映射。

5.學習的終極目標是使學習者的數學認知結構跟數學知識結構間形成同構。

Streefland (1991) 以“洞察地複製數學體系” (insightful reproduction of the system) 總結了結構式數學課程的神韻。

國內現行的國小數學課程編輯委員們，深受新數學與結構式代表人 Bruner，還有 Piaget 理論的影響。粗看現行教材，也有結構式課程的傾向；不過又不盡然，例如分數教材在國內各年級的安排純粹是線性截割分配，截割方法僅依分數結構分解，感受不到結構式課程中以學習者的了解為著眼點的螺旋式安排。結構式課程為了具象表現抽象分數結構所發展的教具，分數圓盤，在當下國內分數教學中則普遍使用。現行分數課程中的教學，安排讓學生主動發現關係的學習經驗，極為稀少。比如說等值分數，只用一兩個表徵處理一兩次其分量相等，就算交代了等值分數相等的意義。其實，學生想超越 $1/2, 2/4, 3/6$ ，等分數的表層數字符號意義，就得深入觀察這幾個分數的區域分割表徵之間，雖然分割份數不等，但其部份量相對於整體量都有相同的關係。例如：1塊是2塊的一半，2塊是4塊的一半，3塊是6塊的一半，透過這層相對比較的關係，學生才較能洞察等值分數的意義。類似此種結構式課程強調的培養洞察力的歷程，國內現行分數教教材也付之闕如。

國內現行分數課程，多少具有結構式課程的傾向，但結構式課程依循的學習理論，像洞察的學習，主動地發現關係等要點，絕大多數的現行分數教學，如第一節所述，往往反其道而行。

因此，國內現行的分數課程，雖傾向結構式，但不能貫徹結構式的原則，實際教學頗接近機械式的特徵。

四、對結構式課程的一些批判

現行分數教材傾向結構性。結構式課程的教育原則是否就是我們尋求改進時的標竿呢？實際上，結構式的數學課程在理論上仍有缺陷，在實際教學中，也形成了一些新的學習問題。例如：

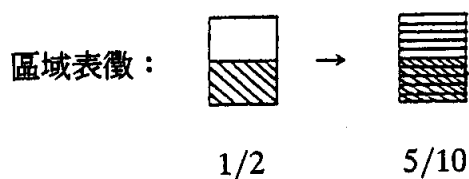
(一)結構式數學課程強調數學系統內的應用、連結與洞察。然而數學知識本源自現實生活與自然現象(參閱 Freudenthal, 1983)。從現實問題領域進入數學系統，對學習者有道難越的藩籬，在結構式課程中完全被忽略了。進一步的討論，參見下節。

(二)發現關係是結構式強調的重點，但著重數學的內在關係，有時反而忽視了有些數學知識本是現實問題情境能獨立衍生之觀點。例如：等值分數在結構式課程中，強調的是它跟分數在加、減運算過程中被應用的關係。像演算 $1/2 + 1/5$ 時，必須就 $1/2$ 與 $1/5$ 先分別產生等價類 $\{1/2, 2/4, 3/6, 4/8, 5/10, 6/12, \dots\}$ 與 $\{1/5, 2/10, 3/15, 4/20, \dots\}$

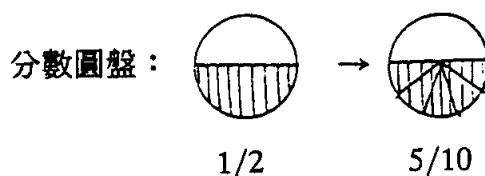
然後分別從其等價類中，選擇適當的代表(representation) $5/10$ 與 $2/10$ ，再進行加法運算：

