科學教育學刊
1997, 第五卷第四期， 557-591

EJ51-1997-557

反證法論證原理的探究性教學

林福來[1]　鄭英豪[2]
[1] 國立台灣師範大學 數學系
[2] 私立中國工商專科學校 共同科

（投稿日期： 86 年 9 月 30 日，接受日期： 86 年 12 月 30 日）

摘要：反證法是利用對偶命題等價的原理進行論證。調查我國高二學生對反證法的了解，發現有約 55% 的學生瞭解反證法的證明格式（否定結論，推得矛盾），然而只有不到 5% 的學生瞭解反證法的論證原理。這一方面顯示在數學教室中學生只學到一種演繹的格式，而非完整的論證原理；另一方面也顯示學生在生活中利用對偶命題進行論證的經驗並未與邏輯原理相連結。

思考生活中的命題時，往往因語言使用的習慣與個人經驗的累積，而產生與邏輯規則不同甚至相違背的情況。本文分析了生活命題的思維特質，詮釋四種在生活命題中之所以產生異於邏輯規則的思維成因。進一步提出克服此種思維限制以發展邏輯思維的教學假設－「將生活情境中命題的眞僞關係符號化，利用符號規則推理再轉譯回生活命題，可增進學生對反證法論證原理的瞭解」，並據以發展教案進行探究性教學。

探究性教學時，著重觀察當下學生的學習反應，尤其注重學生能否發現規律？能否符號化？能否將符號規律應用於其他命題等瞭解的歷程上。這些瞭解歷程的分析，主要根據教師於教學中之觀察記錄來進行。最後佐以教學後一個月的延後測，對照具代表性的高二學生對反證法的瞭解狀況以評估學習效果。

教學活動共約三堂課（ 150 分鐘），教學對象爲五專商科一年級學生 47 人與五專工科一年級學生 23 人。

教學過程的觀察記錄顯示在教師的導引與學生的小組討論下，學生確可發現對偶命題等價並符號化，而在求等價命題的問題上，將原命題符號化再輔以符號規則是成功的關鍵步驟，教學假設獲得支持。

延後測結果顯示，實驗班學生有 19% 的學生能辨識對偶命題等價，相對於參照組已學過反證法的高二學生之 4.5% 高出許多。

關鍵詞：反證法，生活論證，探究性教學，對偶命題。

壹、反證法的原理與時代意義

反證法的邏輯原理是證明命題「若～q則～p」成立，再利用命題「若p則q」與命題「若～q則～p」等價的關係得到「若p則q」成立。反證法論證的程序包含三個步驟：

1. 否定結論（～q）。

2. 推得矛盾（～p）。

3. 由「若～q則～p」與「若p則q」等價得證「若p則q」。

反證法是數學證明中一個極重要的論證方法，根據訪談六位大學數學系教授的說法（林福來，1994）：「如果不用反證法，存在性定理會消失，不存在性的定理也會消失」、「如果沒有反證法，唯一性、歐式幾何的部份命題、稠密性、實數完備性、定點定理等都無法證明，分析就垮了」，由此可知反證法在建立數學結構的過程中扮演極重要的角色。

除了在建構數學知識體系時扮演重要角色之外，反證法論證的邏輯原理－對偶命題等價，也是生活中常用以推理或解讀訊息的思維方式。例如在搶劫、傷害等刑事案件的偵辦上，「不在場證明」往往是關係人證明自己清白的重要依據，換句話說在一般的認知中，「犯案者必在場」是一個普遍認可的命題，而其對偶命題「不在場則非犯案者」與原命題具有等價的邏輯眞實性也被一般人所接受，因此便可用以表示自己不是犯案者。此外當人們對某個指稱不同意時，便常常有類似的思維與反應。例如當我們稱讚一個小朋友：「你好棒喔，你可以當模範生了。」時，小朋友的回答可能是：「那有，我又不是第一名。」，這表示在這位小朋友心目中存在著一個「模範生一定是第一名」的命題，因此當自己不是第一名時，自然就不可能是模範生了。

換句話說，在生活中其實每個人都累積了很多事件間的因果關係，這些因果關係往往很自然地在反駁或確定某種說法時以對偶命題的形式呈現，然而生活中的經驗規律與語言的使用很少被人以邏輯規則檢視過，因此我們往往並未察覺到自己的思維其實就是用了反證法。

雖然說在生活中就有很多使用反證法推論的經驗，然而生活中語言的意義並非完全依邏輯規律來認定，因此也會將非對偶形式的命題誤以爲等價。研究顯示我國的高二學生中有47.8%認爲老師說：「如果下雨，我就不參加郊遊」與「如

果不下雨，就會參加郊遊」意思一樣（林福來， 1994 ）；又如某次師大校務會議中決議「如果教育部接受師大推薦的校長候選人，則師大就願意派代表參加教育部的遴選委員會」，對於這個決議案，一些與會的師大教授與報紙上報導都將其引伸為「如果教育部不接受師大推薦的校長候選人，則師大就不願意派代表參加遴選委員會」。在這兩個案例中，有很多人將命題「若 p 則 q 」引伸為「若～p 則～ q 」，違反了邏輯規律。這些事例顯示一般人，甚至大學教授或專業的記者，也常有違反邏輯規律的思維發生。

我國的社會正逐漸走向民主多元的時代，在這樣的社會環境中，任何人對任何事都可以表達其個人的看法，因此在不同觀點、不同見解間發生衝突時，理性客觀的論辯以澄清個人意見的本質，與尋求當下最適宜的決策，成為社會脈絡中最迫切的需求；也就是說，我們必需要為明日的社會建立一個能理性論辯以除弊留益的溝通環境，而要造就一個這樣的環境，有賴人人培養邏輯思維以進行論辯。因此，就教育國民使有能力進行理性論辯的目標而言，瞭解對偶命題等價以進行邏輯論證這件事在現今的時空環境下更具有其符合社會發展的教育意義。在數學教學中處處有邏輯論證的過程，藉此學習環境培育學生的邏輯思維使能理性論辯正是學校教育呼應社會需求的表現，也正是現今數學教育應負的社會教育責任。

既然反證法是一種很普遍使用的論證方法，那麼學生是如何學習反證法的？學習的成果如何？學習的困難在那裡？都是值得探索的問題，而在這些學習問題下，能不能讓學生學得更好？更是教學時值得努力的課題。

貳、反證法的學習情況與學習問題

在現行數學課程中，國中三年級開始出現以反證法證明數學命題的題材。國三時主要用反證法證明幾何命題，例如「同一三角形中，大角對大邊，小角對小邊」、「二圓相切，則此二圓的切點必在其連心線上」。到了高一，反證法則用以證明一些數的性質如「設 n 為整數，若 n 為偶數，則 n^2 為偶數」、「質數有無限多個」、「$\sqrt{2}$ 為無理數」等。而在教材的安排中，證明的本身強調數學性質的演繹過程，通常只呈現出否定結論、演繹推論得矛盾的格式，對於反證法的論證原理並未交代，也沒有把反證法的思維與生活經驗相連結，因此當老師以反證法證明「$\sqrt{2}$ 為無理數」後，學生常常產生「否定結論、推得矛盾，為什麼就

證完了？」（林福來，1994）的疑惑，這表示學生對論證原理並不瞭解。

有關反證法的研究，文獻上並不多見。在國外方面，Thompson 將反證法的證明過程分成(1)假設"否定欲證"；(2)推得矛盾；(3)由矛盾知假設錯誤，因此原欲證成立三個步驟 (Thompson，1991)，並以高中生在此三步驟上的表現評分統計，其研究將焦點放在論證的演繹過程，而非反證法論證原理的瞭解。

在國內則有林福來 (1994；1995) 對反證法的瞭解做了深入的探討。該研究根據反證法的論證過程設計問卷，同時以生活情境與數學情境的問題調查高二學生在(1)否定敘述；(2)反證法的論證格式（否定結論，推得矛盾）；(3)反證法的論證原理（對偶命題等價）等三方面的瞭解情況。調查顯示我國高二學生反證法的瞭解有兩個層面（林福來，1995)，其中一個爲否定敘述能力的層面，另一個則是反證法程序的瞭解層面，兩個層面內均有發展層次。

在否定敘述的層面上，主要與敘述的量詞 (Quantifier) 結構有關，林福來 (1994) 的研究主要探討下列四種量詞的敘述：

1. 無量詞敘述：如「現在沒下雨」、「n 不是質數」。
2. 量詞爲「存在」的敘述：如「班上有一些男同學」、「六邊形 ABCDEF 中有一些內角相等」。
3. 量詞爲「所有」的敘述：如「所有的人都是我的好朋友」、「△ ABC 所有的角均爲銳角」。
4. 量詞爲「唯一存在」的敘述：如「小英只有一個弟弟」、「函數 f 的圖形與 X 軸只有一個交點」。

