



中年級學童解決加減文字題能力之探討： 多餘資訊與兩步驟問題

蔣 治 邦

國立政治大學心理學系

(投稿日期：民國 82 年 8 月 5 日，接受日期：82 年 8 月 31 日)

摘要：本研究透過兩個實驗，來探索及描述中年級學童，使用加減概念，來理解應用題題意的能力。實驗一測試 314 位三、四年級學童，探索學童解決單一步驟改變類型加減問題的能力，以及多餘資訊對學童的影響；實驗二測試 318 位三、四年級學童，探索學童解決兩步驟改變類型加減問題的能力，以及命題次序對學童的影響。

一般而言，在各個實驗所測試的能力上，年級高的學童皆具有比較優異的表現；實驗一的結果顯示：三、四年級學童在解題時，皆會受到多餘資訊的干擾，多餘資訊問題的錯誤，大多與多餘的數字資訊有關；實驗二的結果顯示：改變量未知的兩步驟問題較結果量未知的兩步驟問題困難，在改變量未知問題中，命題次序影響學童的表現，當發生錯誤時，學童或選擇錯誤運算，或簡化問題，使用單一運算解題。

綜合兩個實驗的結果，本研究描述三、四年級學童使用正式加減計算，解決單一步驟改變類型問題的能力，進而探索各年級學童在各類問題上，所展現的「部份—整體」關係分析能力，以及理解題意的變通性。

關鍵詞：加減概念、問題解決

緒 論

能夠使用習得的數學知識來解決問題，是國民小學數學教育的主要目標之一（國立編譯館，1981），而加減運算概念更是學童學習數學的起點。研究發現：多數學童在進入國民小學之前，已經能夠利用他們對情境的瞭解，透過具體物的輔助，使用非正式的數物策略，解決一些加減的應用問題（王逸文，1984；蔣治邦、鍾思嘉，1991；Carpenter，1985），當學童進入國民小學後，開始學習數學符號，學習使用加減運算概念，來理解及解決應用問題，進而培養解決複雜問題的能力，本研究以加減運算概念為範圍，探討中年級學童，在面對解決多餘資訊及兩步驟問題時，如何思考問題，以描述中年級學童解題能力的發展。

改變型加減應用問題

近年來，大量的研究在探索學童解決單一步驟加減應用題的能力，而改變 (change)、合併 (combine)、或比較 (compare) 三大類型的問題，通常是研究與討論的焦點 (呂玉琴，1988；吳昭容，1990；翁嘉英、鄭昭明，1988；葉雪梅，1990；蔣治邦、鍾思嘉，1991；謝毅興，1991；Carpenter，1985；Carpenter & Moser，1982；Nesher，Greeno，& Riley，1982；Riley Greeno，& Heller，1983)。本研究採用改變類型問題，作為測試題目設計的基礎，來探索學童解決多餘資訊及兩步驟問題的能力。

單一步驟的改變問題，通常描述一個數量移出或移入的活動，在這個量的改變事件中，有一個起始的數量 (起始量)，經過某種活動，產生量的改變 (改變量)，而形成一個結果的數量 (結果量)，依據改變活動的方向，可區分為增加 (increase) 或減少 (decrease) 兩類情境，而每類情境中，又可依據未知量在問題中的角色加以分類，由此衍生出六種基本的改變類型題目 (例題見表 1)，為描述方便，仿照其他研究文獻，各類問題皆予以數字編號，而以“類型—數字”的編組來指示特殊類型的題目 (蔣治邦、鍾思嘉，1991)，例如使用「改變 1」來代表增加情境中的結果量未知問題；「改變 2」代表減少情境中的結果量未知問題；運用表 1 中的數字，以此類推命名。

表 1 簡單改變類型應用題

增	加	類 型	減	少
		改 變		
(1) 小明有 5 顆糖，小華又給小明 3 顆，問小明現在有幾顆糖？		結 果 量 未 知	(2) 小明有 8 顆糖，然後小明給小華 3 顆，問小明現在有幾顆糖？	
(3) 小明有 3 顆糖，小華又給小明一些糖後，現在小明有 8 顆糖，問小華給小明幾顆糖？		改 變 量 未 知	(4) 小明有 8 顆糖，然後他給小華一些糖後，現在小明有 3 顆糖，問小明給小華幾顆糖？	
(5) 小明有一些糖，小華給他 5 顆糖後，現在小明有 8 顆糖，問小明原來有幾顆糖？		起 始 量 未 知	(6) 小明有一些糖，然後他給小華 5 顆，現在小明有 8 顆糖，問小明原來有幾顆糖？	

出處：翁嘉英，鄭昭明。(民 78)。國小兒童數學應用問題認知歷程。見梁雲霞主編。七十七年國小課程研究學術研討會專輯。台北縣：台灣省國民學校教師研習會。

改變問題中，有明顯的活動，學童在未學習正式的加減運算前，即能藉由具體物的操作，來模擬改變事件的進行，進而決定未知的數量。在低年級的數學教育中，經常利用學童對改變事件的知識，來介紹加減運算的意義，例如使用改變 1(或稱

之添加型)問題介紹加法意義；使用改變 2(或稱之拿走型)問題來介紹減法的意義。本研究假設三、四年級學童，已能理解改變事件的故事情境，而進一步地探討學童在此類情境中，如何解決多餘資訊及多步驟問題。

問題解決的理解過程

在解答一個應用問題的過程中，涉及理解題意與計算兩種過程(Riley et al., 1983；Silver & Thompson, 1984)，解答者需要先使用語文的知識，來瞭解問題的性質，已知數量是什麼？未知數量是什麼？已知數量與未知數量間的關係是什麼？是否有足夠或過多的條件來決定未知數量？依據题目的性質，建立適當的解題計畫，再依據計畫，執行運算(計算)的過程，得到答案，最後再驗證答案，是否已正確地回答問題(林碧珍，1989；Mayer, 1987; Polya, 1945; Silver, 1985; Skemp, 1971)。而廣義的理解題意(翻譯，Translation)歷程，包含語文理解、整合題意、建構適當的問題表徵、以及形成解題計畫(DeCorte & Verschaffel, 1981; Kintsch & Greeno, 1985; Paige & Simon, 1966; Riley et al., 1983)。

使用數學知識來解決問題時，如何使用適當的數學模式來模擬(表徵)問題情境，是解題的重要步驟(Skemp, 1971)，Lesh 和 Landau (1983)由數學模式的角度，重新描述解題的過程：(1)簡化問題，專注問題情境中的重要性質，而忽視非相關資訊；(2)建立問題情境與數學模式的對應關係；(3)使用數學模式中擁有的性質，來推論新的資訊；(4)將獲得的新資訊，由數學模式翻譯回原始情境，並檢查此結果是否合理。