$$1/2 + 1/5 = 5/10 + 2/10 = 7/10$$

結構式的教材中，爲了讓學生能洞察上述程序，還會引進適當的視覺化過程，例如：



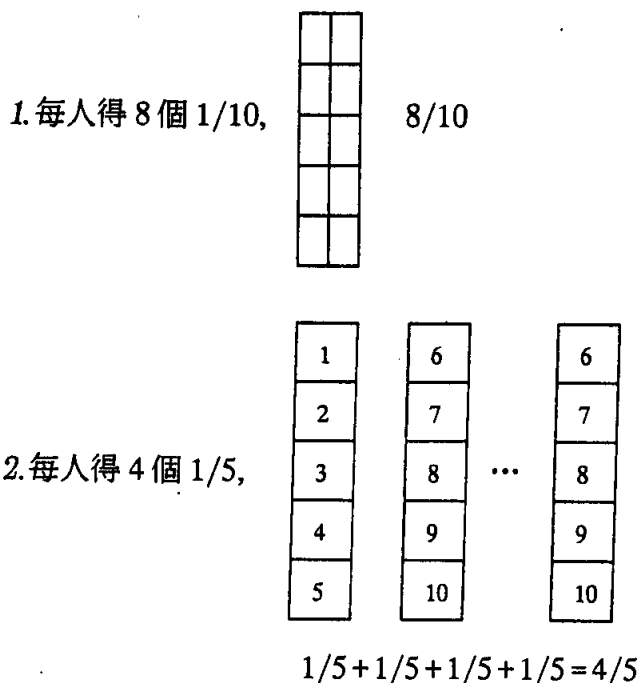
或教具具體化過程，例如：



事實上，等值分數也可以是學生處理現實問題時，所能夠形成的概念。例如：

問題(d) 將 8 條土司麵包公平地分給 10 個人，每個人得到多少？

將問題(d)問臺北市東園國小初學分數的三位小朋友，2 男 1 女，要求他們盡可能用各種不同的方法去分。三位小朋友共發展了 8 種分法(原案見附錄)，其中的兩種分法是



在此現實問題的處理過程中，學生經驗了 $8/10$ 與 $4/5$ 是相等的，因為他們分別是同一問題的不同解題策略所得的結果。學生這番等值分數的經驗，完全獨立於分數加、減運算時，通分、約分前後的分數間之關係的了解。

(三)結構式課程爲了幫助學生學習抽象數學所發展的具象表徵教具，在實際的教學中，形成新的學習問題。

例如：結構式課程的代表人英國的 Dienes 所發展的位值積木與分數圓盤等，不僅在英國同時也在很多國家都普遍將其應用於實際教學，原因是教師們都認爲這種教具能夠較有結構地表達數學關係；但是實際應用後的現象，根據英國 Hart (1989) 系統研究的發現，其結果包括下列幾點現象：

1. 教師所使用的具體教具操作，跟寫出的演算過程完全無關。
2. 有時教師所使用的具體教具操作比原來的演算法則處理問題更難。
3. 教師對教具所展現的真正意義，常常沒有交代清楚。

這些現象造成的學習問題是，學生感覺學校中的數學有兩種，一種是具體操作的數學，另一種是抽象的數學。學生透過分數圓盤或算珠（花片）所了解的分數，由於解題時，複製這些教具的圖形表徵，準確性很差，所以不能幫助實際解題（參閱 Hart, 1987）。因此，原本寄望減低學生學習困難的教具，實際教學顯示，可能形成學生的另一層負擔。

國內的小學課程提倡使用具體教具，可謂不遺餘力。推動了十多年，數學教具引進後的一些教學現象，可由下列幾項研究中窺見：

1. 國小四年級後愈來愈少使用教具。
 2. 面談發現 14/33(訪談 33 位其中之 14 位) 的小學老師可看到具體操作與形式數學之橋。(呂玉琴，1992)
 3. 遇到學生學習困難，25/25(訪談 25 位) 的國民小學老師都沒想到要利用教具幫忙。(呂玉琴，1992)
 4. 訪談 2 ~ 5 年級學生 (36 人) 處理“分配問題”發現：
 - 年級愈高，會用演算式解題的學生，當不准用紙筆時，就不知如何解。
 - 三年級學生，操作與算式可同時表現，但兩者獨立。(譚寧君，1991)
- 總之，在國內具體教具操作的數學與抽象數學，對學生及多數的教師而言，也是兩個獨立的系統。學生在小學中年級之前也在學習兩種系統的數學。

五、現實的數學教育

再看看東園國小三位年級小朋友解問題 (d) 的方法 (參閱附錄一)。三位小朋友所提出的第一個方法如下：



	5	9	1
			2
			3
			4
	6	10	5
	17		2
			3
			4
			5
	8		6
			7
			8
			9
			10

用分數符號表示，就是每人分得 $1/2 + 1/5 + 1/10$ 。

小朋友的這種解法，對實際問題的處理是很自然的。此種自然的解題策略同時也展現了單位分數的原始性，就像古埃及巴比倫人流傳下來的方法一樣（參閱 Streefland, 1991, P. 7）。在此，小朋友們解現實問題時所採用的策略，不是複製，而是建構了自己的方法，建構的方法有的甚至沿襲了歷史呈現的軌跡。

