



分數啓蒙的學習與教學之發展性研究

林福來¹ 黃敏晃² 呂玉琴³

¹ 國立台灣師範大學 數學系

² 國立台灣大學 數學系

³ 國立台北師範學院 數理教育系

(投稿日期：85年8月24日，接受日期：85年9月21日)

摘要：本文探討學生學習分數的先備知識，並進行分數啓蒙的教學實驗，以檢驗學生在良好的學習環境中，可能的學習區。

分數概念的先備知識研究是利用一對一半結構式面談法，提供實物，給25位在學校未學過分數的國小二年級學生操作。根據其表現，得知90%以上學生都已具備的能力包括：數數，將偶數個離散物二等分，並且已有使用一半、公平、平分等語詞的生活經驗。

分數啓蒙教學的教案設計依據，包括對學生先備知識的了解，診斷教學原理及現實的數學教育之教學原則。教案設計重點包括選擇生活實例，人數不等的分組討論學習，是否等分的診斷，分量不變性的辨識，與操作一記錄一描述的解題活動等。

實驗教學由兩位國小教師分兩組進行，每組6堂課。教學過程全部錄影。教學後一個月，再面談所有的40位學生，面談過程全部錄音，部分錄影。

面談資料顯示，參加實驗的學生約90%能操作連續量實物的二等分、三等分、四等分，與離散量實物的二等分、三等分、四等分及五等分，能以二分之一、四分之一等分數語言描述連續量分配的結果，但奇數個離散物二等分的結果要用二分之一表達仍有困難。學生處理實物分配問題的策略相當多元化。

從實驗教學過程教師與學生的反應，顯示出許多良好的學習現象。根據診斷教學與現實的數學教育教學原則設計之教學活動，值得進一步落實。

關鍵詞：分數概念、先備知識、分數啓蒙學習、現實的數學教育、診斷教學。

壹、緒論

一、概念的啓蒙

數學學習的了解層次理論，是數學教育在認知心理學派下的一些研究結果，它從學習者的觀點說明學習的進程是依循了解層次漸進的。例如：van Hiele (Fuys *et al.*, 1984) 提出幾何思考的發展層次理論，劃分幾何思考為五個發展層次，並提出這個發展層次理論具有次序性。亦即，每個人在任何一個特定層次若要成功的發展，則他必需先擁有前一層次的各項概念與策略。英國的中學數學與科學概念研究小組 (Hart *et al.*, 1981) 則對四則運算、文字符號、分數、比例等數學概念，分別提出其了解層次。每個學生在每個數學概念的某個層次內，他要內化該層次的認知需求，才能往上一個層次發展。幾乎所有的學生的學習都是按照了解層次，依序發展。雖然數學概念了解層次的提出，告訴我們，學生應該按此了解層次學習該概念，但是在實際應用的時候，我們還需要知道學生在學習該概念之前，已經具有的先前經驗、知識，這樣，我們才能幫助學生學會該數學概念的起始層次，然後依序進入該數學概念層次的系統。

從學習者的角度看，第一印象烙印最深，數學概念啓蒙學習的好壞，影響該概念學習至深，因此，數學教育家非常重視數學概念的啓蒙，並且一直積極在探索概念如何啓蒙。例如：Rissland (1985) 以起始例 (Start-up examples) 來表達初學該數學概念者應最早接觸也是較易了解的例題。Tall (1986) 則認為應該提供初學者具有能代表該數學概念的不變性的例子，學生可以在這個例子的基礎上發展該數學概念。他稱此種例子為生成例 (Generic examples)。Streefland (1991) 認為教學時應以實例作為學生形成數學知識進程中的啓蒙之源，同時，也是在獲得知識之後再回頭應用的問題領域。由於數學概念的啓蒙學習，需要銜接學生在正式學習此概念之前所具有的先備知識，而此先備知識有時候以非形式化知識 (Informal knowledge) 來說明。因此，有關學生正式學習某特定數學概念前，已具有那些和該概念有關的非形式化知識的研究，亦開始受到數學教育界的重視。例如：Dassa *et al.*, (1989) 在探討 30 個幼稚園小朋友，具備那些與正整數概念有關的非形式化的知識；Beatlys *et al.*, (1990) 透過面談幼稚園及國小一、二年級的九位學生來了解孩童具備那些非形式化的乘法知識；而 Streefland

et al., (1992) 則探討學生的百分率的非形式化知識。

二、現行分數啟蒙的教學與學習問題

台灣國民小學數學課程安排，二年級下學期開始學習分數，而教材中僅介紹二分之一與四分之一。基於考試題目不能超過教材範圍的大原則，二年級學生所面對的數學問題之答案就一定是 $1/2$ 與 $1/4$ 中的一個，有些教師們抓住這一要點後，就直接傳授給學生如何將每一道分數問題視為二選一的選擇題的選答技巧。這顯示，部份教師的教學完全著重在如何幫助學生應付考試，爲了讓學生考試時得到好成績，不惜發展各種應付的偏方，學生則在不自覺中記憶這些偏方（林福來等，1993）。

在分數學習的教材中，常常會出現問學生「斜線部分占全部的多少」的問題。因此，部分國小二年級教師就教學生將斜線部份看做一份，把它當作測量單位，來數數看全部有幾個單位。這種策略對於解單位分數的問題，非常有效，但是碰到像五分之二的分數問題，如果學生將斜線部分看成一份時，就沒辦法數出全部是幾份。因此，這種學生必須放棄此種解題策略，學習使用另一種方法，才有可能學會三年級的眞分數教材。亦即，學生在二年級學到的應付考試的偏方，或以斜線部分當單位量的解題策略，在經過一個暑假之後，面對新的學習內容時，就已經失效了。

上述研究發現顯示台灣國小分數啟蒙的教學問題至少有二：教師爲了幫助學生應付考試，發展解題偏方；教不具發展性的解題策略。分數啟蒙的學習問題也有二：學生短暫的記憶解題偏方；國小二、三年級學生使用不同的解題策略來應付單位分數與眞分數的學習，概念學習不具發展性。

分數概念啟蒙教學的不適當，並不是只有出現在台灣的國小數學教學中。這是一個世界性的問題。例如：荷蘭 (Streefland, 1991; Streefland *et al.*, 1992) 的傳統教學往往以極少數的教具、模型就期望學生發展分數概念；問題的情境往往是虛擬的、很簡略，與眞實脫節；學生在校外經歷的零碎、非形式化的分數經驗，全部被忽略；分數教材分散安排，其間的內部連結不良等。巴西 (Carraher, 1991) 常見的是以個數分別配分子與分母的教學活動，讓學生失去分數是相對大小的想法；其啟蒙教材強調分數的「測量」意義，可是學生面對的卻是無意義的符號，如 $2/3$ 倍，學生怎麼測呢？一般分數問題，一個分數往往同時具有「運

算」與「測量」的意義，學生無法同時掌握時，自然助長分數計算規則的記憶，學生往往沒有思考兩量的相對大小關係的需求。

因分數概念與小數、百分率、比、除法等概念關係密切，而這些概念不但是數學中的重要概念，且在國小數學教材中占相當份量（國立編譯館，1993）；分數概念的學習，是學生第一次學習數學中有關兩個量的相對比較關係，它含有很多的子概念，如：單位量概念、等分概念……；又，分數概念有許多不同的意義，如：部分／全部的意義、子集／集合的意義、是數線上的一個數值——數……等。由於學生在分數概念的學習上有諸多困難（呂玉琴，1991），因此，分數概念啓蒙的學習與教學問題仍是值得探討的議題。

三、待研究的問題

分數概念啓蒙的學習與教學所要探究的問題包括：

1. 學生在正式學習分數概念之前，已經具備那些與分數概念有關的先備知識？
2. 如何配合學生的先備知識，設計適當的教學活動，讓學生能順利的發展其分數概念？
3. 學生在分數概念啓蒙的良好學習環境中，其分數概念的可能學習區域有多大？

本文共計伍章：第壹章爲導論，說明概念啓蒙研究的必要性與研究取向、分數概念啓蒙的學習與教學問題及待研究的問題；第貳章首先探討分數研究文獻中跟啓蒙較相關的部分。再談如何探討學生分數概念的先備知識、最初等的二分之一概念之不完備、分數啓蒙學習的概念可能學習區域；第參章說明如何利用學生分數概念的先備知識、診斷教學原理、及現實數學教育的教學原則來設計分數概念啓蒙的教學活動；第肆章說明學生經過分數概念啓蒙的學習後，其分數概念的成長；第伍章則針對研究結果提出討論與建議。