Riley、Greeno、和 Heller (1983)主張在解題的過程中，需要使用問題基模(problem schemata)來理解問題情境，學童的問題基模的發展分為三個層次，各個層次的差別在於其表徵訊息的方式，以改變類型問題為例，學童在早期的發展中，必須透過實物的協助，逐步地模擬題目中的描述，形成具體的外在表徵，“演出”(act out)問題情境，來尋找問題的答案；逐漸地，學童可以形成部分內在表徵，這種發展可使學童一方面知道「改變後的結果」(外在表徵)，而另一方面記憶「改變的過程」(內在表徵)；唯有達到第三個發展層次的學童，才能使用由上而下的歷程，分析題目中各個數量間所具有的「部份—整體」關係，來形成解答。此種問題基模的發展理論，幫助預測各類型題目如何造成解題的困難，實證的研究中，亦發現在有具體物的解題情境中，學童最先發展出解決結果量未知問題(改變 1、2)的能力，其次為改變量未知的問題(改變 3、4)，最後才是起始量未知的問題(改變 5、6)(王逸文，1984；蔣治邦、鍾思嘉，1991；Carpenter & Moser, 1983; Ri-

ley et al. 1983)。

使用具體物來模擬加減問題，是解決加減問題的一種有效方法。當問題中的數字逐漸增大時，使用具體物操作的策略，產生許多的不便及困難，學童們需要使用加減運算的法則，才能減化計算的過程，但是學童能夠使用具體物操作來解題，並非意味著其亦能使用加減運算來解題，在蔣治邦和鍾思嘉(1991)的研究中，同時採用個別訪問(提供具體物)及團體測試(隱含列式解題的要求)兩種測試方式，來探討學童解決加減問題能力，在改變3的問題上，兩種測試情境通過率的差異在20%以上，當有具體物時，二、三年級學童大多能解決改變3的問題，但使用紙筆測驗時，錯誤開始發生，學童開始選擇錯誤的運算來解決問題。因此在實驗一中，再次地使用六種基本的改變類型問題，採用較大的數字，來探索三、四年級學童使用正式加減運算來解決改變問題的能力。

當學童使用具體物的操作來輔助解題時，由於其具體物的操作方式，是模擬問題中的改變過程，因此自然地保留題目中所描述的已知量及未知量間的關係。同樣地，當要使用加減運算來輔助解題時，學童需要決定一種加減的運算方式，而在此選擇的運算方式中，仍須保留應用題中所描述的已知量及未知量間的關係。如果學童已具備 Riley 等人(1983)所描述的第三層次的能力，在面對起始量或改變量未知的問題時，他們可以進行「部份—整體」的分析，以改變3問題為例，解題者可以視起始量與改變量為兩個部份，共同形成結果量，經過由上而下的歷程，可以決定自一個整體去除一個部份，則獲得另一個部份的量，進而決定「結果量 - 起始量 = 改變量(未知)」的運算方式；解題者亦可直接轉譯題意，以「起始量 + 改變量(未知) = 結果量」的方式來理解改變3的問題，但此種理解方式，並不方便使用運算法則，學童須要使用嚐試錯誤的方式，來決定未知的改變量，這兩種理解過程，都可以合理地幫助解決問題。

在單一步驟的加減應用題研究中，題目上通常只有兩個數字資訊，因此學童的策略可能是：先決定運算，然後將兩個已知的數字配合到運算中，例如：決定使用減法，則用題目中的大數減去小數，此種過程可能並不代表學童對加減概念的理解，他(她)們決定運算的過程可能是錯誤的，例如：部份學童使用關鍵字策略(楊美伶、蔣治邦，1992；Reys, Suydam, & Lindquist, 1984; Sherrill, 1983)，部份學童偏好選擇加法運算(蔣治邦、鍾思嘉，1991)或減法運算(翁嘉英、鄭昭明，1988)，由於此時測試題目的限制，學童可能選擇了正確的運算而無正確的加減概念，研究文獻可能高估了學童對加減概念的理解，因此本研究在實驗一中，除了使用

單一步驟的加減問題外，另外檢驗多餘資訊對學童的干擾作用，在實驗二中，採用兩步驟應用問題，來探討學童對加減概念的掌握。

實驗一

以前的研究發現，在有具體物的解題情境中，學童最先發展出解決結果量未知(改變 1、2)問題的能力，其次為改變量未知(改變 3、4)的問題，最後才是起始量未知(改變 5、6)的問題，本實驗採用較大的數字，檢驗三、四年級學童運用加減運算來解決單一步驟改變問題的能力。

本實驗將單一步驟改變類型應用題，按題目的難度(蔣治邦、鍾思嘉，1991；Riley, Greeno, & Heller, 1983)，分為簡單與複雜兩種類型，簡單型採用改變類型中「結果量未知」的題目(如改變 1、2)，複雜型則採用改變類型中「改變量未知」或「起始量未知」的題目(如改變 3、4、5、6)。在簡單問題中，學童祇需正確解釋題目中活動的語意，即能產生方便於計算的運算方式，例如改變 1 的問題，依據題目的活動的意義，可視為「起始量 + 改變量 = 結果量(未知)」；改變 2 問題，可視為「起始量 - 改變量 = 結果量(未知)」。但是在複雜問題中，學童必須重新整合題目中的語意，才能產生合理且方便於計算的運算方式，例如透過「部份—整體」的分析，將改變 3 問題視為「結果量(整體) - 起始量(部份) = 改變量(未知)」；將改變 4 問題視為「起始量(整體) - 結果量(部份) = 改變量(未知)」；將改變 5 問題視為「結果量(整體) - 改變量(部份) = 起始量(未知)」；以及將改變 6 問題視為「改變量(部份) + 結果量(部份) = 起始量(未知)」。本實驗以簡單與複雜兩種類型的單一步驟應用題為基礎，操弄多餘資訊的有無。

多餘資訊是泛指：在題目的命題中，含有與正確解題無關之數字，換言之，在無多餘資訊的題目中，增加一個含有數字的命題，即形成有多餘資訊的題目。在一個合理的解題過程時，解題者首先須要區辨各個含有數字的資訊，是否與解題有關？進而忽視無關的資訊，對有關的資訊進行運算(Lesh & Landau, 1983; Robinson & Hayes, 1978)，如果解題者不能整合題意，不能用正確的數學模式來理解問題，多餘資訊則造成解題時的干擾，學童在學習解決問題的過程中，多餘資訊常造成較多的困難(Cohen & Stover, 1981; Kameenui & Griffin, 1989; Nesher, 1976)。為了增加多餘資訊對解題的干擾，本實驗將多餘資訊，按照題意，插入於需要運算的兩個數字之間，在表 2 中的例子，即說明「多餘資訊題」及「無多餘資訊題」之間轉換的方式。

表 2 無多餘資訊題與多餘資訊題之間，轉換方式的例子

	無 多 餘 資 訊 題	多 餘 資 訊 題
題 目	大華在郵局原有21元，昨天又到郵局存了43元，請問現在大華在郵局有多少錢？	大華在郵局原有21元，在家裡有61元，昨天又到郵局存了43元，請問現在大華在郵局有多少錢？