結構式的數學，因為忽略了現實問題領域，因此，像上面小朋友建構自己方法的學習歷程就沒有發展的機會。以致於僅能“洞察地複製數學體系”。如果重視現實問題領域，就有可能提供學生“洞察地建構數學體系”（insightful construction of system）的機會。Streefland（1991）所提倡的現實的數學教育，標舉了五個數學的教育原則，就是

- (一)實例不僅應該是學生形成數學知識進程中的啓蒙之源，同時，也是在獲得知識之後再回頭應用的問題領域。
- (二)提供機會讓學習者能主動對自己學習歷程有所貢獻，學習者扮演建構者，製造自己的數學知識。例如：上述東園國小學生主動建構了八種解題方法。
- (三)重視學習歷程中所產生的符號、圖表與視覺模型等表徵。例如：東園國小的三位小朋友解題時主動以視覺的區域表徵代表實物，並以系統的標記法處理分配，使用圖形與數字標記這套表徵系統，大大減輕學童解題時的思考負荷，是成功解題的關鍵因素。

四學習路徑要編織。

數學概念間存在著密切的內在相關性，良好的學習活動設計可以預留往後相關概念發展時的接線。例如：將 8 條土司麵包，分給 10 個人，這是分數的學習活動。因為問題中數字的設計使得學生在處理這問題時，有機會同時經驗到分數與小數、簡單分數與等值分數，以及分數與比之概念的連結。比如說當小朋友將每條土司都 10 等分，每人分一等分，現在學分數記成 $1/10$ ，以後學小數就記做 0.1，這時小朋友無意中為分數與小數的連結，預留了一條接線。當小朋友將每條土司都 5 等分，每 2 條就有 10 等分，每人各得一分，共得 $4/5$ 。這時預編的是 $8/10$ 與 $4/5$ 相等的等值分數概念的學習接線。如果小朋友發現 8 條分給 10 個人，可以先將 4 條分給 5 個人，另 4 條分給另 5 個人，那就主動編出了分數概念與比之概念連結的路線。

良好編織的數學活動，可以預留許多活的學習路線，學習者形成的知識自然具有良好的連結。

(五)教學要高度互動。

互動包括學生間及師生間的互動。概念的形成不僅是個人認知的發展，同時也是社會化的結果。在社會中，人與人間的互動溝通是自然的現象，尤其同儕間的想法較易溝通，問同學感覺較自在，因此，同學中的互動討論，確是容易促成學習的方式。當同儕間高度互動地學習，教師如何良性介入，留待下節討論。

配合上述五點教育原則，現實的數學教育並且提出兩點相應的學習理論 (Streefland, 1991; Lange Jzn, 1987)。

(一)概念發展的層次理論。

學習的進程依循層次漸進。例如：Van Hiele(參閱 NCTM, 1987)的幾何思考的發展層次理論，劃分幾何思考為五個發展層次，從 Level 0 至 Level 4，各層次的思考特徵分別是：

Level 0：視覺的

Level 1：分析的

Level 2：非形式化的演繹

Level 3：演繹的

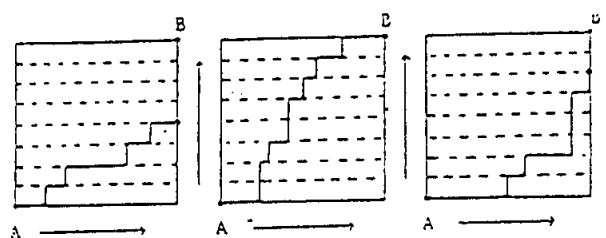
Level 4：嚴密的

數學教材與數學都應配合學生的思考特徵。比如說，對處於以眼見為憑的視覺期學生，宜鼓勵並幫助學生發展視覺化模型以促進了解。教學過程中，對學習現象的歸因，亦應參考學生的思考特徵。

(二)水平與垂直的數學化 (mathematization)

數學學習就是數學化的歷程。數學化可分為水平的與垂直的：當下教室內進行的學習活動大體上都屬於水平的數學化；教材的編排則需考慮垂直的數學化。水平的與垂直的數學化，其示意圖如下：