貳、學生分數概念的先備知識

曾經問一個五歲的資優兒童「這裏有一個蘋果、一根香蕉，你能不能拿這些水果的二分之一給我？」。這個資優兒童說「可以啊！給你半個蘋果和半根香蕉，不過，如果要分的更公平的話，把它們打成果汁，再給你一半的果汁會更公

平」。這個案例讓我們看到還沒有正式學過分數概念的他，對分數概念的了解很透徹。例如：能處理異質物的二分之一的問題、對單位量的掌握亦很清楚、能連結一半與二分之一的關係、能適當的使用「半個」的生活語言……等。

也曾經以「請給我這些海苔（3片）的二分之一」來問國小二年級的學生。有一個學生給我和他自己各1片，第3片放置一旁。另一個學生則是給我2片，他自己1片。這個案例中的第一個學生無法掌握單位量，第二個學生則是缺乏等分的概念。

二分之一是形式化分數概念的起點，因此，學生分數概念的先備知識，最主要就是在探討其對「一半」的了解。由於大部分的學生在生活中都有分東西的經驗，當然也伴隨著其分東西的策略，同時，學生大都使用過「一半」、「公平」、「平分」等生活語言，再根據上面這兩個案例的提示，我們將分數概念的先備知識從單位量概念、等分概念、分數語言與其相關的語言、及學生解分數問題的初等解題策略等方面，來探討學生對「二分之一」與「一半」概念的了解。首先，對上述這四方面的知識做文獻探討，再談如何探討學生分數概念的先備知識。

一、文獻探討

（一）單位量概念

1. 學生傾向於自我假設在同一情境中出現的各個分數具有相同的單位量。

Hart (1981) 曾以下列問題來了解學生解分數問題時，是否能考慮到不同單位量對解題的影響，結果發現僅有 1.6% 的 12 歲學生能正確的、完整的回答；有 41.5% 的學生認為不可能，因為 $\frac{1}{2}$ 比 $\frac{1}{4}$ 大。同樣的問題，楊壬孝 (1988) 發現台灣的 11、12 歲學生分別只有 3%、15% 答對。

小英將她零用錢的 $\frac{1}{4}$ 買糖果，建國將他零用錢的 $\frac{1}{2}$ 買糖果。請問小英可能比建國花的錢多嗎？請說明理由！

2. 資訊量超過學生的處理能力時，學生會配合其處理能力，自行更改單位量。

Figueras (1989) 發現學生解「給四堆橘子，圈出其中二堆中的一部分，問圈起來的橘子占全部的多少？」時，部分學生誤以為圈起來的這二堆橘

子的總個數即單位量，忽略了四堆橘子的總個數才是單位量。

(二)等分概念

學生往往不會主動辨認是否等分。

Bergeron *et al.*, (1987) 發現大部分的國小三年級學生在處理分數板的問題時，只注意到分數板被分割成幾塊，而沒有注意到分割的每一塊是否相等。因此對於像 \oplus 的分割也認為分數板上不同大小的每一塊都是 $1/6$ 。

(三)分數符號與相關語言

1. 學生視幾分之幾的「分」為動詞

分數是一個過程概念 (Process concept)。當處理分數問題時，必須經過一個分的活動才能獲得分量，也才能進一步的討論分量與單位量的關係。學生在分數概念的發展初期，其認知常常停留在分的活動上，此類學生常以完成分東西的動作當成滿足點，而不會將分完的東西與單位量相關聯。亦即，學生只學到分的過程，而沒有學到兩量相對比較的關係。例如：楊壬孝 (1988) 發現要台灣國小五年級學生圈出 12 個彈珠的 $1/3$ 時，有 17 % 的學生是圈 3 個或把 12 個彈珠分成每 3 個一堆。

2. 學生視分數符號中的分子、分母為獨立自然數系

楊壬孝 (1988)、Figueras (1989) 發現部分學生將分數視為是分子、分母的獨立自然數的組合，並用此想法來解題，此種學生的解題錯誤類型主要有三：

- ①處理分數問題時，一定要找到表示分子、分母的物品數。例如：學生解決從 28 塊磚塊中，著色其中的 $1/7$ 的分數問題時，學生先圈出 7 塊磚塊，再從 7 塊中圈出 1 塊。
- ②學生處理分數問題時，只考慮問題中的分子。例如：要學生在等分成 6 塊的正六邊形中，著色其中的 $2/3$ 時，學生只塗 2 塊。
- ③學生處理分數問題時，只考慮問題中的分母。例如：學生解決從 8 朵花中，圈出其中的四分之三的分數問題時，學生圈了 4 朵。

(四)思考與解題策略

大部分的學生運用直觀思考來處理連續量的等分問題。

兒童在未達到「符號表徵」的認知方式前，大多是採直觀的認知方式 (Bruner, 1973)。學生判斷連續量等分的方法有視覺的約估及對折或折成 3

份、4份等（Freudental, 1983，第139頁），視覺的約估就是一種直觀思考的表現。

二、研究方法與研究工具

以一對一半結構式面談法，來探討學生具有那些與分數概念有關的先備知識。

被面談的學生為25位未在學校正式學過分數概念的國小二年級學生。這25位學生中，完全沒有作名詞解說就面談的學生有13人，另外12人是先做10分鐘的二分之一的名詞解說後再面談。名詞解說的目的是在作「一半」與「二分之一」的語言銜接。

面談時，研究者提供實物並口述問題後，由學生操作實物並說明理由。以學生要學的內容當問題來面談，若學生無法解題時，再以回溯的方式來了解學生分數概念的先備知識。亦即，在使用「二分之一」的語言提問後，若學生不會，則改用「一半」的語言提問。在探討學生對二分之一概念的抽象思考時，先口述問題，若學生回答錯誤後，再出示實物並重述問題。

被面談的學生由其任課教師挑選，上、中、下程度約各占1/3。

除了上述這25位學生外，也面談一些只學過二年級分數啟蒙概念的國小三年級學生以了解其學習情形。

面談工具的設計：欲了解下列因素對學生二分之一概念的影響：1.連續量的等分性。2.離散量個數的多寡或奇偶數個。3.試題變因不只一個。並想知道學生是否能做二分之一概念的抽象思考。面談問題如下：

1.連續量的等分性

①實物：一片圓形餅乾，切成大小不相等的兩塊。

問題：（拿起其中的一塊）請問這塊餅乾是不是這些餅乾的二分之一？

②實物：一片長方形餅乾，切成大小相等的兩塊。

問題：（同①）

③實物：一條粗細均勻的繩子12公分；一把剪刀。

問題：請你拿這條繩子的二分之一給我。

2.離散量個數的多寡或奇偶數個。

①實物：大小相同，顏色不同的糖果分別3個、7個、不超過10的偶數

個糖果（個數少，偶數個，欲了解學生是否會受到顏色的干擾）。

問題：請你拿這些糖果的二分之一給我。

②實物：一盒同色的圍棋子（個數多，約 150 ~ 200 個，偶數個）。

問題：請你拿這些圍棋的二分之一給我。（下列問題都類似，不再一一描述）

③實物：一片口香糖。

④實物：大小相同的 3 個柳丁，一把刀子（或一包海苔；5 片）（大於 1 的奇數個）。

3. 試題變因不只一個（實物後面括號內的變因是學生產生錯誤的主要因素）

①實物：長短不同的同質餅乾各 3 根（長短）。

②實物：上底 1 公分，下底 2 公分，高 12 公分的梯形紙條；一把剪刀（寬度）

③實物：泥土製品，長方形的底，兩端高度不同；一把刀子（高度）。

④實物：大小不同的泥球各一個；一把刀子（體積）。

⑤實物：一個柳丁，一根香蕉；一把刀子（同質性）。

⑥實物：鉛筆、原子筆各 2 枝（同質性）。

⑦實物：寬 4 公分，長分別是 4，6，10，12 公分的 4 張紙；一把剪刀（長度）。

⑧實物：4 塊正方形積木、2 塊長方形積木、2 塊三角形積木、長方形與三角形積木的體積只有正方形積木的一半（體積）。

⑨實物：寬 4 公分，長分別是 4，6，7，12 公分的 4 張紙；一把剪刀（長度）

⑦與⑨的差異在於⑨題一定要經過剪開才能分成一樣長短的兩堆，但⑦題可以不必剪開就可以拼湊成相等的兩堆。

4. 二分之一概念的抽象思考

①相同單位量，但不同分法的二分之一的比較：一樣大小的正方形讓學生用不同的方式分割後，各取一塊，再比較這 2 塊 $\frac{1}{2}$ 的正方形是否一樣大。

②不同單位量的二分之一的比較：（口述問題）如果爸爸、媽媽回家時，各買了一個蛋糕。爸爸把他的蛋糕分二分之一給你，媽媽把她的蛋糕分

二分之一給弟弟，你和弟弟吃的一樣多嗎？

三、二分之一概念的不完備

將學生的面談表現，依單位量概念、等分概念、分數符號與相關語言、思考與解題策略等因素，來描述學生二分之一概念的不完備。由於不是每一位學生都被面談到每一個問題，因此回答每個問題的學生人數不盡相同。