本實驗透過多餘資訊的操弄，來探討三、四年級學童加減概念的發展，如果某年級學童已發展出「部份—整體」的分析能力，能萃取題目中已知量與未知量的關係，並依據此關係選擇適當的運算方式及運算對象，則該年級學童在「無多餘資訊題」及「多餘資訊題」上的表現，應相當一致，而當學童並非由已知量與未知量關係來決定運算時，則多餘資訊將干擾學童的解題活動，或對多餘資訊進行多餘的運算；或在決定運算方式後，選擇錯誤的數字進行運算。

本實驗採用團體測試的方式，來描述三、四年級學童解決改變類型加減法單一步驟應用題的能力，並運用交互設計 (switch design)，來探討多餘資訊對學童解題的影響。本實驗對學童的解題過程及答案，加以記錄與分類，以探討學童的錯誤類型。

研究方法

受試者

本實驗以國民小學三、四年級學童為受試，在台北市的四所國民小學三、四年級中，各抽取一個班級，在學年的第二學期的第一箇月中，進行測試，其中三年級男生 70 名，女生 86 名，四年級男生 85 名，女生 73 名。

工具

每份題本包含 16 題單一步驟改變類型應用題，16 題應用題分為四組：簡單型甲組、簡單型乙組、複雜型甲組、和複雜型乙組。簡單型甲組及簡單型乙組分別由改變 1、2 各兩題組成，複雜型甲組及複雜型乙組分別由改變 3、4、5、6 各一題組成。在題本中，四組題目混合出現，以拉丁方格設計的方式，安排題目順序，以減少題目順序所造成的誤差。

本實驗有 A、B 兩種題本：A 題本中，簡單型甲組及複雜型甲組的題目為無多餘資訊題，簡單型乙組及複雜型乙組的題目為多餘資訊題；在 B 題本中採用相反的安排，簡單型甲組及複雜型甲組的題目為多餘資訊題，簡單型乙組及複雜型乙組的

題目為無多餘資訊題。

所有的應用題均以購物、儲蓄、或送東西為情境。題目中所有數字均為 2 位數，以避免學童使用具體物模擬的方式來解題，但在正確運算過程中，不需要進位或借位，以減少計算的困難。題目利用電腦打字，印製於 8.5×6 平方英吋的白紙上，所有的文字皆加以注音，每頁紙上呈現一題，並印出一長方塊，以供填寫答案。所有題目按次裝訂成冊，學童直接在題本上計算作答。

實驗程序

為了降低班級變項對研究結果的干擾，本實驗以班級為區組，施行區組化隨機分配程序，在施行過程中，首先將 A、B 兩種題本以區組隨機方式安排次序，加以編號，進入班級後，按題本編號，依著學童座位次序分發，此種安排使得每個班級內，使用 A、B 題本的人數相當，而且各個學童採用何種題本，是經過隨機分配的程序。

本實驗利用學童平時上課時間施測。十位政大心理系所學生，擔任測試的主試和襄試。十人皆修習過心理測驗課程，並經過 2 小時的訓練，瞭解並操作施測程序。主試和襄試進入預定受測班級，襄試按題本編號順序發下題本，主試說明測試內容及作答方式後，學童若沒有任何疑問，就開始作答。所有的題目由學童自行閱讀與作答，沒有任何時間限制。在測試的進行中，學童若有看不清楚的字詞，主試和襄試可以告訴學童看不清楚的字詞，至於其他疑問，主試和襄試僅回答“多想想看”。

反應類型分類

為了進一步地分析學童的錯誤，本實驗將學童在題本上的反應，分為十一種類型。在分類時，「學童如何解決問題？」為主要的分類指標，首先注重學童是否選擇了正確的解題過程（運算及數字），再分辨學童是否得到正確的答案，如果學童的解題過程已呈現錯誤，則以此錯誤為分類的依據，而不重視計算或其他的疏忽。

學童的十一種反應類型為：(1)正確反應；(2)抄錄錯誤：學童從題目抄到算式上，有任何一個數字抄錯；或運算正確，而寫入答案方框時，把數字抄錯；(3)計算錯誤；(4)數字錯誤：學童完成了正確的運算，但不能正確的選擇答案，而以題目所給的數字為答案；(5)選用錯誤數字：學童選擇單一步驟的運算，但選擇錯誤的數字進行運算；(6)選用錯誤運算：學童選用正確的數字進行單一步驟運算，但是選擇錯誤運算；(7)選用錯誤數字及運算：學童進行單一步驟運算，但同時選用錯誤的數字及運算；(8)選用多餘步驟：學童選用兩步驟運算，第一步驟是正確的算式，而第二步

驟是多餘的。或者在兩步驟運算中，除多餘資訊數字外，反應了其他兩個數的正確關係；(9)選用錯誤運算且採用多餘步驟：學童選用兩步驟運算，除了在其中的一個步驟中，使用多餘資訊數字外，而且錯誤地反應其他兩個數字間的關係；(10)未作答；以及(11)其他。

結 果

年級、題目類型、及多餘資訊對學童解題之影響

本實驗使用 $2(\text{年級}) \times 2(\text{題本}) \times 4(\text{題組})$ 三因子變異數分析進行考驗，年級與題本皆為受試間變項，而題組為受試內變項，本實驗採用交互設計，部份的題本與題組的交互作用，將用來考驗多餘資訊對學童解題的影響，並且本實驗側重於描述各個年級學童的解題能力，因此採用簡單交互作用效果 (simple interaction effect) 的分析方式，在各年級內，考驗題本與題組的交互作用，而不討論三因子的交互作用。

表 3 呈現學童在各組問題上答對題數平均數與標準差，根據變異數分析，整體而言，四年級學童答對較多的問題， $F(1,310) = 9.25$ ， $MSe = 1.96$ ， $p < .01$ ；兩份題本並未造成顯著地差異， $F(1,310) = .47$ ， $MSe = 1.96$ ， $p > .05$ ；年級與題本的交互作用亦不達顯著水準， $F(1,310) = .01$ ， $MSe = 1.96$ ， $p > .05$ ，顯示兩份題本的難度相當，而且使用 A、B 題本的學童，具有相同的能力。

題組的主要效果達顯著水準， $F(3,930) = 14.58$ ， $MSe = .43$ ， $p < .01$ ，經由薛費氏事後比較，簡單型題目答對的題數顯著地高於複雜型， $S = 5.27$ ， $p < .01$ ；簡單型內，答對甲組題目的數量顯著地高於乙組題目， $S = 4.01$ ， $p < .01$ ；而複雜型中，甲、乙兩組題目並無顯著的差異， $S = 0.76$ ， $p > .05$ 。題組與年級之間的交互作用未達顯著水準， $F(3,930) = .10$ ， $MSe = .43$ ， $p > .05$ 。在三年級學童中，題本與題組的交互作用達顯著水準， $F(3,930) = 48.86$ ， $MSe = .43$ ， $p < .01$ ，經由薛費氏事後比較，簡單型與複雜型題目的難度差異，在兩份題本上相同， $S = 2.19$ ， $p > .05$ ，在簡單型題目上，題組與題本有顯著的無次序性交互作用效果 (disordinal interaction effect)， $S = 6.87$ ， $p < .01$ ，在題目設計時，A 題本的簡單型甲組為無多餘資訊題，乙組為多餘資訊題，而 B 題本採相反的安排，甲組為多餘資訊題，乙組為無多餘資訊題，因此在簡單型題目內，題組與題本的無次序性交互作用效果，顯示三年級學童，在解決簡單型問題時，多餘資訊造成解題的困難。在複雜型題目上，題組與題本亦有顯著的無次序性交互作用效果， $S = 9.70$ ， $p < .01$ ，顯示三年級學童在解決複雜型問題時，多餘資訊亦造成解題的困難。