學習 \rightleftharpoons 數學化的過程



水平的及垂直的數學化

A 是現況，B 是學習目標，有人可能在水平的地方走相當長，才往上發展；有人可能一下子就往上發展，到了某處又水平發展，每個人的情況都不一樣。

那麼到底哪些是水平的？哪些是垂直的數學化活動呢？Lange Jzn (1987) 舉了如下的一些例子。

1. 水平發展的活動：

例如：

- 從平常情境中認出相關的數學。

- 基模化：

例如題目 B 中，小朋友畫圖、標數字……像這樣單一個思考活動，就是一個基模。將一個問題往這方向去試，可能一個，也可能要好幾個這種思考活動才能解一個問題，這就是把一個問題基模化。

- 用不同方式看一問題（形式化或數學化）。

- 發現關係。

- 尋找規則。

- 察覺不同問題的同構性 (isomorphism)。

- 將實際問題轉換成數學問題。

- 將實際問題轉換成已知的數學模式。

2. 垂直發展的活動：

例如：

- 將關係以數學式子表示（及抽象化）。

- 證明規則性。

- 修正模式。

- 使用不同模式。

- 統整模式。

- 形式化新概念。

- 一般化。

六、現實的數學教育理念之辯證

在上一節，透過一次小型的探訪，讓 3 位二年級小朋友討論，如何將 8 條土司麵包公平地分給 10 個人的各種分配方法。根據小朋友們的學習記錄，我們接觸了現實的數學教育的理念，這番接觸發現此理念頗有見地。這理念是否適用於我們的社

會呢？實證之前，仍屬未知。在實際進入教室實證時，一定還會出現許多限制。有必要實證之前，進行一番質疑辯證，就每一教育原則，執行時可能產生的正面與負面的問題提出討論。（參與辯證者之名單，參閱附註(2)）

關於學習理論中的了解層次理論，向來就是國內的研究重點，因此，很容易接受。至於水平與垂直數學化活動，國內向來的課程，所提供的水平數學化活動，都嫌不夠，這是需要改進的。以下，僅就五個教育原則分別討論。

(一) 實例

認真思考產生概念的生活情境與自然現象提供學習者概念形成過程中，落實其思考的物像 (mental objects, 詳見 Freudenthal, 1983)。當學習者進行概念思考時，實例成為其思緒自由來去的落腳。發展實例的工作在過去進行的課程發展從未認真做過。基本上，以實例引進概念，再讓概念回頭應用在實例上，是很被肯定的觀點。

(二) 建構

提供學生主動建構其數學知識的機會，立即感受到教學時間限制的壓力與不符合近利（考試）等現實問題的限制。主動建構知識的原則，在哲學、心理學與歷史學上，分別有不同的意義與問題。

1. 哲學觀：

我們到底要將中、小學數學當成死的還是活的？若認為中、小學數學是已經形成的知識，教師只要傳授形式化的演算法則給學生，那數學就是死的。若讓學生發展不同的想法，例如剛剛的問題，小孩的作法已讓分數的學習活起來，我們根本沒有想到 8 條土司分給 10 人，有這麼多的分法。哲學觀即涉及到你要讓中、小學數學成為死的還是活的知識。

2. 心理學觀：

到底要讓學生主動學習或被傳授呢？怎樣讓學生獨立思考與建構呢？這裡面涉及何謂學習與何謂了解等基本知識論的問題，也有實際引導學習的教學策略問題。

3. 歷史觀：

學生有時會走出跟歷史發展一樣的軌跡來。我們三位小朋友解問題 (d) 的方法竟然與古埃及巴比倫人記載的一樣。

開發學習環境，讓學生主動建構自己的知識，教學上可能產生些什麼問題呢？

1. 學生真的學習了嗎？

正如學生解問題 (d) 的情況一樣，在數學教室內最容易開發給學生建構知識的學習環境，就是要求學生發展自己認為合理的各種解題策略。以學生解問題 (d) 為例，當他們忙著發展各種解法，也真的提出共 8 種的解法。如此他們真的就學習了嗎？

如果教師從不問各種不同的解法，每人所得到的不一樣多？那學生就僅僅建構了分數的“程序性知識” (procedural knowledge)，而沒有進一步發展出分數的“概念性知識” (conceptual knowledge)。因此，學習過程中，當學生還無法肯定每一種解法，每個人分到的一定一樣多，就表示概念不變性的了解仍不完備，而概念不變性的了解，才是該學習活動的主要目標。主要目標沒有達到，學習活動就不應終止。