(一)單位量概念

1. 學生傾向於自我假設在同一情境中出現的各個分數具有相同的單位量

本研究以口述問題「如果爸爸、媽媽回家時，各買了一個蛋糕。爸爸把他的蛋糕分一半給你，媽媽把他的蛋糕分一半給弟弟，你和弟弟吃的一樣多嗎？」，而未呈現具體的蛋糕或蛋糕的圖像，來面談 9 位國小低年級的學生，發現這 9 位學生都無法考慮不同單位量對解題的影響，而認為兩個人都分到一半，應該一樣多，如案例一。（底下案例中的 T 表示面談教師，S 表示被面談的學生）

案例一：

S：因為兩個人都一半。

T：為什麼？

S：一樣多。

2. 資訊量超過學生的處理能力時，學生會配合其處理能力，自行更改單位量，或分解單位量。

面談的 31 位學生中，有 8 位學生會更改給定的單位量，使問題簡化到他有能力處理的情況。例如：給一包口香糖 5 片，要學生拿這些口香糖的 $\frac{1}{2}$ （或一半、或平分給二人），學生將這 5 片口香糖分成 2 片、2 片一堆，剩一片放置一旁不要。

另外，有的學生會將 5 片口香糖分解成 4 片和 1 片，再分別處理這 4 片和 1 片的口香糖。但是，採用這種分解單位量的學生中，有 3 個學生無法將這兩個新單位量組合成原單位量，如案例二。

案例二：

T：請給我這包海苔（5 片）的二分之一。

S：（操作：分別拿 2 片放在兩邊，再將最後一片撕成相等二份）。

T：二分之一在那裡？

S：2 片是二分之一，半片也是二分之一。

以解上述的口香糖問題為例，面談的 31 位學生中，除了有 11 位學生犯了上述更改給定的單位量或分解單位量後無法再組合的錯誤外，學生的錯誤類型尚有(二)等分概念中的「將同樣大小的離散量分成兩份，但兩份個數不一樣多」及(三)分數符號與相關語言中的「視二分之一的『分』為動詞」等，而且各有 3 位學生犯了上述的 2 種錯誤類型。

(二)等分概念

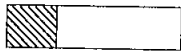
學生不具等分概念的常見錯誤類型有下列三種：

1. 將連續量分成兩份，但兩份不一樣大小。

面談的 35 位學生中，有 5 位學生無法處理連續量的一半問題，如案例三。

案例三：

T：（拿一個蛋糕）切一半給我！

S：要對準切呀！ 

T：你有對準嗎？

S：有啊！

2. 將同樣大小的離散量（個數不超過 10 個，且為偶數個）分成兩份，但兩份個數不一樣多。

面談的 36 位學生中，有 6 位無法處理離散量的一半問題，如案例四。

案例四：

T：（給 4 個白色圍棋子）你拿一半的圍棋子給我，這邊的一半。

S：（給 3 個）

3. 將不同大小的離散量分成個數相同的兩份，但總量不一樣多。

面談的 11 位學生中有 4 位學生無法處理這一類問題，如案例五。

案例五：

T：（給長短不同的同質餅乾各 3 根）這些餅乾要分一半給你，怎麼辦？

S：（給教師 3 根長的，自己拿 3 根短的）

T：為什麼這樣是一半呢？

S：因為 3 個，3 個。

(三)分數符號與相關語言

1. 學生視幾分之幾的「分」為動詞

訪談中會將 5 片海苔分成 2 堆，每堆各 2 片半的學生，不一定知道其中的 2 片半是全部海苔的 $\frac{1}{2}$ 。

2. 學生視分數符號中的分子、分母為獨立自然數系

國小二、三年級學過二分之一分數概念的學生較常犯的錯誤是受到二分之一的分母二的影響，而誤以為二分之一就是 2 個。面談的 28 位學生中，有 5 位學生犯這種錯誤，如案例六。

案例六：

T：桌上有 4 個糖果，請你給我 $\frac{1}{2}$ 。

S：（給 2 個）。

T：拿這 6 個糖果的 $\frac{1}{2}$ 給我。

S：（給 2 個）。

T：拿這 8 個糖果的 $\frac{1}{2}$ 給我。

S：（給 2 個）。

T：為什麼都是 2 個呢？

S：因為 $\frac{1}{2}$ 的下面有 2，所以 2 個。

3. 二分之一與相關語言的差異

3.1. 部分學生無法將「二分之一」與「一半」相連結

「一半」是生活的語言，「二分之一」是數學語言，因此學生處理「一半」的分數問題時具有較高的容忍範圍，而處理「二分之一」的分數問題則要求較高的精確度，如案例七。同時，學生處理「一半」的分數問題的能力優於處理「二分之一」的分數問題，如案例八。

案例七：

T：（給一個橘子，剝皮時不慎已分成二份，一份是 4 瓣大的、1 瓣小的，另一份是 6 瓣大的）。請你拿一半的橘子給我。

S：我來數數看有沒有平均，好像有點不平均，好像這個（指 6 瓣大的那一份）比較多，應該是這個（指 6 瓣大的那一份給我），好了，分好一半。

T：（給一張圓形的紙）你畫二分之一給我看。


S：（未對折，拿尺畫直線，幾乎兩塊一樣大，視覺無法分辨不同）。

T：二分之一在那裏？

S：這裏（指其中一塊）。

T：你怎麼知道這是二分之一？

S：把這個（分成）兩塊，就是二分，之一就是這一塊。

T：我現在把它分成兩塊 （指 ），這一塊是不是二分之一？

S：好像比較小。

T：那這個算不算二分之一？

S：不算。

案例八：

T：（給一張圓形的紙）你畫二分之一給我看。

S：我不會。

T：你會不會畫一半？

S：會（畫 ）。

T：一半在那裏？

S：這兩個（半圓）都一半。

3. 2. 學生處理等分問題的能力優於處理「一半」的問題

6 位不會處理偶數個離散物的「一半」問題的學生中，有 5 位會將這些離散物平分給 2 個人，如案例九。

案例九：

T：（給 6 個糖果）拿這些糖果的一半給我。

S：（給 2 個）。

T：(給 6 片口香糖)這些口香糖分給 2 個人，每人分多少？

S：3 片。

3.3. 部分學生以為半個就是一半

9 位處理偶數個離散物的「一半」問題的學生中，有 2 位學生誤以為半個就是一半，如案例十。

案例十：

T：(給 4 個糖果)拿這些糖果的一半給我。

S：(○ ○ ○ ●)(指半個)

四思考與解題策略

從學生處理分數問題的初等解題策略可以反映出學生的思考方式。未在學校正式學過分數概念的國小低年級學生在判斷實物是否等分或操作實物使其等分時，其主要的解題策略有三：

1. 約估法。

學生利用視覺來判斷二份是否相等，這種視覺的約估就是一種直觀思考的表現。這個策略通常出現在連續量或個數很多的離散量。在 25 個面談的學生中，有 19 人利用此方法解題，如案例十一。

案例十一：

T：(給一盒圍棋子)這裡有好多顆哦，我們兩人平分，你拿 $\frac{1}{2}$ ，我拿 $\frac{1}{2}$ ，你分分看吧！

S：老師一定要剛好嗎？

T：你說吧！

S：(一面從一堆圍棋子直接分成兩堆，一邊說)這一堆是我的，是 $\frac{1}{2}$ ，那一堆是你的。

2. 偶數平分法。

學生利用加法、減法、除法或加減混合的策略，來處理個數不大於 10 個的偶數個離散物的分數問題。這是一種解析思考的表現。在 25 個面談的學生中，有 22 人利用此方法解題，如案例十二。