表3 三、四年級學童在各類型題目上的平均數和標準差

	三 年 級		四 年 級	
	A 題 本 n=78	B 題 本 n=78	A 題 本 n=79	B 題 本 n=79
簡單型甲組	無多餘資訊 3.49 (0.77)	有多餘資訊 3.05 (0.98)	無多餘資訊 3.60 (0.67)	有多餘資訊 3.34 (0.97)
簡單型乙組	有多餘資訊 3.18 (1.15)	無多餘資訊 3.76 (0.56)	有多餘資訊 3.53 (0.88)	無多餘資訊 3.85 (0.43)
複雜型甲組	無多餘資訊 3.60 (0.71)	有多餘資訊 2.72 (1.06)	無多餘資訊 3.72 (0.70)	有多餘資訊 3.14 (1.03)
複雜型乙組	有多餘資訊 2.85 (1.27)	無多餘資訊 3.41 (0.96)	有多餘資訊 3.27 (1.08)	無多餘資訊 3.53 (0.81)

四年級學童的表現與三年級學童相似，題組與題本對四年級學童答對的題數，有顯著的交互作用效果， $F(3,930) = 17.10$ ， $MSe = .43$ ， $p < .01$ ，經由薛費氏事後比較，簡單型與複雜型題目的難度，在兩份題本上相同， $S = 1.82$ ， $p > .05$ ，在簡單型題目中，甲、乙兩組題目與A、B兩份題本有顯著的無次序性交互作用， $S = 3.93$ ， $p < .01$ ，在複雜型題目中，甲、乙兩組題目與A、B兩份題本有顯著的無次序性交互作用， $S = 5.69$ ， $p < .01$ ，顯示在簡單型與複雜型問題上，多餘資訊皆造成四年級學童解題的困難。

學童在各種類型應用題上的答對率及錯誤類型

爲了進一步地探討各類應用題的難度，以及學童的錯誤原因，本實驗以問題爲分析單位，綜合學童在A、B題本上的反應，計算了各種類型應用題答對的百分率（見表4）。就無多餘資訊問題而言，三、四年級學童大多已能掌握各種改變類型的問題，唯有改變5的問題，似乎比較困難，造成較多的錯誤（約20%）。在有多餘資訊的簡單型問題上，三年級學童的答對率降低了12%，四年級學童降低了7%；在有多餘資訊的複雜型問題上（改變3、4、5、6），三年級學童的答對率降低了18%，四年級學童降低了10%；同樣地，多餘資訊在改變5的問題上，造成學童更多的困擾，多餘資訊在改變3的問題上，亦造成三年級學童較多的困擾。

表 4 各類型題目之答對率

		改變 1	改變 2	改變 3	改變 4	改變 5	改變 6
無多餘 資訊	三年級	89.43	91.65	90.35	95.50	79.50	85.25
	四年級	89.23	96.83	93.65	95.60	82.25	91.10
有多餘 資訊	三年級	74.38	81.40	67.30	83.90	56.40	70.50
	四年級	82.58	89.20	83.55	91.15	66.45	79.10

觀察學童的反應類型，多餘資訊並沒有造成較多運算選擇的錯誤，在這些多餘資訊問題上，不論是簡單型或複雜型問題，三、四年級學童的錯誤類型皆相似，60% 以上的錯誤與多餘資訊數字有關，其中約半數的錯誤是：學童選擇多餘資訊的數字，進行單一步驟的運算；另有半數的錯誤為：學童覺得必須對多餘資訊的數字，加以處理，而進行兩步驟的運算。

討 論

在實驗一中，三、四年級學童展現了解決六種基本改變類型問題的能力，當題目中沒有多餘資訊的干擾時，學童大多能使用加減計算來解決問題，除了改變 5 的問題外，其他各類問題的答對率皆在 85% 以上，而改變 5 的答對率亦在 80% 左右。能夠在兩位數的無多餘資訊題中，正確地解答各種單一步驟的改變類型問題，顯示三、四年級學童們在加減運算與改變問題情境之間，建立了一些對應的關連。

但是當問題中有多餘資訊時，多餘資訊干擾了部份學童解題的過程，或選擇錯誤的數字進行運算，或進行多餘步驟的運算。不能辨識多餘資訊，顯示部份學童的加減概念尚有缺陷，而學童在多餘資訊題上的表現，亦反應出六種改變問題情境的難度：起始量未知的問題最困難，改變量未知問題次之，與先前的研究相當一致。

實驗一的結果亦有與先前研究不一致之處，依據 Riley 等人 (1983) 或 Nesher 等人 (1982) 的預測，解決改變 5 與改變 6，是運用相同的概念，而在實驗一中，不論無多餘資訊題或多餘資訊題，學童在改變 6 問題上的表現皆優於改變 5，此結果與蔣治邦與鍾思嘉 (1991) 的結果相同，觀察三年級學童在多餘資訊題上的表現，改變 2 多餘資訊題的答對率高於改變 1，改變 4 的多餘資訊題的答對率亦高於改變 3，這些與先前研究預測不一致的結果，固然可以用問題情境不同來加以解釋，但亦引發

一個懷疑，學童是否先發展處理數量減少情境的能力，而較後發展處理數量增加情境的能力？

Riley 等人 (1983) 與 Nesher 等人 (1982) 在探討兒童問題基模的發展時，認為兒童須發展出「部份—部份—整體」的基模，才能由整合的觀點，來理解六種基本的改變類型問題情境，視加與減為互逆的運算，兩個部份合成整體，而整體減去一部份，則形成另一部份。因此在面對改變 5 的問題情境時，可以藉著分析題目中各個集合間的「部份—整體」關係，將起始量及改變量皆視為結果量的部份，而用已知的整體（結果量）及一部份（改變量），來推論另一部份（起始量），而在面對改變 6 的問題時，將已知的改變量及結果量，皆視為起始量的部份，合成兩個部份，來推論整體的量。分析「部份—整體」的關係，為解決改變 5、6 的必要條件。

實驗一的結果顯示：三、四年級學童能夠解決無多餘資訊的改變 5 或改變 6 問題時，並不必然表示他（她）們已具備完整的「部份—整體」關係的分析能力。在多餘資訊的問題中，多餘資訊與未知數之間，並無任何「部份—整體」關係，如果假設能夠解決無多餘資訊改變 5、6 問題的學童，是使用「部份—整體」關係來分析問題，則多餘資訊不應造成任何干擾，而實驗一的結果與此預測相違背。