2. 是否誤導“學習都需繞圈”的學習理念？

學生解問題 (d)，發展了很多解題策略，好像是兜了個大圈子，最後才能學到形式化的答案 $8 \div 10 = 8/10$ 。如果照現行教法，直接教形式化演算法則，學生僅接收到 $8/10$ 這個答案，自然不必繞圈子去討論不同的分法，分到的一不一樣多。繞圈子的價值如何被認同、肯定呢？

3. 何時叫停呢？

當學生解問題 (d) 時，第 8 種解法如下：

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{30} + \frac{1}{10}$$

教師觀察此解法，確定學生已掌握住解提的要領，若不叫停，則學生可以一直做下去，而多做的已不具學習意義。

當學生的活動已經不再具有發展性時，教師就該叫停。可是能有多少教師具有這種辨識的素養呢？

(三) 符號、圖表、視覺模型等表徵

從功能看，這些表徵可以記錄，連結實例（教具）與形式數學表現思考，幫助解題。應用這些表徵，可使學習時所需的記憶量減低，因此可促進學習效果（Case, 1978）表徵也是互相溝通的資源，因此，當我們強調數學是溝通工具時（NCTM, Standard, 1989; Cockcroft, 1982）表徵的地位就更形重要。另外，模型表徵還可提供執行數學模擬的可行性。表徵是數學學習活動的重要資源，教學上，有幾個相關的問題必須注意。

1. 學習上的較佳表徵

同一個想法或同一概念有多種不同的表徵。幫助學習的較佳表徵是什麼？學習分數時，引進的表徵是否也適用於小數、比等相關概念？亦即，是否能找到具有發展性的表徵？

2. 表徵的不完備性

同一概念的各種表徵之間的互換，是一種水平式的數學化活動（Lange Jzn, 1987）。在時間限制下，學生要學多少呢？

3. 表徵的內蘊化

學生學會某種表徵，有的可以在適當的環境中主動呈現，有的則只能被動地呈現。內蘊化的表徵指的是學習者能主動呈現應用的表徵，從被動到主動能不能催化？

4. 生手的內在表徵如何發展成專家的內在表徵。

(四) 編織

現在學習經驗的一部份，預留為未來新概念學習的引線，就是編織。數學概念的學習路徑需要編織，也有可能編織。

根據 Skemp (1983) 的說法，過去經驗的共通不變性的智慧表現就是概念。概念的形成過程，一般稱為抽象化。很多數學概念不只是我們的實際經驗經過抽象化就形成的初級概念，往往是好幾層抽象化才形成的，經過一再的抽象化所形成的數學概念就具有高度的濃縮性，這特性使得數學學習問題特別多。而新概念的學習也就非常需要前置預織的經驗當引線。

數學概念間的內在關係是一種偏序的相關網路，分析此偏序網路，是編織學習路線的第一件工作。良好的編織還有待教材設計者好好發揮。

(五) 互動

同學間互相討論的互動式學習，有正面也有負面的作用。

正面作用：


1. 同學間的想法較易溝通。
2. 問同學較自在。
3. 自然的社會現象。
4. 互相觀摩各自的數學作品。

負面影響：

1. 討論與數學無關的問題。
2. 每一組被少數一、兩位霸道。
3. 干擾被問的同學。
4. 不符合近利，教師直接傳授具有應付考試的近利。
5. 過分挑剔地質疑。

至於師生的互動，從教師提問問題的角度看，正面的功能繫乎教師能否提出有助於學生概念發展的發展性問話，例如：

1. 知道學生出現或潛在不對想法時，提問問題加以診斷，並促使學生形成認知

衝突。比如說，問  斜線部份是否為全部的三分之一？可診斷學生

“等分”的了解。對回答是的同學，再問這種分法公平嗎？可以激起“等分”的認知衝突。

2. 當學生思路停滯時，強迫再前進一步。比如說，學生面對一個問題，知道有兩種解法，卻不知要用哪一種而停滯發呆時，教師要求他兩種方法都試試看，結果學生就往前進了。

3. 當學生單方向的思考已經充份發揮，教師可以啓發學生不同的思考方向。例如，東園國小三位小朋友處理 8 條土司麵包分給 10 個人的解題方向，就已有土司不同方式地分走到盡頭，教師適時提出也可以先借再還的思考方向。