案例十二：

T：請給我這些糖果（6個）的一半。

S：（操作：拿3個）。

T：為什麼3個是一半？

S：因為 $3 + 3 = 6$ 。

3. 對折法。

這是一種介於直觀思考與解析思考間的調合型思考方式。這個策略通常出現在分繩子或分紙的情況。在25個面談的學生中，有6人使用此方法解題。

四、分數啓蒙的概念可能學習區

將學生解面談問題時，有90%以上的學生使用的解題能力，視為學生分數概念啓蒙學習的已具備能力；低於一半甚多的學生不會解的面談問題，視為分數啓蒙的不適合的學習區域；除此之外的其他面談問題，視為學生分數啓蒙的概念可能學習區域。根據學生的面談表現得到：

1. 學生分數啓蒙前已具備的能力包括：數數能力，偶數個離散物二等分；在語言方面：擁有一半、公平、平分的生活語言；在解題策略方面：會利用偶數平分法將不大於10個，且相同大小的偶數個離散物平分成兩份。
2. 學生分數啓蒙的概念可能學習區包括：處理連續量的一半問題；相同大小的偶數個離散量的一半問題；不同大小的偶數個離散量的一半問題；餘量再分的分配問題；二分之一的分數語言的學習；及約估法、對折法。雖然主動使用對折法解題的學生不到一半，但是這並不表示學生不會這種解題策略。當提示學生對折法後，他們大都可以使用對折法將連續量分成二等分或四等分。
3. 超越分數啓蒙的題材：未呈現單位量（具體物或圖像）的情況下，學生無法主動思考單位量相同或不同的變因，所以，此類題材不適合在分數啓蒙時引入。

參、教學活動設計

對學生分數概念先備知識的了解，是分數概念啟蒙教學活動設計的先備知識。本章將說明，如何配合學生分數概念的先備知識，設計適當的教學活動，來發展其分數概念。

一、研究方法

兼採班級性實驗教學、筆測調查法、半結構式面談法、學生小組討論法及行動研究法。

根據學生正式學習分數概念之前，已經具備的非形式化的分數概念，設計教學活動進行班級性實驗教學。

以筆測調查法及半結構式面談法，來了解教學實驗後的學生的學習情況。

根據學生在實驗教學時及教學實驗後的學習困難，我們利用學生小組討論法來了解學生對某些分數相關概念的自然想法，學習困難的癥結，以及突破困難的關鍵性想法。

以行動研究法讓參與研究的國小教師親自參與設計教學活動及進行實驗教學。

二、設計分數啟蒙教學活動的預備工作

在設計分數概念啟蒙教學活動時，有兩個問題要先決定。第一個問題是以學生為中心來設計教學活動時，應考慮學生先備知識中的語言、學生初等解題策略、及學習環境佈置，但應如何切入？第二個問題是分數啟蒙學習時，除了上一章最後一節所提到的，學生分數啟蒙前已具備的能力、及概念的可能學習區所界定者外，概念中還有那些概念屬性是在概念的可能學習區內？

(一)分別以學生的語言知識、初等解題策略、與學習環境佈置為切入點的前置教學實驗

二分之一是形式化分數概念的起點，如何配合學生分數概念的先備知識，進入二分之一概念的學習，可以從三方面來看。從學生語言知識的角度來看，即如何連結一半與二分之一；從學生的初等解題策略來看，即如何利用學生的對折法、偶數平分法來進行等分活動；從學習環境佈置來看，即如何設計適當複雜的

學習環境，來促進學生發展分數概念，而不是在過份單純的環境中發展其分數概念。

根據學生正式學習分數概念之前，已經具備的先備知識，及上述的分析，我們研擬了三份分數啓蒙的診斷教學草案。這三份草案雖然各具特色，但是它們都包括要診斷學生是否具等分概念；是否認為一半就是半個、 $1/2$ 就是 2 個……等的錯誤概念。

第一份草案強調一半與二分之一的連結，其教學活動希望能讓學生了解一半是一個整體被分成兩份其中的一份；了解一半就是二分之一；能由對二分之一的了解類推至四分之一及其他的單位分數。

第二份草案是利用學生的初等解題策略來設計。因此教學活動由分連續量的過程中引出對折策略，利用對折策略進行等分活動，進而認識二分之一、四分之一、八分之一，最後再由連續量類推至離散量的分數教學。

第三份草案是佈置各種單位分數出現的自然學習環境，並將學生安排為每一小組的成員數為 2、3、4、5、6 等不同的人數，要各組學生分同樣大小的一塊蛋糕，以便引出二分之一、三分之一、……、六分之一等各種不同的單位分數，以期望學生在適當複雜的學習環境中，學會單位分數概念。

上述三份草案分別由三位國小教師進行班級教學，其中前二份草案是採全班式的討論，第三份草案則採小組討論的教學法。這三班的國小二年級學生人數分別為 54 人、53 人、40 人，教學時間共 4 節課，160 分鐘。教學日期為民國 80 年 4 月。

教學實驗二週後，以筆測的方式進行後測，十週後不但以筆測的方式進行延後測，並抽取部分學生進行面談，面談過程皆錄音並轉成書面資料，以利分析。

根據學生在教學實驗的課堂上及後測、延後測的表現發現：

1. 由學生具有的「一半」經驗入手，透過語言教學，將一半和二分之一連結起來，以建立二分之一的概念並不恰當。因為學生對一半的想法似乎全停留在「等分」，而沒有進一步想到一半和整體的關係。
2. 以學生的初等解題策略進行教案設計的教學實驗的效果並不理想。因為學生解不能用對折法處理的連續量問題的答對率，比解能用對折法處理的連續量問題的答對率低大約 20%。
3. 將全班分成每組不同人數的方式，可以自然的引出各種不同的單位分數，

教學活動的效果很好。

4. 學生在日常生活中，以「吃」最能引起學生注意到公平性。「公平」，「一樣多」是學生的自然用語，是分數概念發展的主要根源。
5. 在分蛋糕的過程中，學生的習慣用語是：分到一小塊、一塊、一份、一小份，從這些習慣用語到自然的出現分數語言是困難的。教學活動應提供更多的機會讓學生將習慣用語轉換成前置語言，如：把一塊蛋糕分成 4 等份中的 1 份；再讓學生將前置語言與分數語言相聯結。
6. 學生處理餘量再分問題的能力仍較弱。
7. 分數相對比較的意義，學生感受不強烈。因為不論是部分／全部的意義或子集／集合的意義，部分量都隱藏在單位量中，分數的部分與單位量的相對比較意義不明顯。因此，分數概念啟蒙過程中，應保持像 $\frac{1}{4}$ 塊蛋糕的說法，而不應該太早抽象化為 $\frac{1}{4}$ 。

根據上述的前三點發現，在未來的分數概念啟蒙的教案設計中，教學方式將以人數不等的小組討論的方式出現；而上述的後四點發現，是將來設計分數概念啟蒙的教學活動時應考慮的要點。同時，放棄從初等解題策略切入的構想。

(二)可能學習的概念屬性

五分之三是「五份中的三份」，學生的認知困難總停留在「五個中的三個」；相同單位量但不同分法所得的分量的不變性，需要透過量化才能獲得答案。由於學生對「份」、及「分量的不變性」具有較大的學習困難，因此，以學生小組討論法或筆測調查法，來探討其在分數概念啟蒙學習的可學習性。



1. 份的認識

是否能在分數概念啟蒙時，透過「份的認識」的教學，來幫助學生克服五分之三就是「五個中的三個」的認知障礙呢？為此，透過一組 5 人的國小二年級學生的小組討論來加以了解。

經過學生小組討論後的結果是：

- (1) 給定含異質物的一份（例如：一份牛排餐），學生能描述一份中的成份，並能同樣複製若干份。
- (2) 學生憶取生活經驗中含有異質性物品的一份，可以察覺同一份中的物品可能同質，也可能異質。