由於三、四年級學童在無多餘資訊題上的答對率都相當高，因此顯示大多數的學童，在決定運算的過程中，並非使用關鍵字策略，或由自己的偏好來決定運算，如果學童使用此兩種策略來決定運算時，皆應在半數的問題上答錯。但是由於發現多餘資訊的干擾作用，亦可推論部份學童在解決改變問題上，尚不能分析已知量及未知量的「部份—整體」關係，來決定運算的方式及運算的對象。這個現象可能說明：部份的三、四年級學童，雖未發展出穩定的「部份—整體」分析能力，但對於平時較易遇到的無多餘資訊問題，已能記憶各種類型問題的解法，回憶出需要解題的運算，而不是由題目中已知量及未知量的關係，來決定運算，因此在遇到較不常見的多餘資訊題時，受到干擾即產生錯誤。

實驗二

在研究文獻中，多步驟應用問題亦常造成學童的困難 (Kameenui & Griffin, 1989; Nesher, 1976; Sherrill, 1983)，多步驟問題要求解題者進行更多的問題整合，而造成理解題意的困難，在文獻中尚少有研究對加減多步驟問題進行有系統的分類與探索。Nesher 和 HersHKovitz (1991) 使用隱含元素 (latent component) 的概念，將兩步驟問題視為兩單一步驟問題的聯合，在進行解題的過程中，經過第一步

驟的運算，會產生一個新的資訊，而此新的資訊為第二步驟運算中所必須的，此新的資訊在原題目中並未呈現，故稱之隱含元素，透過隱含元素的連接，兩個單一步驟的問題合併為兩步驟的問題。

本研究使用基本的單一步驟改變類型的問題，有系統地合成兩步驟問題，來探討這些問題的難度。改變類型的兩步驟問題，依題意可以視為：由一個起始狀態，經過兩個改變事件，而產生一個新的結果狀態，在實驗二中，本研究採用「結果量未知」與「改變量未知」兩種類型題目，結果量未知題以結果量為未知數，而改變量未知題，則以兩個改變事件之一的改變量為未知數（參閱表 5 的例子）。

表 5 結果量未知型及改變量未知型題目之例子

	結 果 量 未 知 型	改 變 量 未 知 型
題 目	小杰身上有32元，媽媽給小杰27元後，小杰買了一把尺用去15元，請問小杰現在還有多少錢？	小君有57元，爸爸給小君12元後，小君買橡皮擦用去一些錢，小君現在有46元，請問買橡皮擦用去多少錢？

兩步驟改變量未知型的問題，可以進一步地按照未知數的位置，區分為第一事件改變量未知（簡稱「第一事件未知型」）與第二事件改變量未知（簡稱「第二事件未知型」）兩種類型，在題目中，是用命題來表達事件所產生的改變方向與量，因此改換命題的次序，即可完成第一事件未知型與第二事件未知型題目間的轉換（如表 6 中的例子）。

表 6 改變量未知型：第一事件未知題及第二事件未知題之例子

	第 一 事 件 未 知 題	第 二 事 件 未 知 題
題 目	小君有57元，用去一些錢買橡皮擦，爸爸再給小君12元，小君現有46元，請問買橡皮擦用去多少錢？	小君有57元，爸爸給小君12元後，小君買橡皮擦用去一些錢，小君現在有46元，請問買橡皮擦用去多少錢？

將兩步驟問題中各個改變事件，分別用單一步驟的基本改變類型來分析，結果量未知的兩步驟問題，其第一及第二改變事件，皆為單一步驟的結果量未知問題（如改變 1、2）；第一事件未知型題目，其第一事件為改變量未知問題（如改變 3、4），其第二事件為起始量未知問題（如改變 5、6）；而第二事件未知型題目，其第一事件為結果量未知問題（如改變 1、2），其第二事件為改變量未知問題（如改變 3、4）。

研究中曾發現，學童在開始學習加減問題時，常按照题目的描述，演出問題目數量改變的狀態，如果不能順利地演出，則造成解題的困難 (Briars & Larkin, 1984; Carpenter, 1985)；學童解題的歷程亦常受命題次序的影響，當题目中命題的次序（或時間次序）與解題時的運算次序不同時，會造成學童解題的困難 (Choen & Stover, 1981; Rosenthal & Resnick, 1974)。

如果學童模擬問題中的活動，來理解問題，則其解題歷程受命題次序的影響，在兩步驟改變問題中，遇到結果量未知問題第二改變事件改變量未知問題時，學童皆可以運用解決單一步驟問題的能力，順利地先發現第一改變事件後的結果狀態，再進行推論第二改變事件的結果量或改變量，但遇到第一改變事件改變量未知問題時，則因第一改變事件中的改變量及結果量均為未知，而無法繼續進行解題。

但是如果學童已發展出「部份—整體」的分析能力，此能力亦可應用於兩步驟問題情境，先分析已知量與未知量間的「部份—整體」關係，再決定運算方式，例如表 6 中的第一事件未知題，「小君現有 46 元」，是「爸爸給的 12 元」以及「小君買橡皮擦後剩下的錢」的整體，而「小君原有的 57 元」，是「橡皮擦的價錢」與「小君買橡皮擦之後剩下的錢」的整體，透過兩個「部份—整體」關係的分析，即可選擇正確的運算方式，同樣地，在分析表 6 中的第二事件未知題時，「小君原有的 57 元」「爸爸給的 12 元」是「爸爸給小君錢後，小君擁有的錢數」的部份，而「橡皮擦的價錢」與「小君現有的 46 元」，亦是「爸爸給小君錢後，小君擁有的錢數」的部份。在「部份—整體」的分析中，解題者重視各數量間的「部份—整體」關係，而非特殊改變事件的發生次序，因此應不受命題次序的影響。

本實驗對三、四年級學童進行團體測試，來描述學童解決「結果量未知」及「改變量未知」兩步驟問題的能力。針對改變量未知型的題目，運用交互設計 (switch design)，探討問題中的命題次序對學童解題的影響以描述三、四年級學童加減概念的發展。本實驗對學童的解題過程及答案，加以記錄與分類，以探討學童的錯誤類型。

研究方法

受試者

本研究以國民小學三、四年級學童為受試，在台北市的四所國民小學三、四年級中，各抽取兩個班級，再以每個班級中半數的學童為受試，在學年的第一學期的最後一個月中，進行測試，共有三年級男生 77 名，女生 82 名，四年級男生 87 名，女生 73 名接受測試，其中一名三年級男生的作答不宜採信，予以排除。因此，三年級男生最後人數 76 名。

工具

每份題本包含 12 題兩步驟改變類型應用題。12 題兩步驟改變類型應用題分為兩大類型：結果量未知型及改變量未知型，結果量未知型題目有四題；改變量未知型題目有八題，分為甲、乙兩組。