研究結果顯示在否定敘述的層面上，層次的發展順序爲：

- 層次 1：能否定無量詞與量詞爲「存在」的敘述。
- 層次 2：能否定量詞爲「所有」的敘述。
- 層次 3：能否定量詞爲「唯一存在」的敘述。

在反證法程序的層面上，層次的發展順序爲：

- 層次 1：能否定無量詞與量詞爲「存在」的敘述。
- 層次 II：瞭解反證法的證明格式（否定結論，推得矛盾）。
- 層次 III：能辨識對偶命題。

註：未達層次 1 的學生稱爲層次 0。

這個雙層面的發展模式可以用圖 1 表示：

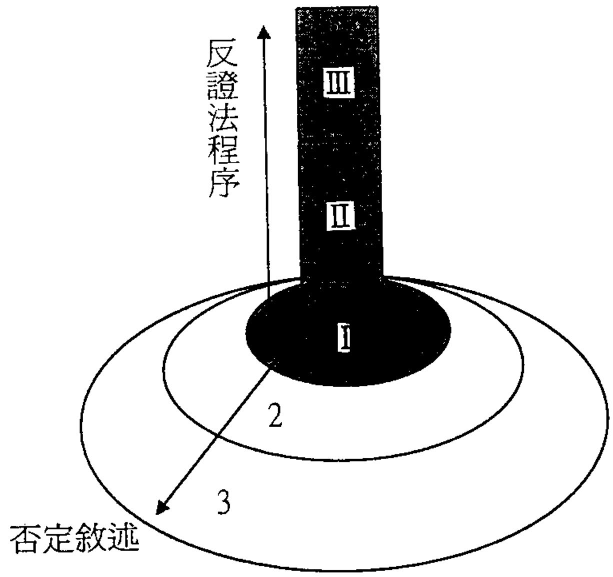

圖 1 ：反證法的了解模式圖

反證法的了解模式表示否定敘述的能力爲反證法之基礎能力，因此圖 1 中將代表否定敘述能力的三個層次置於底部表示發展之基座，三層次之發展以高層次包含低層次的方式表現：反證法的第一步驟就是否定欲證的結論，學生在否定語句的能力上獨力發展，無量詞與量詞爲「存在」敘述的否定最先學會，然後才學會量詞爲「所有」敘述的否定，最後才能否定量詞爲「唯一存在」的敘述，而包含連接詞「且」、「或」敘述的否定則不在該研究範圍內。在縱向上，依反證法程序的了解層次向上發展，此三個層次與反證法的論證步驟「否定結論，演繹推論得矛盾，利用對偶命題等價得證」一致，這表示學生有直接塡否定詞的能力後，便可學習反證法的格式，而學生了解反證法的格式不代表瞭解反證法的論證原理，直到第 III 層才瞭解對偶命題等價是反證法的論證原理。

若從答對率來看（林福來， 1994 ），我國的高二學生在否定敘述的表現上，於各種量詞中問題的答對率分別爲：

- 無量詞的敘述與量詞爲「存在」的敘述答對率在 73% 以上，其中生活情境的答對率比數學情境高出約 10% 。
- 量詞爲「所有」的敘述答對率在 50% 上下，其中數學情境比生活情境高約 6% 。
- 量詞爲「唯一存在」的敘述答對率都在 15% 以下，其中數學情境更只有

不到 7% 的答對率。

調查數據顯示有半數的高二學生可以否定無量詞、量詞爲「存在」、量詞爲「所有」的敘述，就高中數學課程的內容來說，大多數命題的量詞結構爲此三種，因此在證明需求上，已有半數學生擁有學習反證法論證的基本能力。

而在反證法程序的瞭解層面上，調查顯示（林福來， 1995 ）高二學生在層次 1 、 Ⅱ 、 Ⅲ 的人數分佈百分率分別爲 42.5 ， 50.8 ， 4.5 。將層次 Ⅱ 與 Ⅲ 的學生加起來，顯示我國有大約 55% 的高二學生瞭解反證法的論證格式是「否定結論，推得矛盾」，然而眞正瞭解反證法論證是利用「對偶命題等價」的論證原理進行的學生卻只有第 Ⅲ 層次的 4.5% 。

這樣的資訊呈現出高中生學習反證法論證時「只有過程演繹格式的了解，卻無法洞察反證法論證的基本原理」的學習現象。進一步與高中教師訪談，發現學生在反證法的瞭解上有三個主要的學習問題，即「不知道反證法的使用時機」、「無法否定結論」、以及「不瞭解反證法的原理」三方面。對此三個問題，進一步說明如下。

一、不知道反證法的使用時機

什麼樣的問題可用或該用反證法是學生的主要困惑，高中生在解一個證明題時，往往是因爲想得出來的方法都無效以後才用反證法試試看，因此即使一個問題的結構是適於反證法的，學生也無法馬上想到要用。

根據訪談 6 位大學數學系教授的說法（林福來， 1994 ），適合用反證法證明的數學問題有其特質。在受訪的教授中有五位教授提到無法正面直接加以證明的命題，若將結論否定比較容易操作，這樣的問題適合用反證法，也就是說「否定後有明顯表徵，容易操弄的命題」適合用反證法，例如證明「$\sqrt{2}$ 是無理數」。有一位教授認爲公理化系統一開始時，因爲還沒有建立足夠多的定理做爲演繹基礎，因此必須大量使用反證法，例如「歐氏幾何的部份命題、有理數的稠密性、實數的完備性」等都要用到反證法。

從大學教授的訪談資料中可以發現，對於反證法使用時機的了解，基本上需要依賴豐富的數學知識與證明經驗作爲反思的基礎，方能歸納出特性。對高中生而言，數學知識與證明經驗都還不夠充分，所以對使用時機的困惑是很自然的。

二、無法否定結論

研究顯示（林福來， 1994 ）在否定敘述的了解方面，高二學生對無量詞的敘述與量詞爲「存在」的敘述答對率在 73% 以上。量詞爲「所有」的敘述答對率在 50% 上下。量詞爲「唯一存在」的敘述答對率都在 15% 以下，其中數學情境更只有不到 7% 的答對率。

從這樣的數據來看，除了無量詞與量詞爲「存在」的敘述答對率在 3/4 左右外，眞正含有量詞「所有」與「唯一存在」敘述的否定很難，顯示高二學生在進行反證法論證時第一個步驟（否定結論）上的表現就可能出現問題，因此接續的論證也就無法完成。

三、不瞭解反證法的原理

在老師以反證法證明完 $\sqrt{2}$ 不是有理數後，學生最常見的反應就是「否定結論、推得矛盾，爲什麼就證完了？」。也就是說學生並不瞭解反證法背後「對偶命題等價」的論證原理。

從我國學生反證法程序的了解層次來看，有約 55% 的高二學生知道反證法進行的程序（否定結論，推得矛盾），然而卻只有不到 5% 的學生知道反證法的論證原理（若 p 則 q 與若～ q 則～ p 兩命題等價），因此反證法程序層面中層次 II 的高二學生（約全體高二生之半數）並沒有證據顯示他（她）們知道爲什麼這樣做就證完了。

由上述數據推知，我們的高二生確定學到的反證法是一種寫證明過程的格式，可是並不知道眞正的原理是什麼。

參、研究目的

學生的學習問題都是教育研究的好題材。在現行數學課程安排中，教材裡「 $\sqrt{2}$ 爲無理數」是學習的主體，而反證法只是用以證明此一知識之合法性的工具，因此提昇學生反證法瞭解層次的教學不可能佔用太多教學時間。在這樣的考量下，本研究對探究性教學自訂時間限制，以不超過兩節（ 100 分鐘）課爲原則，若再加上反證法格式的教學，總時數不應超過三堂課（ 150 分鐘），在這樣的時限下，本研究的探究性教學必須在前述學習問題中做些選擇。

從上一節描述的反證法學習問題中，在教學的時限下，「不知道反證法的使用時機」的問題並不適合作爲實驗的問題。從大學教授的訪談結果中可以發現，此學習問題主要受到知識與經驗的影響，然而我們的中學生並沒有足夠的數學知識與論證經驗，他們所有的至多就是教材中或學習時可以接觸到的少數證明問題，因此在沒有足夠經驗作爲反思對象的現況下，我們很難以有限時間的教學來幫助學生們瞭解反證法的使用時機。

關於「無法否定結論」的學習問題，高中生對於否定無量詞、量詞爲「存在」、量詞爲「所有」的敘述而言，仍有約半數的學生可以完成，對於在高中階段學習反證法來說已粗具基礎。而對否定量詞爲「唯一存在」的敘述，以及數學知識中常用連接詞「且」、「或」連結的敘述之否定，則仍有進一步研究之空間。

關於「不瞭解反證法的原理」之問題，調查顯示瞭解反證法格式與瞭解反證法之論證原理之間有 50% 的落差，此一差距急需進行探究性教學以探討縮短差距之可能性，因此本研究選擇反證法的論證原理—對偶命題等價—爲教學目標。研究目的可敘述如下：

- **發展教學策略並進行探究性教學實驗，以使學生瞭解對偶命題等價。**

肆、命題題材的選擇

培養學生辨識對偶命題等價的能力時，首先需考慮到底要用哪一種題材的命題作爲學習的媒介。一般而言，有兩種題材可供選擇，即數學題材與生活題材。

一、數學題材

利用學生瞭解的數學知識當作命題，例如「若 $x \geq 2$ ，則 $x^2 \geq 4$ 」。此時學生要分辨此命題與「若 $x < 2$ ，則 $x^2 < 4$ 」、「若 $x^2 < 4$ ，則 $x < 2$ 」、「若 $x^2 \geq 4$ ，則 $x \geq 2$ 」何者等價時，可以針對每個命題分別判斷其數學上的對錯，然後挑出同時對或同時錯的命題來觀察其語句的形式。