2. 分量不變性的了解

給二張一樣大的紙，不同的分法  和 ，要判斷這兩塊斜線部份是否一樣大，必需要透過量化才能獲得答案，直覺上相當困難。但是，在一次學生小組討論有關 8 條吐司如何分給 10 個人的問題中，發現學生能處理上述問題（林福來，1992）。爲了進一步了解有多少國小二年級的學生能處理「分法不同，但分得的結果還是一樣」的 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{4}$ 的問題，我們進行班級性筆測，共 157 位二年級學生參加，結果如下：

- (1) 在 $\frac{1}{2}$ 的問題中，認爲分法不同，但分得的結果還是一樣的學生占 58 %。
- (2) 在 $\frac{1}{4}$ 的問題中，認爲分法不同，但分得的結果還是一樣的學生占 49 %。

上述數據顯示大約有一半學生會解分量不變性的問題。這些學生若能經驗分量不變性的學習活動，其分數概念發展會更完備，而另一半的學生也能在同儕互動中慢慢的了解。

三、分數啓蒙教學活動的設計

根據學生概念的可能學習區；以學生爲中心的教學活動設計應以學習環境佈置爲優先；設計分數概念啓蒙的教學活動時應考慮的要點；學生對份的認識、及分量不變性的了解；並配合診斷教學理論 (Case, 1975, 1978)、現實數學教育的教學原則 (Streefland, 1991) 來發展教案，並分別於民國 81 年 4 月及民國 82 年 4 月進行二次半班的班級性實驗教學。

民國 81 年 4 月的教學實驗，分別由二位國小教師進行半班學生（20 人）的教學。教學時數共 6 節，240 分鐘，分三天進行，教學過程全程錄影。教學實驗後一個月，以一對一半結構式的面談，面談所有參與實驗的學生，面談過程皆錄音，部分兼錄影，且都翻錄成書面資料，以便分析。

根據學生在教學實驗的課堂上的表現及實驗後的面談資料，修改教案，進行民國 82 年 4 月的教學實驗。

由於民國 81 年的教學實驗的教案與民國 82 年教學實驗的教案相差不大，其主要差別是後者的教案中，要學生多做一項「記錄」的工作。因此，不描述民國 81 年的教案，而僅說明如何發展出民國 82 年的教案。

民國 82 年的教實驗分別由二位國小教師進行小班制的教學實驗，教二班學

生人數各為 24 人、16 人的國小二年級學生。共 6 節課，240 分鐘。

(一) 驗證學習現象與教學理論

分數啟蒙的教學活動是根據學生的學習現象及 Case、Streefland 的教學理論而設計的。

學生分數概念啟蒙前的認知困難主要有三：

1. 單位量的辨識不清

當沒有具體呈現單位量給學生看時，面談的 9 位國小低年級學生，都無法考慮不同單位量對解題的影響。31 位學生處理二分之一的餘量再分問題時，有 11 位學生犯了更改給定的單位量或將原單位量分解成二部分，每部分都正確處理後，無法將處理後的各部分合併成原單位量的二分之一。

2. 等分的概念仍未建立

36 位學生中，有 9 位學生不具等分概念，亦即這 9 位學生犯了「將連續量分成大小不等的二份」或「將大小相同的偶數個離散物分成個數不一樣多的二份」的錯誤。

3. 分數語言仍未生活化

29 位學生中，有 12 位學生犯了「視分數的分母與分子為兩個獨立的自然數系」或「將分數語言中的『分』僅當做動詞『分的動作』」或「分數語言二分之一與生活語言中的一半與半個仍不會連結或辨別」的錯誤。研究證據顯示學生分數概念啟蒙學習前，三個主要的認知困難具有普遍性。

上述這些啟蒙學生的認知困難，根據文獻探討得知，一般中、高年級的國小學生，累積相當分數學習經驗後，同樣的學習困難，仍可在他們的表現中發現，顯示這些分數的學習困難是根深蒂固，難以改變的。此現象與 Hart (1981) 所發現的現象相符。

Hart 發現的現象

1. 某些錯誤在同一年齡群中非常普遍。

2. 學生一旦因某種想法而使用錯誤的解題策略，就傾向於一致地使用，可謂根深蒂固，難以改變。

學生分數啟蒙時的一些解題行為，如：學生只能掌握整數個的分配問題，卻要面對既要整數個分配又要切割後再分配的問題，像平分 5 片海苔給 2

個人的問題，就只好發展出完成整數個分配後，將無法整數個分配的 1 片予以拋棄處理的策略。有的學生則是利用他處理一個的分配問題的策略，將上述問題中的 5 片海苔都一、一分成兩等分，再取其中的 5 個半片海苔作為答案。這些解題行為亦符合 Case (1975, 1978) 診斷教學的假設：

「當學習者所處的學習情境，需要他掌握的資訊量超過他的能力時，就趨向於發展出合理但過於簡化的解題策略。」(Case, 1975; 1978)

根據國內外文獻及本研究的結果，發現學生分數解題行為，符合診斷教學的假設：

1. 某些錯誤在同一年齡群中非常普遍。
2. 學生一旦因某種想法而使用錯誤的解題策略，就傾向於一致地使用，可謂根深蒂固，難以改變。
3. 當學習者所處的學習情境，需要他掌握的資訊量超過他的能力時，就趨向於發展出合理但過於簡化的解題策略。

因此，如果在啟蒙教學時，欲排除學生的分數學習困難，可根據診斷教學的原理，設計教學活動。

診斷教學的原理（林福來等，1992，第 8 頁）

1. 教學設計之前，不僅要分析欲教的解題方法，同時要詳細描述學生自己發展的解題策略。
2. 教學設計要能凸顯學生自己發展的解題策略的侷限性，使欲教的解法有明顯的學習動機。
3. 教學活動的次序安排，以及從多種解題策略中選取欲教的某種策略，原則上都要盡量減低學生的工作記憶量。
4. 學習過程中，學生要有資源可以自我檢查自己的答案是否正確；即一般所謂的立即回饋原則。
5. 對於學生共同常犯的錯誤，教學設計務須使學生有機會主動察覺自己錯了，亦即產生認知衝突。

綜合研究發現及診斷教學的原理，本研究形成下列發展分數啟蒙教案的幾點參考事項。

1. 分數啟蒙配合具體物進行學習

大部分啟蒙階段的學生，無法在沒有具體的實物、教具、圖形的情況下，考慮不同單位量對解題的影響。又，診斷教學的原理是教學活動的安排要盡量減低學生的工作記憶量。因此啟蒙階段的活動宜配合實物、教具或圖形來教學，讓學生有足夠多的具體經驗。

2. 單位量概念應設計診斷教學活動

部分學生會擅改給定的單位量，使問題簡化到他有能力處理的情況。又，診斷教學的原理是教學設計要能凸顯學生自己發展的解題策略的侷限性，因此，啟蒙階段應提供適當的活動，讓學生了解不能擅改給定的單位量。

3. 等分概念應設計診斷教學活動

學生的等分概念有諸多錯誤，又，診斷教學的原理是對於學生共同常犯的錯誤，教學設計務須使學生有機會主動察覺自己錯了。因此教學活動應設計問題，使學生常犯的錯誤分數概念有機會呈現，以造成認知衝突，尤其是對等分概念的了解。

4. 應透過分數的前置語言，教導分數語言的了解

學生不僅對分數符號或分數語言有諸多誤解，而且學生從他們形容分量的習慣用語到自然的出現分數語言有很大的困難。因此啟蒙階段，需花較多時間，讓學生將習慣用語轉換成前置語言，再讓學生將前置語言與分數語言相聯結，並了解分數語言所代表的意義。

5. 分數啟蒙教學宜接受學生的各種思考型態

教師應接受啟蒙階段的學生的各種思考型態，如：採用直觀思考解題的視覺約估法，以解析思考解題的偶數平分法……等。

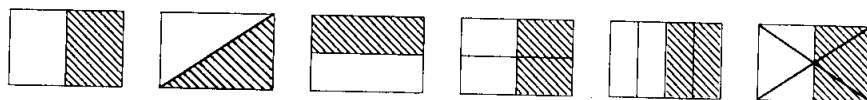
除了 Case 的診斷教學原理外，Streefland (1991) 在其提倡的現實的數學教育中所標舉的五個教學原則，亦提供設計分數啟蒙教學活動的依據。這五個教學原則是：



1. 實例。實例不僅應該是學生形成數學知識進程中的啟蒙之源，同時，也是在獲得知識之後再回頭應用的問題領域。
2. 主動。提供機會讓學生能主動對自己學習歷程有所貢獻，學習者扮演建構者，組織自己的數學知識。
3. 表徵。重視學習歷程中所產生的符號、圖形與視覺模型等表徵。
4. 互動。互動包括學生間及師生間的互動。