本實驗有 A、B 兩種題本。A 題本與 B 題本皆採用相同的結果量未知型題目。而改變量未知題目，在 A、B 題本中採交互安排方式，改變量未知甲組題目，在 A 題本中為第一事件未知型題目，在 B 題本中則為第二事件未知型題目；改變量未知乙組題目，在 A 題本中為第二事件未知型題目，在 B 題本中，則為第一事件未知型題目。每份題本中，皆分為上、下兩個區組，每個區組中有 6 題，在每個區組中，均先呈現結果量未知型題目 2 題，再將改變量未知甲、乙組的各 2 題，以拉丁方格設計，安排題目順序，以避免題目順序干擾命題次序的效果，所有問題的情境、數字的控制及題本的安排皆與實驗一相同。

實驗程序

本實驗以班級為區組，施行區組化隨機分配程序，在施行過程中，首先將本實驗的 A、B 兩種題本以及另一實驗的兩份題本，以區組隨機方式安排次序，加以編號，進入班級後，按題本編號，依著學童座位次序分發，此種安排使得每個班級內，使用 A、B 題本的人數相當，而且各個學童採用何種題本，是經過隨機分配的程序。

本實驗利用學童平時上課時間施測。十二位政大心理系所學生擔任測試的主試和襄試，主試者的訓練與施測的程序與實驗一相同。

反應類型分類

為了進一步地分析學童的錯誤，本實驗將學童在題本上的反應，分為九種類型。在分類時，「學童如何解決問題？」為主要的分類指標，首先注重學童是否選擇了正確的解題過程（運算及數字），再分辨學童是否得到正確的答案，如果學童的解

題過程已呈現錯誤，則以此錯誤為分類的依據，而不重視計算或其他的疏忽。

學童九種反應類型為：(1)正確反應；(2)抄錄錯誤：學童從題目抄到算式上及算式抄到算式，有任何一個數字抄錯；或計算正確，而寫入答案時，把數字抄錯；(3)計算錯誤；(4)數字錯誤：學童以題目所給的數字為答案；(5)選用錯誤運算；(6)單一步驟錯誤：學童完成正確運算中的一個步驟，但未完成兩步驟運算；(7)單一步驟且選用錯誤運算：學童選用單一運算，且此運算並未反應該運算中數字的關係；(8)未作答；以及(9)其他。

結 果

年級、題目類型、與命題分次序對學童解題的影響

本實驗使用 $2(\text{年級}) \times 2(\text{題本}) \times 3(\text{題組})$ 三因子變異數分析進行考驗，年級與題本皆為受試間變項，而題組為受試內變項。與實驗一相同，本實驗採用交互設計，部份的題本與題組的交互作用，將用來考驗命題次序對學童解題的影響，並且本實驗側重於描述各個年級學童的解題能力，因此採用簡單交互作用效果的分析方式，在各年級內，考驗題本與題組的交互作用，而不討論三因子的交互作用。

表 7 呈現學童在各類問題上答對題數的平均數與標準差，根據變異數分析，整體而言，四年級學童答對較多的問題， $F(1,314) = 20.60$ ， $MSe = 2.10$ ， $p > .01$ ；兩份題本並未造成顯著的差異， $F(1,314) = 3.22$ ， $MSe = 2.10$ ， $p > .05$ ，年級與題本的交互作用亦不達顯著水準， $F(1,314) = 1.18$ ， $MSe = 2.10$ ， $p > .05$ ，顯示兩份題本的難度相當，在各年級內，使用 A、B 題本的學童，具有相同的解題能力。

表 7 三、四年級學童在各類型題目上的平均數和標準差

	三 年 級		四 年 級	
	A 題 本 n=79	B 題 本 n=79	A 題 本 n=79	B 題 本 n=81
結果量未知型	3.43 (0.81)	3.46 (0.92)	3.71 (0.68)	3.64 (0.73)
改變量未知型 甲組	第一事件 1.65 (1.39)	第二事件 2.57 (1.27)	第一事件 2.43 (1.09)	第二事件 2.89 (0.99)
改變量未知型 乙組	第二事件 2.28 (1.28)	第一事件 2.14 (1.27)	第二事件 2.80 (1.14)	第一事件 2.60 (0.96)

題組的主要效果達顯著水準， $F(2,628) = 210.65$ ， $MSe = .66$ ， $p < .01$ ，經由薛費氏事後比較，發現：結果量未知型題目答對的題數顯著地高於改變量未知型的問題， $\underline{S} = 20.43$ ， $p < .01$ ；而改變量未知型問題中，甲、乙兩組題目並無顯著的差異， $\underline{S} = 1.10$ ， $p > .05$ ；年級與題組間的交互作用亦達顯著水準， $F(2,628) = 3.50$ ， $MSe = .66$ ， $p < .05$ ，經由薛費氏事後比較，發現：三年級學童答對結果量未知型與改變量未知型題數的差異，顯著地高於四年級學童， $\underline{S} = 2.59$ ， $p < .05$ ，而改變量未知型甲、乙兩組題目間的差異，在三、四年級皆相同， $\underline{S} = .46$ ， $p > .05$ 。這些結果顯示，在改變量未知型題目中，甲、乙兩組題目的難度，十分相當；改變量未知型的題目較結果量未知型題目困難，而且改變量未知型題目造成三年級學童更多的困擾。

在三年級的學童中，題本與題組間有顯著交互作用， $F(2,628) = 19.71$ ， $MSe = .66$ ， $p < .01$ ，經由薛費氏事後比較，發現：結果量未知型與改變量未知型題目難度的差異，在 A、B 兩題本上相當， $\underline{S} = 2.27$ ， $p > .05$ ，但是在改變量未知型題目中，題組與題本有顯著的無次序性交互作用， $\underline{S} = 5.80$ ， $p < .01$ ，在題目設計時，A 題本中的改變量未知型甲組為第一事件未知型題目，乙組為第二事件未知型題目，而 B 題本採相反的安排，甲組為第二事件未知型題目，乙組為第一事件未知型題目，因此在改變量未知型題目內，題組與題本的無次序性交互作用，顯示三年級學童在解決改變量未知的兩步驟問題時，命題次序影響題目的難度，第一事件改變量未知型題目較第二事件改變量未知型題目困難。

四年級學童的表現與三年級學童相似，題組與題本對四年級學童答對題數，有顯著的交互作用， $F(2,628) = 7.19$ ， $MSe = .66$ ， $p < .01$ ，經由薛費氏事後比較，結果未知型與改變量未知型題目的難度差異，在 A、B 兩題本上相當， $\underline{S} = 1.27$ ， $p > .05$ ，而在改變量未知型題目中，題組與題本有顯著地無次序性交互作用， $\underline{S} = 3.63$ ， $p < .01$ ，顯示在改變量未知型題目中，命題的次序影響學童的解題活動，對四年級學童而言，第一事件改變量未知型題目較第二事件改變量未知型題目困難。

學童在各種類型問題上的答對率及錯誤類型

在六種改變類型單一步驟問題中，依據語意分析，改變 1、3、5 三種類型為數量增加的事件情境，而改變 2、4、6 三種類型為數量減少的事件情境，本實驗混合各種類型問題，編制成 12 種兩步驟題目，分為結果量未知、第一事件改變量未知、及第二事件改變量未知三種兩步驟問題類型。為了進一步地探討各種類型應用題的難度，以及學童的錯誤原因，本實驗以問題為分析單位，綜合學童在 A、B 兩題