當然，教師的問話也可能是負面的。有時教師介入可能打斷學生思路，有時太快指示正確答案以致破壞學生主動建構的學習機會。教學中，常常還發現教師對學生回答或紙筆表現出的良好教學資訊沒有好好利用，產生斷線的現象。例如，教師上第一節分數課，要小組同學均分一塊蛋糕後，問每人分到多少？原預期學生會以生活語言，像一小塊、一小片等語詞回答，但意外地有位學生卻以分數語言四分之一來回答，如果教師沒有接用此資訊，那不僅干擾該生的學習，也失去因勢利導的良機。

七、數學診斷教學法與電腦學習環境

上一節討論師生互動的教學過程中，教師提問的問題，有一種是爲了促使學生引起認知衝突，認知衝突是近年來實證成果良好的數學診斷教學法所必備的一道程序。

(一)診斷教學的理論

數學診斷教學的實證研究很多，(例如 Gold, 1978; Hart, 1984; Booth, 1984; Bell et al, 1985; Onslow, 1986; Brekke & Bell, 1992 ; 林福來, 1986)共同的結果是診斷教學確是較有效的教學法。數學診斷教學的理論，可以回溯至所謂的新式皮亞傑教學法 (Bell et al, 1983, P.185)。皮亞傑的認知發展理論的要點是人處理資訊的容量會隨年齡增加而增大，Case (1975, 1978)根據此理論並以場地獨立 / 相關的觀念爲基礎，提出一種教學設計的程序。Case 的起始假設是：

“當學習者所處的學習情境，需求他掌握的資訊量超過他的能力時，就趨向於發展出合理但過於簡化的解題策略。”

爲了方便行文，就稱上述學生自己發展的解題策略爲學童法 (child method)。根據此假設，Case 引出下列教學設計的程序：

- 1.教學設計之前，不僅要分析欲教的解題方法，同時要詳細描述學童法。
- 2.教學設計要能凸顯學生學童法的侷限性，使欲教的解法有明顯的學習動機。
- 3.教學活動的次序安排，以及從多種解題策略中選取欲教的某種策略，原則上都要盡量減低學生的工作記憶量。(以上三點，參閱 Bell et al, 1983, P.185 ~ 186)
- 4.學習過程中，學生要有資源可以自我檢查自己的答案是否正確；即一般所謂的立即回饋原則。

調查學生的數學的了解時 (參閱 Hart, 1981 ; 林福來等, 1985)對學生的錯誤進行分析發現。

(1)某些錯誤在同一年齡群中非常普遍。

(2)學生一旦因某種想法而使用錯誤的解題策略，就傾向於一致地使用，可謂根深蒂固，難以改變。

針對這種現象，研究者發展很多教學策略以幫助這些犯有錯誤的學生 (例如 Hart, 1984; Bell et al, 1985; Onslow, 1986 ; 林福來, 1986)，整理這些文獻，發現教學策略雖然不同，但有一共通的原則，即

5.對於學生共同常犯的錯誤，教學設計務須使學生有機會主動察覺自己錯了，亦即產生認知衝突。

造成認知衝突的策略，主要學理依據仍然是皮亞傑的平衡模式 (equilibration model)，期望在認知衝突之後引起認知與概念變化的潛力。

綜合 Case 的四點教學設計程序 (1. ~ 4.) 與處理學生共同常見錯誤的原則 (即 5.)，即形成所謂的數學診斷教學的原理。

(二)分數的電腦學習環境

國際上的分數實驗教學還有一種趨勢是發展電腦的學習環境。例如澳大利亞的 Hunting 與 Davis (1991) 在國際數學教育心裡學會 1990 與 1992 兩次年會的“比與比例”研習群 (working group) 中介紹他們所設計稱為“幾分之幾”機器的軟體，讓小朋友一再操作輸入，觀察輸出的結果，進而瞭解“幾分之幾”。這是利用電腦當學習環境學習分數的一個例子。美國的 Olive 與 Steffe (1990) 同樣在研究電腦環境下，分數概念建構的情形。

電腦的學習環境是教育的發展趨勢，電腦操作涉及英文字母的認識能力。分數啟蒙教學的對象為小學二年級學生，一般都不認識英文字母，故電腦學習環境，在國內有發展限制。

八、啓 示

現實的數學教育理念與數學診斷教學原理整合成為“分數啟蒙”的理論基礎。根據此理論基礎，形成下列幾個分數啟蒙研究時該探討的問題。

(一)調查分數概念之源

4 塊蛋糕分給 2 個人，每人得到 2 塊，這是個整量分配的問題。5 塊蛋糕糖分給 2 個人，每人分得 2 塊後，剩餘的 1 塊還需再分，這是一個餘量分配的問題。