二、生活題材

利用學生容易聯想的生活經驗當作命題題材，例如「若下雨則馬路濕」，而學生要分辨此命題與「若沒下雨則馬路不濕」、「若馬路不濕則沒下雨」、「若

馬路濕則下雨」何者等價時，經由學生經驗的回憶與討論，來判斷同時對與同時錯的命題，也可以辨認出合於邏輯規則的等價命題，並據以建立從生活經驗到抽象規律的轉換橋樑。

研究顯示（林福來，1994）在辨識對偶命題的問題上，高二學生的答對率在生活情境中爲 12.9% 而在數學情境中爲 13.6%，顯示兩種情境並無差異，因此在選擇教學題材方面，數學命題與生活命題的題材並無瞭解上的差異。而從第一節的討論中得知，在生活中人們其實已累積了許多命題，並常常在不察覺的情況下利用其對偶命題來反駁或確認某種說法。因此，利用對偶命題等價的原理所進行的反證法除了是發展數學知識不可或缺的論證方法之外，更是一般人在生活中進行論辯的重要思維。基於培養國民理性思維的長遠理想，本探究性教學選擇生活題材作爲教學題材，因而使此項教學可擴及一般之中等教育學生，而不以高中生爲限。

選擇生活題材後，首先要澄清在一般人的生活語言中，解讀一個生活命題的思維有什麼特質，爲什麼這樣的解讀思維時常會造成與邏輯推理不合的現象。探究性教學就是爲了設法破除此種思維的障礙，導引學生遵循邏輯規則推論的思維策略。有關生活命題的思維將在下一節中說明，而針對此種思維特質，本研究提出一教學策略的基本假設，將在第陸節中陳述。

伍、生活命題的思維

在日常生活中有許多使用到反證法的經驗，例如不在場證明就是利用「若是作案者必在場」與「若不在場必不是作案者」兩者等價來證明。一個人面對「你是不是壞人」的問題時，往往會以「我又沒有作奸犯科」來證明自己不是壞人，這種證法也是利用「若是壞人則會作奸犯科」與「若沒有作奸犯科則不是壞人」等價來證明。在生活情境中有許多因果關係的經驗，這些經驗便累積成一個個「若…則…」的規律，當我們面對相近的情境時這些因果關係的規律便提示我們該如何「趨吉避凶」，此時的思維方式往往就是反證法的方式。

從反證法瞭解模式來看，學生最大的困難在於不瞭解對偶命題等價的論證原理。由於現行課程並未針對命題等價的了解設計教材，因此學生對兩命題間是否等價的判斷基本上依賴生活情境中語言使用的經驗。然而我們對命題等價與否的判斷往往與邏輯規則不同，例如前述的「下雨與郊遊」與「校長遴選」問題都是

將「若p則q」與「若～p則～q」看成一樣；又如「下雨天騎車要穿雨衣」這樣的經驗規則常常被當作「看到有人穿雨衣騎車表示下雨了」來用，也就是認爲「若p則q」與「若q則p」意思一樣。

這樣的例子表現出生活情境中的命題，一般人所認定的等價命題往往不是它的對偶命題。造成這種語意與邏輯規則不同的原因，主要在於語意的認定與思維方式往往有社會約定的成分，或者是受到語言使用的習慣或經驗所影響，因此與邏輯有所不同，而且不同的想法在語言外表的顯現上可能相同。因此，單純就「若p則q」與「若～p則～q」或「若q則p」等價的表象來區分語言思維與邏輯思維的差異並不適當。故而在分析上述例子中影響思維的因素時，應當深入分析解讀命題的特性與對話中的思維過程。以下就閱讀命題時語意、思維方式、與邏輯判斷之間的互動影響來分析造成「若p則q」與「若～p則～q」或「若q則p」被視爲等價的一些原因。

一、對話中將命題的前提視爲唯一條件

生活語言的使用有許多隱而不見的因素在影響語意，甚至有些時候語句使用的時間、對象也可能代表不同意義，因此一句話的語意必須放在整個對話脈絡中，才能正確地解讀並做出適當的回應。

在「下雨與郊遊」問題中，學生舉辦一場郊遊邀請老師參加，對學生而言，對話的重點在於獲得老師去或不去的回答。如果老師回答去或不去，就是一種明確的回答，然而老師以一個命題形式作爲回答，這表示老師不是一定要去或一定不去，而是在「下雨」的條件下才不要去。此條件立即被學生解讀爲唯一且絕對不去的條件，換句話說老師的回答被視爲是一種只針對下雨所作的承諾，在這種認知下，老師所說的話就被學生解讀成：「只有下雨的情況老師才不跟我們去郊遊」，當這個絕對條件不合時，老師自然就會去了。

而在「校長遴選」的問題中，在當時的情勢下，社會所關心的焦點在於師大願不願意派員參加教育部的遴選委員會，最明確的回答當然是願意或不願意；然而師大以一個命題形式回應，因此命題中的前提自然地被視爲是師大願意派員的唯一條件，這麼一來，師大的決議就與「如果教育部不接受師大推薦的校長候選人，則師大就不願意派代表參加遴選委員會」的意義相同。

在這兩個例子中，語意認定在整個對話的脈絡中有語言使用上約定俗成的蘊

藏性語意，在兩個焦點事件中這種「若 p 則 q 」的條件式回應，蘊藏著 p（接受；下雨）是 q（派代表；不去郊遊）的唯一條件。此種蘊藏性的語意便導致「若 p 則 q 」與「若～ p 則～ q 」同義的推論。

二、對未來事件推論時相對詞性的一致性

分析上述兩個例子可以發現，在對未來事件作推論時，語詞在語句格式內主被動與時態等詞性的一致性都影響一個人如何回應一句話。

在「下雨與郊遊」的例子中，由於「下雨」發生的時間在「不去郊遊」之前，因此整句話在兩件事的相對時序上是呈現出「若（前事件）則（後事件）」的格式。這種相對詞性的格式成爲語意的一部份。現在要對此事件作推論，習慣上較不可能用（後事件）去判斷（前事件）發生與否。因此在回應這句話的語言上，自然也以此「若（前事件）則（後事件）」的格式相應。這樣的想法使得回應時，只有格式上保有相對詞性一致性的「如果不下雨他就去郊遊」是自然的解讀。

而在「校長遴選」的例子中，由於教育部的施爲爲一主動狀態，而師大只是被動回應而已，因此整句話的格式爲「若（主動）則（被動）」。這樣的格式也成爲語意的一部份，因此在回應此句話時，由於是對未來事件的詮釋，因此不可能以（被動）去推論（主動），因而保持相對詞性一致的「如果教育部不接受師大推薦的校長候選人，則師大就不願意派代表參加遴選委員會」自然成爲大衆的解讀方式。

上述分析顯示語言中的詞性具有格式框架的作用，因此對未來事件推論時相對詞性的一致性可以使人認爲「若 p 則 q 」的意思就是「若～ p 則～ q 」。

三、二分對等語句的自然對應

訪談台師大數學系二年級學生時發現，學生知道在邏輯上與命題「若 p 則 q 」等價的命題是「若～ q 則～ p 」，然而在「下雨與郊遊」的例子中則選擇了「如果不下雨他就要去郊遊」作爲等價語句。學生表示「下雨與不下雨」合起來是全部，「去郊遊與不去郊遊」合起來也是全部，原來說「如果下雨就不去郊遊」，那現在不下雨再去對應不去郊遊就不合理了，所以就是「如果不下雨他就要去郊遊」。很明顯地，這位同學所作的不是邏輯推論而是語句對應，這樣的思維在生

活經驗中也常常見到。

我們在生活情境中會根據經驗建立一些事件間因果關係的知識，例如「會冷穿外套」，「會熱脫外套」，「下雨穿雨衣」，「不下雨不穿雨衣」等，隨著經驗的累積與知識的建構，在同一個情境背景中的經驗或知識便會被組合在一起，成爲一個特定情境中的知識體系，並用以調適在該情境中不同條件下的行爲反應。例如前述個別經驗就在情境屬性的組合作用下被合而成爲「會冷穿外套，會熱脫外套」，「下雨穿雨衣，不下雨不穿雨衣」兩個知識。而這樣的組合使同一個情境下事件的對立性被突顯出來，如冷對熱、穿對脫、下雨對不下雨、穿雨衣對不穿雨衣。很明顯地對立事件（冷對熱，下雨對不下雨）會引發對立的行爲反應（穿對脫，穿雨衣對不穿雨衣），因此一個命題形式的語句（會冷穿外套，下雨穿雨衣）自然有一個對立事件所成的語句（會熱脫外套，不下雨不穿雨衣）與之對應。一般來說對立不一定就是否定，例如會冷與會熱是對立的，但對溫度的感覺除此之外還有不冷不熱，在這種情境中我們可以作爲對應的語句就會有多種可能。而當兩敘述恰好二分對立時（下雨與不下雨）時，這樣的二分對等語句就成爲唯一的，並成爲一個對話中自然的思維互動系統。因此在判斷語句是否等價時，若兩命題的前提與結論間互爲否定敘述，亦即爲二分對等語句，此時自然就只有一種對應方式，就是「若～ p 則～ q 」。

四、生活中合理推論所形成的判斷準則

在「下雨天騎車要穿雨衣」的例子中，主要表達的是一個生活中判斷某事件的規則，然而當我們看到一個人穿著雨衣準備出門騎車時，往往就會認爲外面正下著雨；當然，很多人也會認爲沒下雨時騎車是不必穿雨衣的。