本上的反應，計算各個類型應用題答對的百分率（見表 8）。

表 8 各種類型題目之通過率

		三年級 n=158	四年級 n=160
結果量未知型	改變 1 加改變 1	87.34	89.38
	改變 1 加改變 2	84.18	95.00
	改變 2 加改變 1	82.28	88.13
	改變 2 加改變 2	90.51	95.00
第二事件未知型	改變 1 加改變 3	58.86	72.50
	改變 1 加改變 4	66.46	75.00
	改變 2 加改變 3	55.70	50.63
	改變 2 加改變 4	61.39	86.25
第一事件未知型	改變 3 加改變 5	50.00	73.13
	改變 3 加改變 6	34.81	41.88
	改變 4 加改變 5	40.51	51.88
	改變 4 加改變 6	63.92	85.00

在結果量未知的題目中，三、四年級學童在各個問題上的答對率均超過 80%，當題目中混合數量增加與減少的情境時（如改變 1+ 改變 2；改變 2+ 改變 1），似乎造成三年級學童較多的困難。第二事件未知型題目為較困難的，三、四年級學童的答對率分別為 60% 與 71%，觀察各個問題上的答對率，發現如果題目中含有改變 3 的問題，對學童的解題造成較多的困難。第一事件改變量未知型問題是最困難的，三、四年級學童的答對率，分別下降為 47% 與 63%，而當題目中混合數量增加與減少的情境時（如改變 3+ 改變 6；改變 4+ 改變 5），似乎造成更多的困難。

觀察學童的反應類型，三年級學童主要的錯誤有兩種：一種為選用兩步驟運算，但是在其中選擇了錯誤的運算，在各類題目上，皆有 30% 的錯誤屬於此種類型；另一種錯誤為將問題簡化，只選用單一運算來解決問題，在結果量未知題上，有 20% 的錯誤屬於此類，而在改變量未知問題上，有 30% 以上的錯誤屬於此類。相對地，四年級學童的錯誤有些不同，他（她）們的主要錯誤在選擇錯誤的運算，在結果量未知題中，約有 30% 的錯誤反應屬於此種類型，而在改變量未知題中，此種錯誤佔 60% 左右；四年級學童較少使用單一運算來解決問題，此類反應佔錯誤的 10% 以下。

討 論

結果量未知問題，是學童最先能掌握的問題，在解此類問題中，學童只要依據題目的描述，模擬問題中的活動，即能決定方便於計算的運算方式，並不必然須採用「部份—整體」的分析；學童雖然可以模擬問題中的活動，來解決第二事件未知題中的第一步驟，但其在模擬完第一改變事件之後，並不能繼續模擬第二改變事件，以決定方便計算的運算方式，而在第一事件未知型題中，第一改變事件中有兩個未知量，學童無法模擬活動，來決定運算，是否易於模擬問題中的活動，可能是造成此三類問題難度差別的原因。

第一事件改變量未知與第二事件改變量未知是數學上同構的問題，但第一事件改變量未知問題造成較多的困難，顯示中年級學童在解題時，仍相當地依賴題目的呈現方式，學童在理解題意時，並不能將兩次改變事件的次序，予以前後對調；部份學童在此時並不瞭解：將改變事件次序調整後，並不影響已知量及未知量間的關係。

學童分析「部份—整體」關係的能力，可以延用至兩步驟的問題中，解題者可以建構一個隱含元素，再重複地進行兩次「部份—整體」分析，來理解題意，建構隱含元素及重覆進行「部份—整體」分析，也許是造成學童解決兩步驟問題困難的原因，但是這個差別並不能解釋為何學童在結果量未知兩步驟問題上的答對率高於改變量未知兩步驟問題，亦不能解釋為何在改變量未知問題中，命題的次序影響學童表現的現象，換言之，如果三、四年級學童已具備「部份—整體」的分析能力，而他（她）們在實驗二的結果量未知兩步驟問題上，已顯示建構隱含元素及重覆進行分析的能力，那麼改變量未知的兩步驟問題不應造成太多的困難，命題的次序亦不應造成表現的差異，而實驗二的結果與此預測相違背，顯示部份三、四年級的學童尚未建立「部份—整體」的分析能力。

結 論

本研究透過兩個實驗，來探討及描述中年級學童加減概念的理解，實驗一探討三、四年級學童解決多餘資訊問題的能力；實驗二探討三、四年級學童解決兩步驟問題的能力。一般而言，在各個實驗所測試的能力上，年級高的學童皆具有比較優異的表現。

實驗一顯示：三、四年級學童皆會受到多餘資訊的干擾，不論是簡單（結果量未知）或複雜（改變量或起始量未知）類型的題目，學童在無多餘資訊題上的表現優於多餘資訊題。多餘資訊問題的錯誤，大多與多餘的數字資訊有關，學童或選擇錯誤的數字進行運算，或進行多餘步驟的運算。

實驗二顯示：改變量未知型的兩步驟問題較結果量未知的兩步驟問題困難，而且改變量未知型題目造成三年級學童更多的困擾；三、四年級學童在面臨改變量未知問題時，命題次序影響題目的難度，第一事件改變量未知型問題較第二事件改變量未知型問題困難。三年級學童的錯誤分為兩種，或選擇錯誤的運算，或將問題簡化，使用單一運算來解題；四年級學童的錯誤多為選擇錯誤的運算，而較少使用單一運算來解題。

綜合兩個實驗的結果，發現中年級的學童多能掌握單一步驟無多餘資訊的改變問題，亦能解決結果量未知型的兩步驟改變問題，在改變量未知及起始量未知的問題中，多餘資訊增加解題的困境，而改變量未知的兩步驟問題是最困難的問題，研究結果顯示：學童能夠解決單一步驟的問題時，並不必然能應用此能力來解決多步驟的問題。

在多餘資訊及兩步驟問題中，來檢驗六種基本改變問題情境的難度時，和以往的研究相似，學童最先能掌握的是結果量未知情境，其次為改變量未知情境，起始量未知的情境最為困難。更進一步地，本研究與蔣治邦和鍾思嘉(1991)的發現相似，學童在改變3及改變5的增加情境中，會遭遇較改變4及改變6更多的困難。為何學童會有如此表現，需要更進一步的分析與探索。

雖然多數的學童能解決單一步驟無多餘資訊問題，但是由於他們在多餘資訊及兩步驟問題上的表現，顯示部份學童尚未發展出「部份—整體」的分析能力，他（她）們不能分析題目中已知量及未知量間的關係，或運用已知量與未知量的關係來決定運算方式，此部分學童尚依賴題目中活動的描述，來理解題意。當題目有多餘資訊，則破壞了對已知量與未知量關係的掌握；當轉譯兩步驟題目中的活動，不能直