5.編織。數學概念間存在著密切的內在相關性，良好的學習活動設計可以預留往後相關概念發展的接線。

用民國 80 年以學習環境佈置切入的教學實驗，來說明上述教學原則的具體可行。



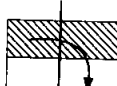
實驗教學採取分組討論方式，小組成員分別有 2、3、4、5、6 人不等。每個小組共同解教師提供的問題。其中二人一組的學生，在平分一個長方形蛋糕給二個人時，發展出下列分法：



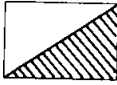

T：（拿出   ）這兩種分法，你 (S1) 和你 (S2) 吃掉的有一樣多嗎？

S1、S2：有。

T：可是你們吃的形狀不一樣，你怎麼知道一樣大呢？

S1： 中間切一刀  再把  上面的移到下面來就是了呀！這個原理，就好像 $8 + 9 = 17$ ， $9 + 8 = 17$ ，只是位置不一樣而已。

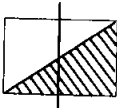
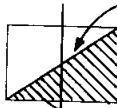
S2：就是把這四塊重新組合就可以了。

T： 和  有一樣嗎？





S1：（用手補綴，並小聲說）

T：講得不錯，再說一次。

S1：（沉默）

S2：我知道（先摺  再補綴  ）。


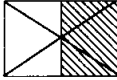
T：那  和  呢？

S1：（拿出 ，利用  =  = ）一樣。



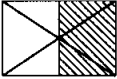
S2：一樣。

T：  和  呢？

S2：（指著兩個圖形的斜線部分）一樣多

S1：（並排 ）都一樣。


從上述的部分教學實錄中，我們看到選擇適當的實例，將學生適當的分組，那麼，透過小組討論，學生呈現了主動學習的現象，並發展其表徵能力，同時，形成學生間及師生間的互動。學生發展出來的不同分法，如：

   又已為往後發展等值分數概念編織了前置的經驗。

(二)分數啟蒙教案

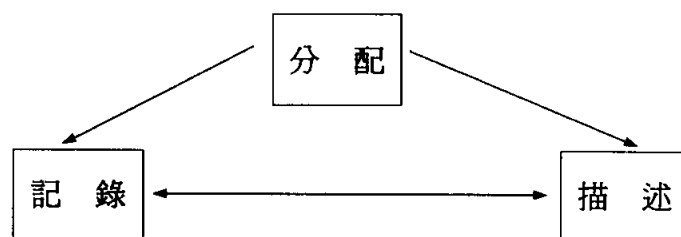
1.教學目標

分數啟蒙概念的教學目標定為：

- (1)分母為 10 以內的單位分數的說、讀、聽、寫、做。
- (2)透過分割及分配活動，建立等分概念及分數概念。
- (3)從拼湊的活動中經驗分量的不變性。

2.教學活動架構

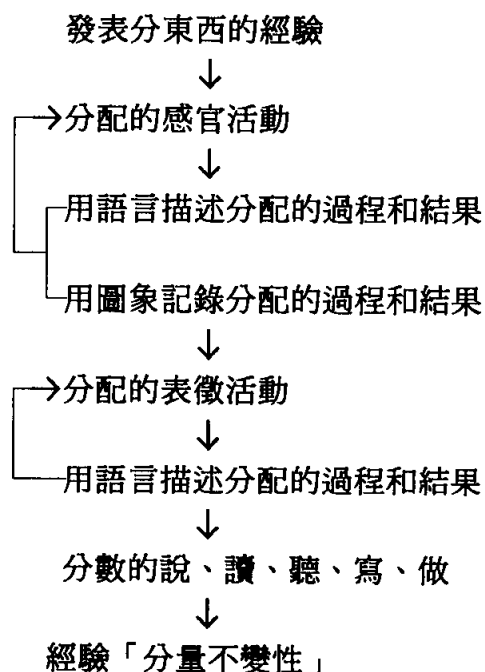
基本的教學架構是提供分配問題，要求學生記錄分配的過程及分得的量，並要求學生描述分得的量。示意圖如下：



學習活動實際就是解題活動。描述分配的方法及分得的量，強調的是溝通的特性。記錄可促使學生立即省思自己的想法，並發展圖示、符號等表徵能力。教師可借用學生的記錄作為教學資源，連結學生處理的連續量與離散量分配問題的經驗。

3. 半結構的教案

由於不同的教師有其不同的教學風格，而且教師在教學時應有其自主性，因此，只提供「半結構的教案」給實驗教學教師，如下：



二位國小教師（以甲教師、乙教師代稱），根據研究小組討論出的半結構的教案、診斷教學原理、分數概念啟蒙教學活動發展要點、及其個人的教學特性，分別發展他們的教學活動，附錄一是其中的一份教案。

甲教師設計教學活動的理念是以學生為中心，由教師好好的結構教學活動給學生。因此，其教學的主導性較強。乙教師設計教學活動的理念完全以學生為中心，教師只考慮如何引導出有意義的問題，讓學生透過相互討論，交互質疑、辯證的過程來產生學習。因此，乙教師重視佈題的方式及提問的技巧……等。

肆、學生的成長

一、研究方法與研究工具

1. 研究方法

爲了了解學生的學習情況，於教學實驗結束二個月後，對參與教學的 40 位國小二年級學生施以一對一的半結構式面談。每份面談資料都錄音，部分兼錄影，並將這些資料翻錄成書面資料。

2. 研究工具

面談試題共分六大題：

第一大題欲了解學生是否會處理 $\frac{1}{5}$ 的連續量、離散量的分配問題？是否會記錄分配的過程及分得的量？是否會描述分得的量？面談試題舉例如下：

這個蛋糕平分給 5 個人，怎麼分？每個人得到全部的多少？
(或：這些糖果(15個)平分給 5 個人，怎麼分？每個人得到全部的多少？)

- 請你把題目念一次。
- 你怎麼分？把你的分法畫在紙上給我看。
- 把你畫的圖說明給我聽看看。
- 每個人分到全部的多少？
- 爲什麼答案是五分之一？
- 題目問的是什麼？
- 題目中的全部指的是什麼？

第二大題欲了解學生具有第一大題的解題經驗後，是否能將此具體經驗抽象化，發展出 $\frac{1}{5}$ 的分數概念？面談試題舉例如下：

剛剛這幾個問題你都在做些什麼？

- 你分什麼東西給多少人？
- 你得到的答案是什麼？
- 你說看看什麼是五分之一？
- 你能不能再說一個答案也是五分之一的例子？

第三大題則是用教學內容中常出現的 $\frac{1}{4}$ 作為檢驗學習成果。面談試題舉例如下：

這裡有一條彩帶平分給4個人，怎麼分？每個人得到全部的多少？（要求操作、回答並說明）

第四、五大題欲了解學生餘量再分的學習情況。面談試題舉例如下：

一包海苔（5片）平分給2個人，怎麼分？每個人得到全部的多少？

第六大題則是要了解學生對單位量概念的學習情況。面談試題舉例如下：

一塊羊羹分成3等分，小華拿走1塊，剩下的2塊給小明，小明得到原來那塊羊羹的多少？

- 小明說他自己拿到原來那塊羊羹的二分之一，你認為小明講的對不對？為什麼？

二、實驗學生的表現

(一)分配東西的策略

學生處理分東西問題的策略，共計七類。

1. 實測等分。例如：量出蛋糕的長度，除以 5，得到每人分得蛋糕的量。或先數出糖果的個數 15 個，利用 $5 \times 3 = 15$ ，再圈出 3 個作為一人分得的量。使用這種策略的學生是用解析思考來解題。

2. 約估視覺調整。例如：先用視覺約估每人分得的量，分完後，判斷其是否等分，若不等分，再調整，重新分配。
3. 視覺調整。例如：分完每人分得的量後，判斷其是否等分，若不等分，再調整，重新分配。
4. 視覺。例如：分給 5 人就分成 5 份，但不計較其是否等分。使用這種策略的學生，其等分概念尚未建立。
5. 整體折半。例如：將整條彩帶對折再對折，以獲得每人分得的量。
6. 逐個折半。例如：將每一片海苔都對折，以獲得每人分得的量。
7. 拋棄餘量。例如：每人分得二片海苔，剩下的一片海苔拋棄不分。使用這種策略的學生，其單位量概念尚未建立。