在眞實情況中，穿雨衣可能是爲了預防會下雨，也可能只是禦寒，但是生活中大多數時間裡穿雨衣騎車確實是因爲下雨，因此「穿雨衣」與「下雨」就漸漸成爲共同出現的現象，並成爲判斷下雨與否的一種依據，因此當我們看到一個人穿著雨衣準備出門騎車時，就會以爲外面正下著雨，對於不下雨而穿雨衣騎車的情況，那是例外，不影響我們判斷下雨與否的這個準則的適用性。

因此在生活中我們往往以經驗的累積形成一些「很有可能」或者說「幾乎就是」的命題作爲合理判斷的準則。哥倫布航海時利用觀察到的飛鳥與海上漂流的樹枝，推論即將到達陸地來安慰心情不定的船員，正是利用這種經驗準則。誠如

曹亮吉 (1996) 所說，飛鳥與樹枝並不是鄰近陸地的必要條件，但看到飛鳥與樹枝就「幾乎一定」鄰近陸地，因爲飛鳥與樹枝都很少遠離陸地，因此與鄰近陸地有著非常密切的關係，連續看到飛鳥與樹枝這兩個「通常」不會遠離陸地的東西，這使得鄰近陸地的可能性就相當地高，雖然沒有邏輯上的依據，並且可能發生例外，但是從經驗累積的觀點來看，這已是定律。這種生活中允許例外的判別標準與數學中非眞即僞的二分邏輯是不同的，正如黃家鳴 (1995) 所說，一般而言生活中並不需要對事理絕對肯定，只要有關的肯定程度足以讓人選擇適當的行動即可；對於一般性的說法（相當於數學中的全稱命題）往往允許或被認爲可以有例外的情況；在這些關於一般性說法的特質上與數學中全稱命題的絕對眞確、絕無例外有相當大的不同。

也就是說，在眞實情境中造成一個結果 (q) 的可能原因有許多 (pi)，然而由於不同的原因出現的頻率並不相同，因此在認知上就逐漸地將某個常常出現的原因與這個結果看成同時發生的事情，因此「若（某個 pi) 則 (q)」就是「若 (q) 則（某個 pi)」，這樣就會使推論時認爲「若 p 則 q」與「若 q 則 p」是一樣的；或者「若（某個 pi) 則 (q)」就是「若沒有（某個 pi) 則沒有 (q)」，此時推論時就會把「若 p 則 q」與「若～ p 則～ q」看成一樣。

上述的分析說明了在生活情境中一般人認爲「若 p 則 q」的等價命題爲「若～ p 則～ q」或「若 q 則 p」的可能因素。但是生活情境中並不是時時刻刻都會把「若 p 則 q」、「若～ p 則～ q」、「若 q 則 p」看成一樣的，例如「如果下雨則馬路會濕」，在經驗中很容易知道造成馬路濕的原因可能是有人潑水、大貨車滴水等等，因此即使不下雨馬路還是可能會濕，而馬路濕也不見得就一定是下雨了。在這個情境中，這些 pi 都是很容易聯想到的，因此我們就比較不容易誤以爲某個 pi 與 q 是充要條件。

陸、研究方法

一、教學策略

我們已經知道學生在反證法的了解上最大的問題是無法辨識對偶命題等價。而本研究的探究性教學選擇生活命題作爲題材，雖然在生活中我們累積了豐富的經驗以對偶命題來推論某些見解，然而從高二學生反證法程序的瞭解層次中第 II

層與第Ⅲ層間將近 50 % 的落差可以知道，一般人並未將此種思維方式與邏輯規則相連結，因此即使用了這樣的推理方式也不自覺。又由前節所述，在生活情境中命題等價的問題常常受到「對話中將命題的前提視為唯一條件」、「對未來事件推論時相對詞性的一致性」、「二分對等語句的自然對應」、「生活中合理推論所形成的判斷準則」等思維方式的影響而產生語意判斷與邏輯規則不同的情況，這顯示在生活中自然的思維並非邏輯性的，而且這種因生活經驗而形成的思維方式很難自然地改變。

因此，要從生活命題中形成對偶命題等價的邏輯思維必需有一個轉化的過程，本研究認為可以用學生有充分經驗的生活命題為起點，從中發現「若 p 則 q 」、「若～ p 則～ q 」、「若～ q 則～ p 」、「若 q 則 p 」四組命題的眞僞規律，並以符號化的形式形成對偶命題等價的形式規律；而在進行反證法論證時，學生就可以有一個形式化的規律作為依據，只要將論證的敘述轉譯成符號命題的格式，則其論證規律就可脫離語言情境思維的束縛而運作，而運用符號化的論證規律來推論，就可以保證原敘述在進行推論時的邏輯嚴密性。根據這個想法，本研究教學策略的基本假設為：

- **將生活情境中命題的眞僞關係符號化以形成對偶命題間的符號規律，據此規律推論再轉譯，可增進學生對反證法論證原理的瞭解。**

本研究根據此一假設設計教學活動並進行探究性教學。

二、教案設計原則

設計教學活動時，首先擬定教案設計原則，選用生活命題作為對偶命題等價的起始例，選用數學命題作為反證法的應用例，然後進行教學。雖然學生已在國中時有反證法論證的經驗，不過本研究之教學主要在於使學生能辨識對偶命題等價，從而形式化成思維規則，然後再與反證法結合，因此並不直接從反證法為何有效的起點進入。

本研究顧及一般學校多為 50 分鐘一堂課，數學課通常會有一次連續兩堂之排課，因此辨識對偶命題與反證法兩部份可能無法一次上完，因此將此兩部份分離成兩個單元，以利實際教學之時間調配。教案設計主要遵循下列原則：

1. 診斷教學的策略

學習活動中，學習兩個命題間是否等價的判斷難免出錯，教學時選擇導引

學生進行同儕討論的策略，以形成犯錯的認知衝突，進而調整想法，再做判斷。此策略經 Bell (1993) 實證為一有效之策略。

2. 引導式發現學習

教學假設中將實例中命題的眞僞關係符號化以形成符號規則，其具體的作法乃是在生活情境中給定命題「若 p 則 q 」，就其相關命題「若～ p 則～ q 」、「若～ q 則～ p 」、「若 q 則 p 」引導學生觀察「同時對、同時錯」的命題關係，並主動描述此關係。過程著重於將學生既有的生活經驗與知識引導至命題間格式的對照與分辨，從而使學生自己發現對偶命題等價的命題格式，並讓學生以自己的符號去描述此一格式關係，這樣的教學過程便是引導發現式 (Guided-discovery) 教學法 (Bell, Costello & Kuchemann, 1983)。

3. 等價命題之判斷從「語意判斷」過渡到「形式判斷」的學習經驗必須充份、有效。

本教學設計預定最多三節課（ 150 分鐘）施教完畢，然在此限制下，對於教學重點：等價命題的語意推斷與形式推斷間的過渡，仍盡可能提供充份的過渡經驗。尤其側重將等價命題間的關係符號化的學習活動。

4. 教學目標是論證法

反證法的論證除了格式與原理的瞭解外，演繹過程中涉及的數學知識與操作往往也是學生很大的負擔，本研究中反證法原理的了解是主要學習目標，因此並非特定數學教材的反證法論證。

依據上述原則，本研究擬定教案內容如附件：探究性教學教案。

三、探究性教學

本研究選用生活命題爲題材，以引導發現式的學習作爲主要的教學方法，引導學生將實際經驗的生活命題符號化以形成命題間等價的規律，並以此規律對照命題以進行推理。這種學習過程僅是一種可能有效的合理推論，教學前並不能預期學生的學習會是如何。因此僅能就教學過程中學生的學習情況加以記錄，以及教學後對偶命題等價的瞭解情況進行評估。

四、學習過程記錄與成果評估

探究性教學的過程主要探索學生能否發現規律、能否符號化、能否將此規律用於其他命題等。這些主要的診斷活動均列爲教學活動之一部份，由教師執行並記錄（參閱附件），而教師的介入方式與學生的想法、所使用的表徵亦由教師加以記錄，以供分析之用。

學習成果之評估主要是呈現學生反證法瞭解層次的分佈情形，並與高二學生作一比較，同時比較實驗學生與高二學生在各類試題中的回答情況，以評估此項教學的實效，因此測驗工具與測驗方式均採用與調查高二學生相同的「反證法的了解測驗卷」（林福來， 1995 ）。

五、研究樣本

本研究認爲對偶命題等價爲重要之論證原理，對任何人而言都是重要的，因此教學對象無須自我設限，在考量教師的配合意願與實施之方便性後，選擇五專生作爲教學對象，實驗對象爲：

實驗組一：五專商科一年級 47 人。

實驗組二：五專工科一年級 23 人。

雖然專一生與高二生有年齡與學科環境的差異，不過本研究之施測於學年末進行，受測學生的年齡與高二生相當。而根據一般經驗，五專通常爲國中生升學進路中次於高中的選擇，選擇就讀五專的學生多半在高中聯考時表現較差，而五專之數學課程中對證明之需求較少，本研究之樣本中商科學生在數學課中從未接觸與執行正式的數學證明。因此專一學生對反證法的瞭解主要基於國中之學習經驗，應不致優於高二學生。同時基於同年齡層學生之認知情況應無重大差異之想法，本研究認爲以參與實驗的專一生的學習成果對比高二生的瞭解，實驗的效果只會低估，不會高估。