接產生方便於計算的運算方式，而需要重新整合題意時，亦破壞了他（她）們已知量與未知量關係的掌握，而產生錯誤的解題。

在加減運算概念的教學中，能夠執行加減計算，是教學的目標之一，但是發展學童對加減運算意義的掌握，應是更重要的目標。加減運算的意義在於掌握運算中各個數量間的關係；同樣地，學童需要發展分析問題的能力，掌握應用問題中各個數量間的關係，然後選用對應的運算來解決問題。因此在應用問題的教學過程中，教師宜首先應詢問學童題目中各已知量與未知量的關係為何。透過重述問題的方式，培養學童理解題意的變通性，能夠採用不同的方式來重述問題，澄清問題中各數量間的關係，理解已知量與未知量的關係後，再選擇解題的運算，學童在此種狀況下，才能真正的掌握合理的解題過程。

謝 辭

感謝國科會計劃 (NSC 81-0301-H004-14) 的支持，戴寶蓮校長以及台北市華江、懷生、西松、興隆、萬芳、東園、武功、敦化國小師生的合作與辛勞。

參考文獻

1. 王逸文，(1984)，「台北市幼稚園兒童解答簡單算術故事問題能力及其相關因素的研究」，中國文化大學兒童福利研究所未發表之碩士論文。
2. 吳昭容，(1990)，「圖示對國小學童解數學應用題之影響」，國立台灣大學心理學研究所未發表之獨立研究。
3. 呂玉琴，(譯)，(1988)，加、減法文字題的分類、解題策略及影響因素，「國民教育」，卷 28，17-29。
4. 林碧珍，(1989)，「國小學生數學解題的表現及其相關因素的研究」，國立師範大學數學研究所未發展之碩士論文。
5. 翁嘉英、鄭昭明，(1988)，國小兒童解數學應用題的認知歷程，見梁雲霞主編：「七十七年國小課程研究學術研討會專輯」，台北縣：台灣省國民學校教師研習會。
6. 楊美伶、蔣治邦，(1992)，國民小學數學科加減法教材關鍵字之分析研究，「國教學報」，4 期，109-128。
7. 葉雪梅，(1980)，「國小兒童對比較類應用問題的解題行為」，國立政治大學教育研究所未發表之碩士論文。

8. 蔣治邦、鍾思嘉，(1991)，低年級學童加減概念的發展，「教育心理與研究」，14期，35-68。
 9. 謝毅興，(1991)，「國小兒童解數學應用問題的策略」，國立台灣大學心理學研究所未發表之碩士論文。
 10. Briars, D. J., & Larkin, J. G. (1984). An integrated model of skills in solving elementary word problems. *Cognition and Instruction*, 1, 245-296.
 11. Carpenter, T. P. (1985). Learning to add and subtract: An exercises in problem solving. In E. A. Silver (Ed.). *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 17-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlba Associates.
 12. Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skill. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Eds.). *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp.9-24). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
 13. DeCorte, E., & Verschaffel, L. (1981). Children's solution processes in elementary arithmetics problems: Analysis and improvement. *Journal of Educational Psychology*, 73, 765-779.
 14. Kameenui, E. J., & Grittin, C. C. (1989). The national crisis in verbal problem solving in mathematics: A Proposal for examining the role of basal mathematics programs. *The Elementary School Journal*, 89, 575-593.
 15. Kintsch, W., & Greeno, J. G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, 92, 109-129.
 16. Lesh, R., & Landau, M. (1983). Conceptual models and applied mathematical problem-solving research. IN R. Lesh & M. Landau (Ed.). *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp.263-343). New York: Academic.
 17. Mayer, R. E. (1987). *Educational psychology: A cognitive approach*. Boston: Little, Brown, and Company.
 18. Nesher, P. (1986). Three determinants of difficulty in verbal arithmetic
-

- problems. *Educational Studies in Mathematics*, 7, 369–388.
19. Nesher, P., Greeno, J. G., & Riley, M. S. (1982). The development of semantic categories for addition and subtraction. *Educational Studies in Mathematics*, 13, 373–394.
 20. Nesher, P. & HersHKovitz, S. (1991). Two-step problems – Research findings. In F. Furinghetti (Ed.). *Proceedings of fifteenth PME conference* (Vol., pp.65–71). Italy: Program committee of the 15th PME Conference.
 21. Paige, J. M., & Simon, H. A. (1966). Cognitive processes in solving algebra word problems. In B. Klainmuntz (Ed.). *Problem solving: Research method, and theory* (pp.51–119). New York: Wiley.
 22. Ploya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University.
 23. Reys, R. E., Suydam, M. N., & Lindquist, M. M. (1984). Focusing on problem solving. In R. E. Reys, M. N. Suydam, & M. M. Lindquist (Eds.). *Helping children learn mathematics* (pp.21–26). Englewood Cleffs, NJ: Prentice–Hall.
 24. Riley, M. S., Greeno, J. G., & Heller, J. I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H. P. Ginsburg (Ed.). *The development of mathematical thinking* (pp.153–196) New York: Academic Press.
 25. Robinson, C. S. & Hayes, J. R. (1978). Mathematical reasoning: Making inferences about relevance in understanding problems. In R. Revlin & R. E. Mayer (Eds.). *Human reasoning* (pp.195–206). New York: John, Wiley, & Sons.
 26. Rosenthal, D. J. A., & Resnick, L. B. (1974). Children's solution processes in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology*, 66, 817–825.
 27. Sherrill, J. M. (1983). Solving textbook mathematical word problems. *The Alberta Journal of Educational Research*, 29, 140–152.
 28. Silver, E. A. (Ed.). (1985). *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum

Associates.

29. Silver, E. A., & Thompson, A. G. (1984). Research perspectives on problem solving in elementary school mathematics. *The Elementary School Journal*, 84, 529-545.
30. Skemp, R. R. (1971). *The psychology of learning mathematics*. Harmondsworth, England: Penguin.

Children's Abilities in Solving Addition and Subtraction Word Problems in Third and Fourth Grades: Multi-Step Problems and Problems with Superfluous Information

Chi-Pang, Chiang

National Chengchi University

Abstract

With two experiments, this study was to explore children's concepts of addition and subtraction in solving word problems. In Experiment 1, single step change problems were given to 314 3rd and 4th graders. It was to describe children's abilities in solving single step problems, as well as to explore the effects of superfluous information on children's solution. Two-step change problems were given to 318 3rd and 4th graders in Experiment 2. It was to describe children's abilities in solving two-step problems, as well as to explore the effects of order of problem statements on children's solution.

In general, children at higher grade levels performed better on tests across two experiments. In Experiment 1, the performance of both 3rd and 4th graders was affected by superfluous information. In Experiment 2, children have shown a better performance on the result unknown problems rather than the change unknown problems. In change unknown problem, switching the statements of change events would affect the place of unknown in the problem. Children performed worse when the unknown was the quantity of change about the first change event rather than when the unknown was about the second change event. The results are discussed to reveal children's understanding of part-whole relationship and their flexibilities in comprehending word problems.

Key Words: concept of addition and subtraction, problem solving.