整量分配與餘量分配的經驗是初等分數概念——分量概念的前置經驗。

學生的分數之源，包括學生為學分數之前處理生活化的整量分配與餘量分配問題時，所使用的素樸解題策略，稱呼餘量分配結果所使用的生活用語，表達其想法與操作的視覺化模型之識別與使用能力等。

(二)調查學生初學分數的學習困難

這是發展診斷教學教案所必須的資訊。

(三)發展分數啟蒙教案

理論啓示需發展現實生活化的啟蒙例題，讓學生在高度互動的學習環境中，發

展自己的解題策略，教師掌握分量不變性的教學目標，適時提問具引導思考或診斷錯誤的問題。

四分數啟蒙教學實驗

上述四個問題的研究結果，將陸續報導。

註(1)：本文是國科會專題研究計畫編號：NSC81-0111-S-003-21-A 及 NSC82-0111-S-003-013 的部份結果。但文中論點為作者所有，不代表國科會。

(2)：參與現實的數學教育理念辯證者

朱健正	呂玉琴	吳昭容	杜家慧	林福來
黃敏晃	張英傑	郭汾派	鍾 靜	譚寧君

參考資料

1. 林福來、黃敏晃等 (1991)：教與學的整合研究：分數概念 (I)，國科會專題研究計畫報告，師大數學系。
2. 林福來、郭汾派、林光賢 (1985)：國中生的比例概念發展，國科會專題研究計畫報告，師大數學系。
3. 林福來、郭汾派、林光賢 (1985)：比例推理的錯誤診斷與補救，科教研討會論文集編。
4. 呂玉琴 (1992)，國小學生的分數了解 (尚未發表)。
5. 譚寧君 (1991)：除法教學探討，國民教育，第卅一卷，第 11、12 期。
6. Hart, K. M. (1989)：學生的數學架構，Hart 專題演講，呂玉琴譯，科學教育月刊。
7. Skemp R. (1983)：新智力模式在數學學習上的應用，Skemp 數學學習心理學專題演講，林福來譯，師大數學系。
8. Bell, A. W., Costello J & Kuchemann D., (1983): Research on Learning and Teaching, N.F.E.R.- Nelson.
9. Bell, A. W. Swan, M., Onslow, B., Pratt, K., Purdy, D. and others (1985): Diagnostic Teaching - Teaching for Long Term Learning, Shell Centre for Mathematics Education, University of Nottingham.
10. Booth, L. R. (1984), Algebra: Children's Strategies and Errors, N.F.E.R.- Nelson.
11. Brekke G & Bell A. (1992), Multiplicative Structures at Ages Seven to

- Eleven, Proceedings of the Sixteenth PME Conference, V.1. 97-104.
12. Bruner J. S. (1960): On Learning Mathematics, The Mathematics Teacher, 53, P. 68-70.
 13. Cockcroft W. H. (1982): Mathematics Counts, London, HMSO.
 14. Crowley M. L. (1987): The Van Hiele Model of the Development of Geometric Thought, in Lindquist MM.(ed.), Learning and Teaching Geometry, K ~ 12, NCTM, 1987 Year-book.
 15. Dienes Z. P. (1973): The Six Stages in the Process of Learning Mathematics, NFER.
 16. Freudenthal H. (1983): Didactical Phenomenology of Mathematical Structures, D. Reidel Pub. Co.
 17. Gold, A. P. (1978): Cumulative Learning Versus Cognitive Development. Ph. D. Thesis, University of California, Berkeley.
 18. Hart, K. M. (1984), Ratio: Children's Strategies and Errors, N.F.E.R.-Nelson.
 19. Hart, K. M. (1987): What are Equivalent Fractions? Mathematics in School, September, P. 5-7.
 20. Howson G., Keitel C., & Kilpatrick J. (1981): Curriculum Development in Mathematics, Cambridge University press.
 21. Hunting R. P. & Davis G. (Eds.) (1991), Early Fraction Learning, New York: Springer-Verlag.
 22. Lange Jzn, J. de (1987): Mathematics insight and Meaning, OW&OC, Utrecht.
 23. Lin, F. L. (1991), Characteristics of 'Adders' in Proportional Reasoning, Proceedings of the National Science Council , V.1, # 1, 1-13.
 24. Lin, F. L. (1988), Societal Differences and Their Influences on Children's Mathematics Understanding, Educational Studies in Mathematics, 19, 471-497.
 25. Lin, F. L. (1982): The Secondary School Mathematics Curriculum Projects in Taiwan Analysis and Criticism, M. Phil Thesis, Department of Education, University of Cambridge.