柒、實驗教師的觀察記錄

一、實驗組一

㈠單元一：辨識對偶命題，教學時程約 85 分鐘， 47 人。

1. 教學之初學生以生活命題的思維判斷命題間是否等價

・例 1 ：「子曰：『學而不思則罔』。國文老師：『學而思則不罔』。國文老師有沒有誤解孔子的話？」。

認為國文老師有誤解的有 40 位，無誤解的有 7 位。認為有誤解的理由包括：

「感覺不對，怪怪的」

「孔子沒有說怎樣會不罔」

「學而思還是會罔，就像我」

顯示學生是以直覺與個人經驗的反思當作證據提出反駁。

- 例 2 ：「判斷下列四句話的對錯：『若下雨則馬路濕』，『若沒下雨則馬路不濕』，『若馬路濕則下雨』，『若馬路不濕則沒下雨』」。
- 例 3 ：「判斷下列四句話的對錯：『明天若是禮拜天則不上學』，『明天若不是禮拜天則要上學』，『明天若不上學則是禮拜天』，『明天若要上學則不是禮拜天』」。

例 2 與例 3 命題的對錯判斷部份，例 2 較分歧，例 3 因實驗班學生週六恰好無課，因此根據經驗能做正確判斷。在例 2 中第三句「若馬路濕則下雨」有近半數學生認為是對的，因為：「通常我都是這樣判斷的」。顯示學生確實在生活中依合理判斷形成一些判斷準則，並用以判斷生活中的事件。

第四句「若馬路不濕則沒下雨」有 9 位同學認為是錯的，因為：「下雨可能剛好沒下到這一塊」。顯示學生以所能想到的特例來反駁某種說法。

在經過全班討論，去除特別情況後學生都能修正看法而與例 3 一致。

2. 學生能在適當排列方式書寫的命題間發現對偶命題的格式，並能舉用記號與短語表達同時對的命題形式

- 學生在例 2 與例 3 討論出同時對同時錯的命題之後，教師要求學生觀察兩個例子以找出規律，但是學生受到語詞意義的吸引而無法看到命題格式，此時老師在黑板上將同時對與同時錯的命題一上一下寫在一起：

“若　下雨　則 馬路濕”	“明天若　是禮拜天　則 不上學”
“若 馬路不濕 則 沒下雨”	“明天若　要上學　則 不是禮拜天”
“若　沒下雨　則 馬路不濕”	“明天若 不是禮拜天 則 要上學”
“若　馬路濕　則 下雨”	“明天若　不上學　則 是禮拜天”

再要求學生觀察這些同時對同時錯的命題之間有沒有一般性的型式，結果

有學生用手指著黑板上的敘述說：

「這個和這個意思反過來，然後位子也反過來，結果都是一樣的」，

或者說：

「順序交換且意思相反」

「否定然後倒過來」

顯示學生在排列良好的文字間能看到命題格式，並發現對偶形式的命題等價，然而所發現的規則仍是視覺性的描述，並未主動符號化。因此教師要求學生用書寫的方式表達此一關係。在學生討論的過程中教師鼓勵學生使用簡潔的方式表達敘述與其否定敘述，並在黑板上展示學生所提出的不同寫法，例如：

「若□則△；若×△則×□」

「若這句話則那句話；若否定那句話則否定這句話」

此時學生能以記號或短語來描述，並未使用文字符號。

3. 將命題與記號形式連結是正確判斷的關鍵步驟

・例 4 ：「『若 n 是奇數則 n ≠ 2 』這句話還可以怎麼說結果也對？」

例 4 提出後約 4 分鐘有 3 、 4 位同學陸續提出正確答案，教師此時指定這些同學去與其他同學討論他們的想法，並傳衍他們的想法，整個討論過程歷時約 30 分鐘，最後有 35 位同學可以提出正確的結論。討論初期學生大多仍在奇數偶數與 n 等不等於 2 上做零碎的辨認，認知轉變的關鍵在於小組的指導學生提出：

「你看，就像黑板上那個（若□則△；若×△則×□），現在□代表 n 是奇數，則△代表 n 不等於 2 ，就跟若×△則×□是一樣的，就是若 n=2 ，則 n 是偶數」，於是小組成員利用自己先前舉用的記號將原命題轉譯成符號命題，取其對偶命題後再轉譯回數學命題，寫出對偶命題。換言之將語句與記號表徵連結後才成功。 30 分鐘的討論過程中均由同儕互動，教師僅做「黑板上那個跟這個像不像」的口語介入。

4. 學生使用記號取代敘述並能正確判斷兩命題是否等價

・例 10 ：「『若數學考 100 分則有獎品』與『若數學沒考 100 分則沒獎品』兩句話等不等價？」。

判斷命題是否等價時，學生承續前例的作法，將命題符號化，取對偶命題

再轉譯成文字命題，過程中仍舊使用□、△的記號取代敘述進行判斷。經抽問 7 位同學判斷均正確，顯示學生已能以形式化規則進行判斷。回頭判斷例 1 時認為老師有誤解的有 37 人，無誤解的有 3 人，另 7 人則睡著了。

(二)單元二：反證法論證，教學時程 55 分鐘，含約 10 分鐘的複習前次課程，45 人。

1. 經 10 分鐘複習後，學生可以判斷兩命題是否對偶

・例 12 ：「設 n 是正整數，『若 n^2 是偶數則 n 是偶數』」。

例 15 ：「設 n 是正整數，『若 n^2 是奇數則 n 是奇數』」。

例 12 與例 15 是否對偶的問題提出後，多位學生詢問何謂對偶，因而進行約 10 分鐘的複習課程以 $P \rightarrow Q$ ，$\sim Q \rightarrow \sim P$ 的形式解釋對偶與等價。複習後能判斷對偶與否的學生有 42 人，不能的有 3 人。

2. 學生以運算性表徵表示數值關係並進行論證

・以例 12 進行數學論證時，學生的直觀已接受此一命題的正確性，因此不認為需要什麼證明。在教師一再地追問下，學生開始互相討論，不過沒有討論出適當的方式，因此教師介入講述，提示學生可以利用對偶命題，並確認其對偶命題，然後交由學生討論演繹過程，學生在接續的討論中能說出：

「奇數是 2 的倍數加 1 ，用平方公式 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 會有兩個偶數再加 1 ，所以還是奇數」

學生意思是 a 是一個偶數， $b = 1$ ，再解讀等號右邊之奇偶狀態。

於是教師將奇數的形式表示法提示，並讓學生進行實作。在此段落中對偶命題的形式就標示於黑板上，因此反證法的格式直接顯現於黑板。例 15 的實作學生均能很快的進行，但因例 12 的論證過程仍留黑板上，因此僅能確定學生至少能夠模仿論證。

3. 學生將對偶命題等價視為符號規則

・學生仍有國中學習歸謬法的記憶，大多數同學的印象是：

「把要證的否定，然後證明證到不對，那原來的就對了」

至於為什麼這樣證可以證出來，有部份學生仍表示：

「以前不知道，現在知道是利用對偶，不過對偶只是一個規則，沒有什

麼感覺。」

顯示在約三小時的教學後，部份學生固然學到對偶命題等價，但還不能洞察其理。

二、實驗組二

(一)單元一：辨識對偶命題，歷時約 60 分鐘，23 人。

1. 學生舉特例作爲判斷基礎

・例 1 中認爲國文老師有誤解的學生有 19 人，無誤解的有 5 人。經抽問認爲有誤解的理由包括：

「想不通或想不出來，還是會迷罔。」

「只有思考是不夠的，還要加上發問及練習才會不罔」。

・例 2 中原有 3 人認爲「若下雨則馬路濕」這句話不對，理由如：

「海水倒灌也會馬路濕」

經同學間的討論與釐清後全班皆能正確判斷。

・例 2 、 3 中各命題的對錯。在例 2 、 3 中學生較質疑的是各命題在一般狀況與某些特殊狀況中對錯答案不一致，例如：

「馬路上有沒有搭帳棚？」

「星期天來校參加運動會算不算上學？」

老師需引導學生在一般的狀況下判斷各命題的對錯。

2. 學生以文字符號取代敘述的形式表達規則

・在學生能判斷命題對錯後，教師要求學生以簡單符號表達形如「若…則…」的命題。學生則使用文字符號表示，如：

「若 x 則 y 」

「若 α 則 β 」

「若 A 則 B 」

經討論後全班同意採用「若 x 則 y 」來表示。

在老師引進否定詞的觀念後，學生舉用「若-x 則-y 」與「若-y 則-x 」來表示另兩個命題。表達對偶命題的關係時學生的敘述如：

「相反成負號」

「左右顛倒加負號」

「加負號再反過來」

3. 學生在數學情境中能正確回答，但在生活情境中又受經驗干擾，跳脫此一干擾的關鍵是使用符號規則判斷

・在例 4 中學生很快給予正確的答案。而在例 10 中認爲等價的學生有 14 人，而認爲不等價的學生只有 9 人。經抽問認爲不等價的理由如：

「我雖然考 99 分，但老師還是覺得我表現優良而給我獎品」

顯示學生的經驗中語言的眞確性並非絕對，在不同的情境脈絡中語意可以不是絕對的意義，如同黃家鳴 (1995) 所說，在日常生活中一般性的說法往往被允許有例外的情況，因此一句話的意思往往會因當下的情況或需要而有不同。