(二)描述分配後所得的量的方式

學生描述離散量分配後所得的量的答案類型有底下這六類，而學生描述連續量分配後所得的量的答案類型只有二類，即底下的第 3 類、第 4 類。

1. 計數新單位。例如：將 3 個當作一份，是一個新單位，全部的糖果以新單位來計數是 5 份，故每人分到的糖果是全部的 $\frac{1}{5}$ 。
2. 原單位／新單位。例如：每人分得的糖果是全部的 $\frac{3}{5}$ ，分母以新單位份數來計數，分子則是原來的一個一個糖果，每人分到 3 個糖果。
3. 計數原單位。例如：每人分到的糖果是全部的 $\frac{3}{15}$ 。
4. 計數絕對量。例如：每人分到 3 個。學生沒有將分得的量與單位量作相對比較。
5. 大小都當 1／原單位。例如：將一片海苔分成兩半，每人分到 2 片半，學生不論海苔的大小，把 1 片和半片都當作 1 計數，而得到每人分到的海苔是全部的 $\frac{3}{5}$ 。
6. 其他。

(三)學習成果

教學實驗的教學架構是提供分配問題，要求學生記錄分配的過程及分得的量，並要求學生描述分得的量。根據教學架構來分析學生的表現得到：

1. 就整數分配或連續量分配活動而言：有 70% ~ 80% 的學生可以操作等分給 5 個人的連續量的分配活動，100% 的學生都可以操作等分給 5 個人的離散量的分配活動，顯示學生處理離散量的分配活動的能力比處理連續

量的分配活動的能力好；大約 90% 的學生可以操作等分給 4 個人或 2 個人的連續量的分配活動。

2. 就餘量再分活動而言：93% 的學生可以將 5 片海苔平分給 2 個人、88% 的學生可以將 7 片口香糖平分給 3 個人。其中約有 50% ~ 80% 的學生可以用適當的分數語言來描述分得的量與單位量的關係。
3. 就分的策略而言：學生處理離散量的分配活動，主要是採用整體折半的策略；而學生處理連續量的分配活動時，若分的份數不是 2 的次方，則主要是採視覺調整的策略，若分的份數是 2 的次方，則學生使用的策略較多樣化，如約估視覺調整的策略、整體折半的策略都有多人使用。
4. 就描述分得的量而言：93% 的學生可以用四分之一的分數語言來描述分得的連續量，他們主要是採用計數原單位來描述。另外，68% 的學生可以用分數語言來描述餘量再分後的量，與單位量的關係，他們主要是計數新單位來描述。至於離散量，有 40% 的學生計數新單位來描述，這些學生已具有初步的等值分數概念；有 20% 的學生計數絕對量來描述，這些學生還無法利用分數語言來描述分得的量。
5. 就單位量概念而言：在呈現圖卡的情形下，有 70% ~ 85% 的學生能辨認單位量。

除了上述面談得到的結果外，從教學過程中也有一些現象值得記載。

1. 以分東西的實例引入教學活動，和學生的日常生活經驗相契合，學生表現出高度的學習興趣。
2. 每組學生人數不等的教室組織方式，自然的引出二分之一、三分之一、……六分之一等不同的分數，使得學生能在自然的情境中，同時學到不同的單位分數。
3. 學生在自行解決教學活動中所提出的問題時，同一個問題能發展出多種解題策略。同時，要求學生記錄其分東西的策略與分得的量，促使學生發展其圖示、符號等表徵能力。
4. 學生討論分量不變性的經驗，使得學習不會只停留在操作為主的程序性知識，而能過渡到概念性的發展。
5. 學生分同一個東西的不同分法，編織了學生往後學習等值分數的經驗。

伍、討論與建議

本次實驗教學有以下幾點特性：

1. 探索學生分數概念的先備知識；
2. 檢驗起始教學活動的切入方式，發現不等分組是良好的分數學習環境佈置方式；
3. 調查分數概念啟蒙的可能學習區；
4. 擬定需診斷的分數子概念；
5. 教案充分反應診斷教學原理及現實的數學教育的五個教學原則。

教學實驗擁有優秀的師資，並且在班級學生人數減半（約 20 人）、充分的教具等良好條件的配合下，發現在分數啟蒙的學習中，約 90% 的學生能處理的分數問題有：將連續量四等分、將離散量五等分、將 5 片海苔二等分、將 7 片口香糖三等分；以及可以用四分之一的分數語言，來描述連續量被分成四等分時，分得的量與單位量的關係。約 70% ~ 90% 的學生能處理的分數問題有：將連續量五等分、能用分數語言描述，餘量再分後的量與單位量的關係、在呈現圖卡的情形下，能辨認單位量。在一般的教學環境中，學生在上述問題的答對率一定更低。在評量不能打擊學生的學習信心；及評量是想知道學生學到多少，而不是想知道學生學不會的有多少的重要原則下，上述資料可當作分數啟蒙學習中評量內容的參考。

根據面談學生及學生在實驗教學中的表現，可以看到表面類似的問話，卻可能引出學生不同的數學概念。例如：問學生「請你畫出這張紙的二分之一」的問題，學生不會處理；但是，如果把問題改為「請你畫出這張紙的一半」，則學生會處理。如果問學生「一個花生糖，分給四個人，每個人分到多少？」，學生不易使用分數語言來回答；但是，如果把問題改為「一個花生糖，分給四個人，每個人分到的是全部的多少？」的問話，卻可以引出學生使用分數語言。因此，如何設計適當的問話來評量學生的學習狀況是值得探討的研究題材。

分數概念是需要透過很多的操作過程，才能慢慢的抽象化的過程性概念。因此，學生在啟蒙階段所學到的是操作的經驗，而操作的經驗用抽象化的紙筆測驗來評量，不易看出學生已經學到的概念有那些，透過配合操作的面談，才能對學生的學習有更深入的了解。但是，除了紙筆測驗、配合操作的面談法之外，還有

那些評量方式可以用來了解學生的學習狀況呢？這也是一個值得研究的工作。

從學生的解題策略來看，分數概念的啓蒙教學活動將二分之一、四分之一獨立出來學習有其優點。從本實驗教學的學生的表現來看，將近 90% 的學生可以處理 7 片口香糖平分給 3 個人的問題，其三分之一概念的學習表現亦不差，顯示分數概念啓蒙教學的教案設計，從學習環境佈置的角度切入仍受到肯定。不過，本實驗教學在良好條件的配合下，實驗學生的答對率不到 90% 的分數問題仍有：將連續量五等分；無法使用分數語言來描述餘量再分、及離散量的整量分配後，分得的量與單位量的關係；在呈現圖卡的情形下辨認單位量。那麼，在一般的教學環境中，學生在上述問題的學習一定更差。如果能將分數概念的學習延後，等到學生相對比較的能力增強之後，才引進分數教材，那麼，理論上，分數的學習障礙將會大減。這也是某些國家的處理方式，例如荷蘭 (Streefland, 1991) 在小學四年級才開始學習分數概念。

- 註：1. 本文是國科會專題研究計畫編號：NSC80-0111-S-003-20-A、NSC81-0111-S-003-21-A 及 NSC82-0111-S-003-013 的部分結果。但文中論點為作者所有，不代表國科會。相關的結果將另文發表。
2. 感謝研究小組成員譚寧君、楊美伶、陳招英、鄔瑞香、黃蕙蘭、孫德蘭、林春慧、王敏蕙、何明美的熱心參與。同時，感謝台北市金華國小、國語實小、力行國小及國立台北師範學院附設實驗小學協助面談與教學實驗的進行。
3. 本文初稿曾發表於「認知與學習」專題研究計畫成果與學術研討會，國立中正大學，85 年 3 月。

參考文獻

1. 呂玉琴 (1991)：分數概念：文獻探討。《臺北師院學報》，第四期，573 ~ 606，國立臺北師範學院。
2. 林福來 (1992)：數學學習理論之辯證。《國立臺北師範學院數理教育系數學教育專題演講手冊》，國立臺北師院數理教育系。
3. 林福來、黃敏晃 (1993)：分數啓蒙課程的分析、批判與辯證，《科學教育學刊》，第一卷第一期，1 ~ 28。