26. Olive J. & Steffe L. P. (1990), Construsting Fractions in Computer Microworlds, Proceedings Fourteenth PME Conference V.III, P. 59-66.
27. Streefland L. (1991), Fractions in Realistic Mathematics Education, Kluwer Academic Publishers.
28. Streefland L. & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1992); Evoking Pupils' informal knowledge on percents, proceedings of the Sixteenth PME Conference, Durham, N.H. U.S.A.

附錄一

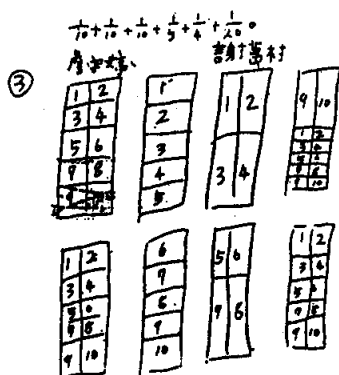
① 詹宇文亭 $\frac{1}{2}$

	5	9	1
			2
			3
			4
	6	10	5
	7	1	2
		3	3
		4	4
		5	5
		6	6
		7	7
		8	8
		9	9
		10	10

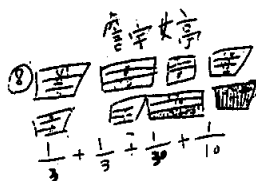
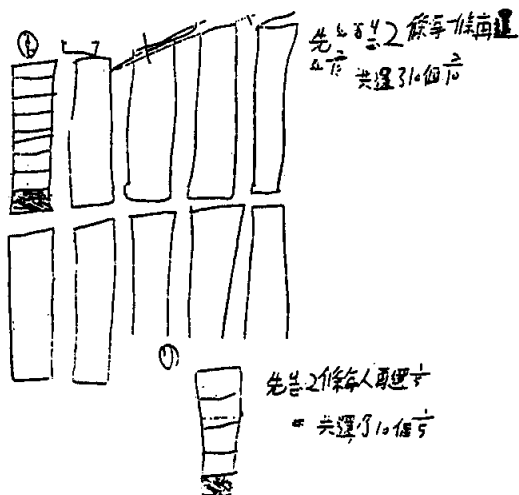
② 詹宇文亭 $\frac{1}{5}$ 何昱毅

1 2	9 10	7 8	5 6	1	2
3 4	1 2	9 10	7 8	3	4
5 6	3 4	1 2	9 10	5	6
7 8	5 6	3 4	1 2	7	8
				9	10
				1	2
				3	4
				5	6
				7	8
				9	10
				1	2
				3	4
				5	6
				7	8
				9	10

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$



④ 8個 $\frac{1}{10}$



The Beginning Fractions Curriculum in Taiwan — Analysis and Criticism

Fou-Lai Lin

National Taiwan Normal University

Men-Fong Huang

National Taiwan University

Abstract

This paper analyses the current beginning fractions curriculum used in Taiwan, and seeks for a ground theory in order to improve children's fractions learning.

In section one, some specific problems of teaching and learning beginning fractions are analysed based on certain survey data. In section two, problems of the fractions teaching material are analysed in terms of the unique set of textbooks used in Taiwan.

In section three, the general situation of teaching, learning and content of fractions are systematically examined based on the mechanistic approach and the structuralistic approach in mathematics curriculum theory. It was found that the implemented fractions curriculum can be characterized by the mechanistic approach, however the intended fractions curriculum tends towards the structuralistic approach.

In section four, some problems of the fractions curriculum based on the structuralistic approach are criticized.

In section five, the educational principles and learning theory of the realistic mathematics education are introduced via a study in which the process and strategies used by three children in solving the problem of sharing loaves of breads are observed and analysed.

In section six, the ideas of realistic mathematics education are dialected via a panel involving ten mathematics educators.

In section seven, the principles of mathematics diagnostic teaching are synthesized.

In section eight, a ground theory for developing beginning fractions

curriculum is recommended by integrating the principles of the realistic mathematics education and the diagnostic teaching. Some research problems are then formulated in terms of this theory.

Key Words: Fractions Curriculum, Concept Formation, Instruction Theory, Learning Theory