・老師再重述對偶命題的符號關係與對偶命題的等價性後，經 10 分鐘的討論， 23 人一致認爲例 10 中的兩句話不等價，理由是「只加負號沒有顛倒所以不等價」，由此可見以符號規則思考可以跳脫生活經驗之干擾。

(二)單元二：反證法論證，歷時約 40 分鐘， 23 人。

1. 學生以加否定詞的方式表現否定敘述，以運算性表徵表現數值關係

・例 12 中，學生回答其對偶命題爲：

「若 n 不是偶數則 n^2 不是偶數」

老師將「不是偶數」這句話改爲「是奇數」問同學們有沒有意見。之後老師又提問「怎樣的數是奇數？」，學生的答案爲：「除 2 餘 1 的數」

於是老師將其表成 $n=2k+1$ ，讓學生計算 n^2 ，再判斷 n^2 是不是奇數。

2. 學生可以用反證法的格式證明

・例 15 實作反證法時，學生均能很快的進行，其中有 18 個學生完全正確但在實作過程中，例 12 的論證過程仍留在黑板上，因此僅能確定學生至少能夠模仿論證。

三、整體的學習情況

綜合兩組學生的學習情況可以發現：

1. 學生起始對生活情境中等價命題的判斷依賴經驗準則

學生在教學起始例中（例 1 、 2 、 3 ）的反應顯示個人的直覺與經驗強烈影響等價命題的判斷，其思維基本上都只是語意或經驗的反射，因此對於

熟悉的生活經驗（如例 3），可以提出正確的判斷，但對較不熟悉的情境則僅只能以直覺來判斷。

2. 學生能發現對偶命題等價的關係並以符號表示等價的命題

從例 2 與例 3 的討論中學生發現了同時對同時錯的命題格式規則，並且能舉用記號、短語、或文字符號來表示，雖然兩組學生舉用的符號相當不同，但都表現出學生能以形式化規則來表徵等價的命題。

3. 依形式化規則轉換是學生能正確判斷命題等價的關鍵

實驗組一學生在例 3 中與實驗組二學生在例 10 中都呈現出困難，而克服此障礙的關鍵性步驟都是將命題格式與形式化規則相連結，學生參照形式化規則後便可以進行正確的判斷。

4. 學生的結構性代數思維可能尚未發展完備

兩組學生在例 12 中對於奇數的表示法都用了非符號化的方式表達，實驗組二學生有「除以 2 餘 1」的說法，此時奇數的概念是以運算程序表徵，而在隨後對「奇數的平方仍是奇數」的證明中，這樣的表徵方式使學生無法操作論證而需教師直接告知奇數的形式表徵 (2k+1) 才能進行，顯示學生只有以算術運算表徵的概念，而無法將此算術運算過程物化成一結構單元 (Entity)，所以造成學生無法據此表徵進行證明，也就是說學生的奇數概念尚未能從運算性思維過渡到結構性思維 (Sfard, 1991)。

實驗組一學生對於奇數則有「2 的倍數加 1」、「偶數加 1」的表徵方式，從學生的論證過程來看，這樣的表徵可用以進行證明，不過證明過程由於必須對照平方公式的每一項說明奇偶性，因此顯得笨拙而不易推論。

捌、學習成果評量

本研究在教學實驗後一個月對學習成果作一筆測，測驗工具為「反證法的了解測驗卷」（林福來，1994），與高二學生反證法瞭解研究的筆測試題相同，答案分類亦依照與分析高二生相同之方式。

一、施測結果逐題分析

施測各題答對率與高二生對照表

	一(1)	一(2)	一(3)	一(4)	三	四(1)	四(2)	四(3)	四(4)	五	六(3)	七	八
實驗組一	93.6	8.5	23.4	76.5	25.5	63.8	34.0	8.5	91.4	31.9	34.0	34.0	36.1
實驗組二	60.9	30.4	8.7	65.2	43.5	56.5	17.4	0	69.6	34.8	21.7	13.0	60.9
高二生	92.9	14.3	46.4	84.3	13.6	73.6	52.9	6.4	84.2	12.9	29.3	9.3	50.7

分析：

(一)實驗組學生在辨識對偶命題的問題上明顯高於高二生

實驗組一在辨識對偶命題的問題上（題三、五、七）答對率比高二生高，其中題三高出 12% ，題五高出 19% ，題七高出 26% 。而實驗組二在題三的表現高出 30% ，題五高出 22% ，題七高出 5.2% 。

(二)學生在不同情境中辨識等價命題的表現無明顯差異

實驗組學生能辨識等價命題者在生活情境中能辨識的有 31.4% ，在數學情境中能辨識的有 32.8% ，顯示兩種情境無明顯差異。

(三)本探究性教學對部份學生在敘述的否定上形成干擾

1. 本探究性教學主要目的爲使學生瞭解反證法的論證原理，因此否定敘述的能力方面並非教學重點。
2. 實驗組二在否定敘述問題上答對率較低，主要原因是學生將單一敘述解讀爲命題形式，因此回答時以對偶命題回答，如題一(1)回答「若有下雨則不是現在」，這樣的回答在生活情境中佔約 17 ~ 30% ，而在數學情境中則佔約 21 ~ 30% 。顯示教學中所強調的命題格式「若…則…」誤導了學生，使部份學生在否定單一敘述時仍舊套用命題格式，並以對偶命題當作其否定敘述。

從上述分析來看，實驗組學生在辨識對偶命題方面明顯較高二生好，其中單純辨識對偶命題（題三、五）的答對率均在 25% 以上，而能以對偶命題描述反

證法的原理（題七）則答對率分別爲 34% 與 13% ，均高於高二生的 9.3% ，顯示本研究針對反證法的論證原理之教學對學生而言有相當的效果。

二、反證法程序瞭解層次分佈分析

實驗組學生與高二生的瞭解層次對照表

班別＼層次	0	1	Ⅱ	Ⅲ
實驗組一	2.2	45.4	34.0	18.1
實驗組二	15.7	21.0	42.1	21.0
實驗組合計	6.3	38.0	36.5	19.0
高　二　生	2.2	42.5	50.8	4.5

分析：

㈠實驗組學生達第三層之人數百分率明顯較高二學生高

若忽略兩實驗組就讀科別之差異與施教教師個人特質之不同而將兩實驗組合併成一單位，則可發現實驗組達第Ⅲ層之學生比高二生多出 14.5% 。

㈡本探究性教學對第 0 層與第 1 層之學生而言，效果不大

雖然實驗組學生較高二生多出 14.5% 達第Ⅲ層，但整體來說，實驗組學生有約 44.3 % 在層次 0 與層次 1 ，這分佈與高二生相當，這似乎顯示本探究性教學對原在第 0 、 1 層的學生無明顯幫助。由於本探究性教學主要針對縮短層次Ⅱ與層次Ⅲ間之落差，對於未達層次Ⅱ之學生並未特別照顧，因此這樣的結果並不意外。

玖、教學的啓示

一、將生活語言命題轉換成符號表徵，以符號規則進行推論是有效學習反證法論證原理的關鍵。在整個學習歷程中發現學生思考模式的轉換情形爲：生活語意思維（判斷命題對錯）→符號邏輯思維（對偶命題等價的形式化規則）→退回生活語意思維（造成障礙）→轉換成符號邏輯（依形式化規則判斷）

本研究教學活動中利用例 2 與例 3 的題材讓學生進行辨識等價命題並形成對偶命題等價的符號化規則，例 4 起進行診斷的工作。在實驗組一的教學情況中發現，在例 3 中的判斷因恰好與學生的課表經驗相符，因此判斷上毫無困難，而在例 2 中則思維方式相當複雜，主要的混淆是受「生活中可接受的判準經驗形式」的影響，在經過同儕討論與辯證後，學生能跳脫判準習慣的影響而成功辨認等價命題及其命題上的對偶格式，經由學生自己提出的符號將此規則形式化。而在例 4 中能夠很快利用對偶命題等價判斷者只有 3 、 4 位，而大部份的同學仍在命題的細節上 (如是不是奇數、等不等於 2) 討論。在答對學生向其他學生討論傳衍其想法的過程中，關鍵性的步驟在於學生將命題中的兩敘述去對照黑板上剛剛大家所認同的符號化形式：「你看，就像黑板上那個（若□則△；若×△則×□），現在□： n 是奇數，則△： n 不等於 2 ，就跟若×△則×□是一樣的，就是若 n = 2 ，則 n 是偶數」，也就是將命題與符號規則對照才克服語意思維的影響。而在接續的例 10 與例 11 中，學生就利用此符號規則去代換命題，於是都能成功地判斷出。

二、學習材料作適當排列的書寫有助於學生發現規則

實驗組一的學生在經驗了兩個判斷同時對同時錯的命題後，對於提出其格式上的規律仍有困難，而侷限在捕捉命題中字詞的意義，經教師將所有命題工整排列書寫如：“若____則____”後，學生很快就發現了對偶的命題格式，顯示在引導發現的過程中，教師的板書若能將學習材料做適當的排列，有助於學生發現規則。