4. 國立編譯館 (1993)：《國小數學課本》，第 1 ~ 12 冊，台灣書店。
5. 楊壬孝 (1988)：國中小學生分數概念的發展。《國科會專題研究計畫報告》。
6. Beattys, C., Herscovics, N., & Nantsis, N. (1990). Children's pre-concept of multiplication: procedural understanding. The 14th International Conference for the Psychology of Mathematics Education.
7. Bergeron, M. J., & Herscovics, H. (1987). Unit Fractions of a Continuous Whole. The 11th International Conference for the Psychology of Mathematics Education.
8. Bruner, J. S. (1973). *The Relevance of Education*, N. Y. :Norton, p82.
9. Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (1991). Children's understanding of fractions as expressions of relative magnitude. The 15th International Conference for the Psychology of Mathematics Education.
10. Case, R. (1975). Gearing the demands of instruction to the developmental capacities of the learner, *Rev Ed Res*, 45.
11. Case, R. (1978). A developmentally based theory and technology of instruction. *Rev Ed Res*, 48.
12. Dassa, C., Bergeron, J. C., & Herscovics, N. (1989). The multidimensional nature of the pre-concepts of number . The 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education.
13. Figueras, O. (1989). Two Different Views of Fractions: Fractionating and Operating. The 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education.
14. Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland.
15. Fuys, D., Geddes, D. & Tischler, R. (1984). *An Investigation of The Van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents*. Brooklyn, New York.
16. Hart, K. M., Kerslake, D., Brown, M. L., Ruddock, G., Kuchemann, D. E., & McCartney, M. (1981). *Children's Understand of Mathematics: 11*

- ~ 16. *John Murray Ltd. London.*
17. Rissland, E. L., (1985). Artificial intelligence and the learning of mathematics: A tutorial sampling. In Silver, E. A. (Ed.) *Teaching and learning mathematical problem solving*. New Jersey. London.
 18. Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers.
 19. Streefland L. & van den Heuvel-Panhuizen, M. (1992). *Evoking pupils' informal knowledge on percents*, PME16, Durham, N. H. U.S.A.
 20. Tall, D. O. (1986). *Building and testing a cognitive approach to the calculus using interactive computer graphics*. Ph.D. Thesis, University of Warwick.

附錄一

分數啟蒙教案甲

(一)發表分東西的經驗

Q1：小朋友，你和別人分過什麼東西？

Q2：怎麼分？

Q3：分東西的時候有沒有發生什麼問題？怎麼處理？

(二)分配的感官活動

整分配：如分花片

餘量分配：如分羊羹

單個分配：如分一條巧克力糖

Q1：這裡有這麼多的××，你們×人分分看。

Q2：說說看，怎麼分？

Q2-1：剩下一個，怎麼辦？

Q2-2：分分看。

※在分的過程中隨時注意是否等分。

Q3：說說看，每人分到多少？

Q4：請你們把怎麼分的，每人分到多少畫下來。

Q4-1：想想看，原來有幾個××？

Q4-2：分給幾個人？

Q4-3：每人分到多少？

(三)分配的表徵活動：一個長形蛋糕

Q1：這裡有一個蛋糕，你們 \times 個人分，想想看，怎麼分，每人分到多少？在還沒有分之前，把你的想法畫在紙上。

Q2：誰會說說看，這組的小朋友怎麼分？每人分到多少？（看記錄、口語描述）

四分數的說、讀、聽、寫、做

1. 關聯分數語言與生活語言：使用一個長方形蛋糕的紀錄

Q1：看這張紀錄，說說看，怎麼分，每人分到多少？

Q2：另外有一個高年級的小朋友看了說：「他們每人都分到一個蛋糕的四分之一。」

Q3：這個高年級的小朋友說的意思和你們相同，只是說法不同，誰會說說看，他說的四分之一是什麼意思？

2. 練習使用分數語言：使用學生的紀錄

Q1：看這張紀錄，說說看，怎麼分，每人分到多少？

（如果仍使用生活語言→Q：還可以怎麼說？）

（如果使用分數語言→Q： \times 分之一是什麼意思？）

3. 做數：使用紙卡□○

Q1：請你給我這個 $\times \times$ 的 \times 分之一。

4. 猜猜看：我說，你寫

Q1：這裡有一張紙卡，全組的小朋友想想看，要分給 \times 個人，怎麼分？每人分到多少？

Q2：請第 \times 組的小朋友派一個人出來，告訴大家，你們把這張紙卡分給幾個人？怎麼分？其他的小朋友聽完後，想想看，每人分到多少？寫出來。

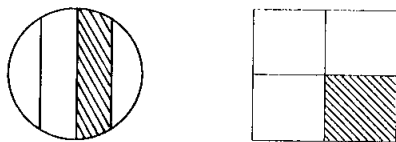
Q3：每人分到多少？怎麼寫？

5. 診斷等分概念

Q1：黑色部分是不是占全部的二分之一？



Q2：黑色部分是不是占全部的四分之一？



(五)經驗分量不變性

1. 離散量的分配結果用分數語言描述（建立份的概念）

Q1：這是上次分羊羹的記錄，誰會說說看，怎麼分？每人分到多少？

如果沒有人用分數描述

Q1-1：還可以怎麼說？

Q1-2：有一個高年級的小朋友說，每人分到全部羊羹的四分之一，你知道他為什麼可以這樣說嗎？

如果有人用分數描述？

Q1-3：你怎麼知道說成分到全部羊羹的四分之一？

Q2：這麼多花片，分給全組的人，分分看。

Q3：說說看，怎麼分？每人分到多少？

Q4：把你怎麼分的，每人分到多少畫下來。

Q5：說說看，這組的小朋友怎麼分？每人分到多少？（分到這一盒花片的幾分之幾？）

2. 多種分法的嘗試：使用長方形紙條

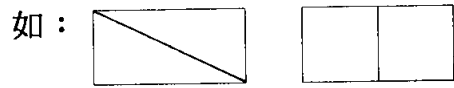
Q1：這裡有一條巧克力，要分給全組的人，怎麼分？每人分到多少？把它畫在紙上。

Q2：除了這樣分，還有沒有別的分法？怎麼分？每人分到多少？把它畫在紙上。

Q3：每一組的小朋友說說看，你們怎麼分？每人分到多少？（每人分到這一條巧克力的幾分）。

3. 不變性的討論

Q1：看看這一組小朋友的兩種分法，說說看，不同的分法，分到的一不一樣多？



Q2：為什麼？可不可以證明看看？

Q3：看看這一組小朋友的兩種分法，說說看，不同的分法，分到的一不一樣多？



Q4：為什麼？

A Developmental Study on Learning and Teaching of Beginning Fractions

Fou-Lai Lin¹ Men-Fong Huang² Yuh-Chyn Leu³

¹Department of Mathematics, National Taiwan Normal University

²Department of Mathematics, National Taiwan University

³Department of Mathematics and Science Education,
National Taipei Teachers College

Abstract

This study investigated students' informal knowledge of fractions and explored the teaching and learning of beginning fractions. Questions of what constitutes a good learning environment and an appropriate zone of learning beginning fractions for second graders were also examined.

The informal knowledge of fractions were investigated with one-to-one semi-structured interviews. Second graders (N=25) who had not received formal instruction in fractions were given real objects to manipulate in the context of everyday life situations with words such as a half, fair and equal sharing. As a result of this experience, over 90% of them were able to count and to make equal sharing with even number of objects.

Teaching modules for beginning fractions were developed based on the knowledge about students informal knowledge, the principles of diagnostic teaching, and principles of the real-life mathematics education. Some key features of the module included attention to choosing real-life situations, using small group discussion, grouping into different size of groups, diagnosing the awareness of equal parts, recognizing the invariant of different partitioning, and the three steps of learning cycle: distributing--recording--describing.

The explorative teaching was conducted by two school teachers in the research group at schools other than their own. Each exploration consisted of six forty-minutes lessons. After one month, all forty students were interviewed to determine their understanding of fractions. Given a continuous quantity, they are able to solve equal sharing for two, three and four. Given discrete objects, they are able to solve equal sharing for two, three, four and five. The fractions language $\frac{1}{2}$ and $\frac{1}{4}$ are used appropriately on continuous quantity situations, but not always on discrete objects. Many different strategies of sharing were developed by the students.

Key word: Fractions, Informal Knowledge, Learning of beginning Fractions, Realistic mathematics education, Diagnostic Teaching.