三、教學可使達第Ⅲ層的專一學生比高二學生多

高二生落在第Ⅱ層的學生約佔 50.8% ，較實驗組學生 36.5% 高出約 14.3 % ；而實驗組落在第三層的學生約佔 19% ，較高二生 4.5% 也高出約 14.5% 。雖然本研究並未設置對照組以比較學習成果的差異，因此無法推論教學是否能提昇反證法程序的瞭解層次，然而此數據顯示專一學生經驗了三小時對偶命題教學之後，達第Ⅲ層的人數百分率比高二學生高，這個差距的眞實意義値得再深入探究。

四、前提與結論間缺少因果性，以及命題的自明性會阻礙學生思考，因此教學時題材的選擇必須謹慎

學生對於數學證明並非全然相信與接受，而有其個人的偏好，例如我國的準數學教師對於不同數學證明方式的評判標準包括了簡明清楚、容易相信、預備知識少、可操作、嚴謹合理、精簡漂亮等（林福來， 1994 ）。而 Lerman (1993) 利用學生對「三角形內角和爲 180° 」不同證明方式的喜好，將學生分成三種傾向：

1. 經驗型 (Empirical) ：喜歡有具體證據的論證。

2. 邏輯型 (Logical) ：喜歡合理演繹的推論。

3. 審美型 (Aesthetic) ：喜歡視覺的、直觀的方法。

顯示學生有其個人對數學證明方式的審美觀。 Lerman (1993) 的研究也指出學生在形式化證明的了解上有一個主要的問題是跳躍推理的鏈結，證明過程中很容易忽略了某個步驟，因爲它的成立太顯然了，沒有說理的必要。這些證明的觀點與偏好顯示部份學生注重的是證明的「可接受性」，而非「嚴密性」或「邏輯性」，也就是說，對學生而言證明是一種自我溝通的過程，只要能說得有理，易於接受，就是好的證明。

實驗組一學生在例 4 的討論中產生動機的困擾，主要的疑問是：

「這兩件事 (n 是奇數， $n \neq 2$) 怎麼會合在一起有因果關係？」

「這句話意思已經很明白了，爲什麼還要換另一種說法？」

顯示學生在接收數學命題的訊息時，仍要尋找語意上的感覺，由於教學時切入命題格式的觀點主要是因果關係，因此對於本例中兩敘述間的因果關係產生懷疑。另一種反應則顯示學生認爲形式的操作目的在於使自己對此命題有更深的認識，因此對此例中顯而易見的事實已無須進行任何操作。同樣的想法也發生在例 12 中，學生認爲「平方是偶數的數當然自己也是偶數」，因此證明此一顯而易見的事實毫無必要。學生對命題格式變換與證明之必要性的懷疑顯現出學生自我的證明觀，對這些學生而言，數學命題主要表現兩敘述間的因果關係，格式操作的目的是爲了獲得感覺，因此對於顯而易見的命題沒有操作與證明的必要。這樣的現象基本上就是 Lerman (1993) 所說的偏好與注重自我溝通。

因此，對於論證法的學習而言，選擇能讓學生覺得有證明必要的題材是教學

設計時必須謹慎處理的工作。

五、同儕討論與論辯確能形成認知衝突並進而調整想法

診斷教學的理論是承襲 Piaget 的認知發展理論，從學生已有的知識基礎出發，讓學生在同化的過程中，發覺錯誤，引起認知上的衝突，進而得適當的調適成爲新的概念結構。診斷教學的重點在於使學生產生認知衝突，而要讓學生眞正產生認知上的衝突並不容易。在我國，林福來等 (1986) 的教學實驗利用相似人形爲材料，使加法策略的學生在視覺上產生「脖子不見了」的認知衝突，再進以討論教學曾獲致良好成效。而 Bell (1993) 認爲在診斷教學中，同儕討論可以促使認知衝突發生，可以化解衝突而形成新的知識架構，並可藉由進一步問題的深入討論而強化新知識。實驗組一學生的學習過程正呼應了 Bell (1993) 所提討論的教學功能。

進行探索教學時於例 1 、 2 、 3 中發現學生以個人經驗來判斷，例如實驗組一學生在例 2 中第三句「若馬路濕則下雨」有近半數學生認爲是對的，因爲「通常我都是這樣判斷的」，由於這樣的想法是其生活中常用有效的經驗判準，因此學生並不認爲這樣有何不妥，但不同意此看法的同學陸續提出質疑：「潑水散熱也會濕啊」、「洗過車的地方也會濕啊」致使原先誤認爲等價的同學察覺自己判準經驗的不嚴謹，並調整自己的想法，例 4 的學習亦由同儕傳衍與討論完成。在同儕討論與論辯的過程中，經驗的分享與想法的辯駁確實讓學生發現自己的想法有其侷限而產生衝突，這樣的衝突在互動的環境中透過同儕間的辯證與合作很容易調整過來，而在接續的問題中，合作的群體便能以其剛獲共識的想法共同解題，進而強化其新知識。

六、在討論式的學習環境中，教師的介入可以導引學生思考方向

在課堂裡，教師常常介入學生的解題討論中，例如提示學生思考的方向、提示可能有助於解題的知識、提出進一步的問題供學生強化既得知識、提供無力解題的學生稍簡單一些的問題等。

Kieren 與 Pirie (1992) 認爲教學中教師的介入可以產生三種積極的功能。根據其所提出片段知識的動態遞迴之瞭解模式，學生學習一小片段知識的歷程可分成原始知識、製造心像、擁有心像、關注性質、形式化、觀察、結構化、創造發

明等 8 個洋蔥狀層層外包的瞭解層次。瞭解的過程並非線性不斷的向外發展，而可能於外層次折回內層次，利用已有的瞭解爲基石以建構更外層次的瞭解 (Kieren & Pirie, 1992)。在這個學習過程中，教師的介入可能產生的三種功能分別爲：

1. 推向外層 (Provocative)：使學生從一個層次向外層次推移，以獲得更深入的了解。
2. 拉回內層 (Innovative)：使學生意識到必須折回內層次。
3. 鞏固此層次 (Validating)：使學生在此一層次內操作以強化其瞭解。

在教學實驗中，學生於例 2 、 3 中討論同時對同時錯的命題，在取得一致的看法後，教師要求學生以自己的符號表示等價命題間格式的關連，學生因而將注意力集中於關注這些例子中的共同性，並將其發現予以形式化。這裡教師的介入（要求學生寫出規則）所產生的效用便是推向外層次的，也就是促使學生從擁有心像向外到關注性質與形式化的層次。

實驗組一的學生在例 4 中發生困難，學生一直在敘述中的細節考慮，在學生相互討論以及傳衍想法的過程中，教師一直提醒同學注意「黑板上那個跟這個像不像」，使學生能夠將注意力集中於命題與符號規則之間的觀察與連結，然後洞察其格式上相同，並據以解題，這樣的學習歷程反映出教師的介入可促使學生折回剛學會的符號規則，並集中於格式上的辨認。

而在例 12 教師操作過反證法證明之後，例 15 基本上是學生練習反證法的活動，也就是要學生鞏固既有的反證法論證程序知識。

七、教師應幫助學生從運算性到結構性的思維過渡，並表徵成形式化符號，以有效進行論證

許多數學概念的起源是運算性的，然後經過不斷的運算經驗，累積壓縮而使概念物化成一靜態的結構 (Sfard, 1991)。例如奇數的概念剛開始時只是無法平分的操作或除以 2 有餘數的計算，然後發展成是偶數加 1 的數，或者是 2 的倍數加 1 的數，於是奇數成爲一個單位物件，而不僅只是一個運算過程。

在數學證明的問題中，被操作的對象往往是抽象的數值關係，因此證明過程自然必須將某些數值關係視爲一個物才能進行，此時學生就必須對此數值關係有結構性的概念，同時主動以結構性的思維來操作才能進行。

實驗組二的學生提出奇數是「除以 2 餘 1 」的數，表示學生的思維表徵是運算性的，由於學生無法主動轉換成結構性的思維，因此當必須去證明「奇數的平方也是奇數」時就產生了無法操作的困難，雖然此時教師直接以提供形式化表徵的方式介入供學生繼續作下去，但學生是否在下次證明時知道要轉換思維方式是値得懷疑的。實驗組一的學生提出奇數是「 2 的倍數加 1 」的表徵，並借助對照平方公式以說明奇偶性的方式完成證明，雖然是證出來了，但是非形式化的表徵使得證明過程顯得冗長複雜，因此就證明的簡潔性與易於操作的考量，將已從運算性過渡到結構性中的思維表徵進一步以形式化方式表徵，可以使學生易於操作其概念，並進行證明。

拾、待研究的問題

本研究為一探究性教學之研究，雖然獲致相當之成果，然而亦有許多問題有待進一步研究：

一、反證法論證原理的教學也可使用數學題材作爲起始例

本研究教學的起點例子選自生活情境，透過討論形成論證規則，並符號化以使用。倘若教學改用學生熟悉之數學命題爲起點，如「若 $x > 2$ 則 $x^2 > 4$ 」或「若 $a = b$ 則 $a^2 = b^2$ 」，學生一樣可以討論，這樣的方式對洞察論證原理與提昇反證法瞭解層次有什麼助益？使用數學命題是否還需要將論證規則符號化？都是有待研究的問題。

二、層次 0 到層次 1 與層次 1 到層次 II 的教學問題

根據施測結果的分析，本探究性教學對層次 0 、 1 的學生似乎無效，此項結果並不意外。由於本研究的原始目的在於提昇第 II 層學生達第 III 層，因此教學重點在於這兩層之間的關鍵概念－以對偶命題等價作爲論證原理，因此對無法否定敘述與不瞭解反證法格式的學生而言，教學並未克服其瞭解障礙。

然而就論證法學習的角度而言，如何使學生眞正瞭解反證法是最終目的，因此對於層次 0 與層次 1 的學生而言，發展教學活動使能提昇層次是有必要的，這樣的工作有待進一步探索。

三、否定敘述能力的教學問題。

本研究之教學並不涉及否定敘述能力之教學，研究顯示高二生在否定敘述的問題上，除了無量詞與量詞為「存在」的敘述外，答對率都不高，顯示學生否定敘述的能力較差，因此，如何設計教學可使學生否定敘述的能力提昇，是一個需要探索的問題。

四、其他論證法的學習與教學問題。

本研究探討反證法的學習問題並探索解決的教學方式，而數學證明的論證方法很多，例如數學歸納法、代數法等，這些論證方法在生活與數學情境中的差異、學生的學習問題為何等，都有待進一步研究。

致　謝

1. 本文為國科會專題研究計畫編號 NSC 83-0111-S-003-19A 與 NSC 84-2511-S-003-072 的部份成果。
2. 感謝參與研究的小組成員吳家怡，李源順，連秀鑾，林佳蓉，朱綺鴻，陳姿妍，林春慧，尤其是執行實驗教學的連秀鑾。

拾壹、參考資料

1. 林福來（1986）：《比例推理的錯誤診斷與補救》。國科會專題研究計畫報告。
2. 林福來（1994）：《數學證明的了解（Ⅰ）》。國科會專題研究計畫報告。
3. 林福來（1995）：《數學證明的了解（Ⅱ）》。國科會專題研究計畫報告。
4. 黃家鳴（1995）：數學證明與日常生活論證，《香港數學教育的回顧與前瞻－梁鑑添博士榮休文集》，香港大學。
5. 曹亮吉（1996）：阿草的葫蘆。遠哲科學教育基金會。
6. Bell, A. W., Costello, J., & Kuchemann, D. E. (1983). Aspect of Teaching Method. *A Review of Research in Mathematical Education. Part A: Research on Learning and Teaching*. NFER-NELSON Publishing Company Ltd. 170-205.

7. Bell, A. (1993). Some Experiments In Diagnostic Teaching. *Educational Studies in Mathematics 24*, 115-137.
8. Kieren, T., & Pirie, S. (1992). The Answer Determines the Question. Interventions and the Growth of Mathematical Understanding. *Proceedings of the Sixteenth PME Conference*, V.2., 1-8.
9. Lerman, S., Finlow-Bates, K., & Morgan, C. (1993). A Survey of Concepts of Proof Held by First Year Mathematics Students. *Proceedings of the Seventeenth PME Conference*, V.1., 252-259.
10. Sfard, A. (1991). On The Dual Nature of Mathematical Concepts : Reflection on Processes and Objects as Different Sides of The Same Coin. *Educational Studies in Mathematics 22*, 1-36.
11. Thompson, D. R. (1991). Reasoning and Proof in Precalculus and Discrete Mathematics. *The Annual Meeting of the American Educational Research Association*. Chicago, IL, 1991.

拾貳、附件：探究性教學教案

單元一

教材資源	學生活動	教學流程	教師活動
1.子曰：學而不思則罔 國文老師：學而思則不罔 國文老師有沒有誤解孔子的話	.判斷 .回答	判斷 兩命題是否同義 例1 N	.提出問題 .記錄人數 .提示目標：我們來學習如何判斷國文老師有沒有誤解？
2.若下雨則馬路濕—(T,F) 若沒下雨則馬路不濕—(T,F) 若馬路濕則下雨—(T,F) 若馬路不濕則沒下雨—(T,F) 3.明天若是禮拜天則不上學—(T,F) 明天若不是禮拜天則要上學—(T,F) 明天若不上學則是禮拜天—(T,F) 明天若要上學則不是禮拜天—(T,F)	.討論 .判斷 .回答	判斷 命題對錯 例2,3	.提出問題 .記錄答案與人數
4.“若n是奇數則$n\neq 2$”，這句話還可以怎麼說，結果也對？	.聽講	學習語詞與符號： 否定、敘述	.講述 .操作
5.學生若生病則請假 6.手電筒若沒電池則不亮 7.若答案中沒有a則錯	.實作	以符號表示命題 例2,3	.提出問題 .導引操作
8.若△ABC爲等邊則等腰 9.四邊形若是矩形則是平行四邊形	.觀察 .討論	觀察同時對、同時錯 命題之關係　例2,3	.提出問題 .導引討論
10.“若數學考100分則有獎品”與 “若數學沒考100分則沒獎品” 兩句話等不等價	.表達	表達上述關係 (非形式化) N	.提出問題 .記錄答案與人數
11.給定α、β兩個角 若$\alpha+\beta=90^\circ$ 則$\sin\alpha=\cos\beta$與 若$\alpha+\beta\neq 90^\circ$ 則$\sin\alpha\neq\cos\beta$ 兩個命題等不等價 12.設n是正整數，若n^2是偶數則n是偶數 13.若嬰兒餓了則會哭	.對照 .否定敘述	應用 上述關係 例4 N	.提出問題 .記錄答案
14.若是兇手則必在場	.符號替代圖示	形式化上述關係	.簡潔
	.接收名詞 .操作命題的對偶變換	命名上述關係	.命名
	.回答 .感覺等價的精神 (買一送一)	討論對偶 命題等價	.提問：已知‘若P則Q’是對的，那你可推演出什麼？
	.判斷.討論 .回答.判斷 .回答	判斷 是否等價命題 例10,11 N → 小組討論	.提出問題.導引討論 .記錄答案
	.判斷 .回答	判斷 兩命題是否等價 例1 ⇄ 形式化例1	.提出問題 .記錄人數
	.欣賞	生活中對偶命題 的應用　例13,14	
		結　束	

單元二

教材資源	學生活動	教學流程	教師活動
13.醫生說一般初生的小寶寶'若肚子餓了則會哭'，	.判斷	判斷是否對偶 例12,15 → N → 形式化	.診斷
14.若是兇手則必在場 15.設n是正整數，若n^2是奇數則n是奇數	.操作對偶變換 .數學論證	利用對偶命題做數學論證 例12 ⇄ 小組討論	.提問例12的對偶命題 .提示奇數偶數表示法 .鼓勵學生論證 .巡迴輔導
16.證明$\sqrt{2}$是無理數 17.平面相異兩直線若斜率相等則平行 18.若兩數和大於零，則必有一數大於零	.抽象化	形式化論證格式 例12	.整理
19.若兩數平方和等於零，則兩數都等於零	.觀察	觀察論證格式	.提示
	.連結：對偶與反證	學習名詞：反證法	.解說
	.實作數學論證	實作反證法 例15 → N → 小組討論	.巡迴輔導
	.聽講	反證法：例16	.講解
	.歸納 .表達 .說明	整理反證法的程序	.提問反證法爲何有效 .整理
		結束	

An Explorative Teaching on the Argument Principle of Proof by Contradiction

Fou-Lai Lin[1], Ying-Hao Cheng[2]

[1]Department of Mathematics, National Taiwan Normal University
[2]China Junior College of Industry and Commercial Management

Abstract

The argument principle of the method of proof by contradiction is base on equivalent relation of dual propositions. A study on 11^{th} grade students' understanding of proof by contradiction revealed that there are 55% of them understand its format of proof, ie. negating the result of a proposition first, then inducing a contradiction; however, there are only less than 5% of them understand its argument principle. This result not only revealed the learning situations in mathematics classroom of senior high school, but also indicated that students' experiences of argument in everyday life are not linked to their logical reasoning.

Language, thinking and logical reasoning are mutually interacted and correlated. Due to different interpretations of everyday language, argument in everyday life sometimes might be against logical rule. This paper analyzed the features of thinking propositions in everyday life and described four different types of process which cause the inconsistency between everyday life argument and logical argument. Based on this analysis, we then made a teaching assumption to get rid of such kind of thinking barrier, ie. "Symbolizing the propositions in everyday life and finding dual proposition according to symbolic rule will enhance students' understanding of the argument principle of proof by contradiction." Two explorative teaching were carried out by two teachers in two classes with 47 and 23 of 10^{th} grade students in two vocational junior colleges respectively. Each class lasted three lessons, 150 minutes. Those explorative teachers are also researchers of the project. They were observing and recording their students' learning process during their teaching. Particularly, they focussed on how students' capability of discovering rule, symbolizing a given proposition and applying the symbolized rule. One month later, the students in explorative teaching classes were assessed with an understanding test paper of proof by contradiction.

Results showed that the teaching assumption is supported by this study. Guided discovery and peer discussion are effective instruction strategies for symbolizing a proposition and finding symbolic rule of equivalence relation of dual propositions. The result of understanding test paper on proof by contradiction showed that 19% of 10th grade students in those explorative teaching classes are able to recognize the equivalency relation of dual propositions. However, only 4.5% of 11th graders are able to recognize this relationship.

Key words: proof by contradiction, dual propositions, argument in everyday life, explorative teaching.