



位移組合概念發展之診斷與案例分析

黃湘武 任曉薇

國立台灣師範大學物理研究所

(投稿日期：86年4月9日，接受日期：87年1月5日)

摘要：位移 (displacement) 是物理學科中的基本概念，也是學童空間概念發展中的重要一環，當然位移概念也是學生學習數理科時不可或缺的基本能力。然而，在傳統的教學或課程中，位移的概念或是對位移的相加或相消的組合概念，通常都是被認為是不証自明的事實，並不需要特別加以講授的。但是，根據皮亞傑的理論和研究，學生的位移或位移的組合概念並非生而知之，而是需要經歷相當長時間的發展才能建立的。此種能力的建立不只是遵守一定發展順序，且其最後所達成階層更是所謂形式操作期的層次。對位移組合概念的發展的歷程的研究，無疑的可以增進我們對學童空間概念發展的瞭解，並能對未來的相關教材教法的改進有所幫助。

本報告內容包含兩部份：其一是有關位移組合概念的示範式筆測工具的設計；其二是有關採用本測試工具所測得的部份樣本的案例分析。本報告所分析之案例共 25 份，其中包括國小學生 4 位，國中學生 10 位，大學生 7 位，研究所學生 1 位，學士後師資學分班學生 3 位。我們的主要發現有：

1. 所設計之紙筆式群測工具，可以相當有效的區分出受測者的位移組合概念的發展階層，並且也能顯現皮亞傑理論中所宣稱的各種概念的特徵。
2. 案例的分析顯示，大學生或成人也會對位移或位移的組合問題發生困難，這和皮亞傑所宣稱的發展成熟年齡（10 ~ 11 歲）有很大的差距。
3. 位移組合概念的發展和參考座標系概念的發展有密切的關係，早期的發展是表現互為因果的關係。後期思想操作式的位移組合概念的發展超越參考座標系概念的發展，參考座標系概念的發展只需要具體操作期的能力，思想操作的位移組合概念的發展則需要形式操作期的能力。
4. 長度測量的能力和距離概念或距離的組合能力，並不一定是相等的能力。能夠正確測量出甲戊間距離的大小，並不一定知道由甲到戊會相等於由戊到甲；能夠正確測量出所有路段的長度，甚至能夠將測得的結果作四則的運算，也並不一定能夠對實質的位移作正確的組合。

我們認為本研究的結果對於相關教材教法的改進，和進一步有關學生概念發展的研究具有一定的啟示意義。

關鍵詞：認知發展、位移組合、概念成長、學習、參考座標系。

緣 起

當嬰兒還只能在地上爬行的時候，就開始有機會感受到自己的身體和其它物體移動的情形，也因為有這些體驗，幼小的孩童很早就建立起某種程度的感官動作空間智慧。我們可以說，學童位移概念的發展，與學童空間概念的發展，或是學童整體智力的發展，是息息相關的。

位移的概念顯然也是物理學科中的最基本概念之一，所有的運動學或力學，或任何有關聲、光、熱、電的傳導或傳播，都與位移或空間概念有關。因此，我們甚至可以說，位移概念是建構整個物理學理論的基礎。

在傳統的教學或課程中，位移的概念或是對位移的相加或相消的組合概念，常常被認為是不需要特別加以講授的東西，且甚至被認為是不証自明的事實。然而，根據皮亞傑的理論和研究 (Piaget, 1946)，學生的位移或位移的組合概念並不是天生就具備的，而是需要經歷相當長時間的發展才能建立的。此種能力的建立不只是遵守一定發展順序，而且其最後階層的達成更是所謂形式操作期的層次。

又根據我們先前的一些調查研究（黃湘武，1985，1995，1997），國內中小學生的認知成長大都仍然停留在所謂的具體操作期，而並非所謂的形式操作期。因此，如果皮亞傑對於位移的組合概念的理論是正確的話，那麼我們的中小學生對於此一概念的理解程度，必然是和一般教師或課程編輯者所以為的有很大的差距。

基於位移概念在學生認知發展上的重要意義，以及位移概念在學生學習與瞭解物理科上的重要性，我們有必要針對皮亞傑理論作更進一步的探討和檢驗。

我們的整體研究結果將分為兩部份發表，本文是關於第一部份的報告，內容著重在定性的分析，第二部份將隨後再發表，重點是定量

方面的統計分析和我國學生發展情形的評估。

本報告內容又包含兩大主題：其一是關於筆測工具的研究與設計；其二是關於採用所設計工具所測得的部份樣本的案例分析。本報告所分析之案例共 25 份，其中包括國小學生 4 位，國中學生 10 位，大學生 7 位，研究所學生 1 位，學士後師資學分班學生 3 位。

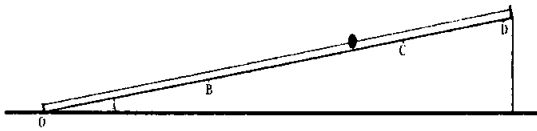
筆測工具的設計係根據皮亞傑原始的個別面診的方式發展而成，除了因適合筆測時的情況所需要的改變外，我們盡量維持原來面診時的精神。我們的案例分析，除了驗證了皮亞傑的位移組合概念發展的階層理論外，也發現了若干皮亞傑所未能注意到的概念特性，其中特別是關於位移組合概念發展與參考座標系概念發展的關係。我們並未能在文獻發現類似的測試設計，因此本研究結果應具有相當的學術價值和原創性。同時，本研究所整理出的學生的各種中文表達式的概念特徵，和所發展的本土性診斷工具，對於國內教學者或是課程設計者亦應具有相當實用的參考價值。

皮亞傑的個別面診方法及理論

皮亞傑對於學童位移組合概念發展的理論和個別面診方法 (Piaget, 1946)，可以綜合說明如下：

一、使用的工具

1. 以硬紙板做成之小山坡一座，斜坡上以鐵釘固定一平行細線，細線上有一可上下滑動的串珠。整個系統假設為一架設在山坡上的電纜車。
2. O 點代表山坡的起始處，D 點代表山坡的頂點，A、B、C 代表纜車途中的某顆大樹或某間房屋。
3. 長度分別等於 OA、OB、OC、OD、AB、AC、AD、BC、BD、CD 的紅色紙條及藍色紙條各一套。



二、面診的步驟

【問題 Q1】

1. 主試者將串珠由 O 滑行到 D，再由 D 滑回 O。
2. 詢問受測者：「電車向上走的路較遠？還是向下走的路較遠？」
3. 鼓勵受測者利用預先準備的紅色紙條測量向上滑動的路程，藍色的紙條測量向下滑動的路程。
4. 如果受測者不自動進行任何測量，則主試者將長度等於 OD 的紅色和藍色紙條鋪陳於 OD 的路徑上，幫助受測者瞭解問題的意義。

【問題 Q2】

1. 主試者滑動串珠：O → C → B → D → O。
2. 詢問受測者：「電車向上走的路較遠？還是向下走的路較遠？」
3. 如果受測者對問題的瞭解有困難，主試者可明確指出向上走的路段（OC；BD）和向下走的路段（CB；DO）。
4. 鼓勵受測者利用預先準備的紅色紙條測量向上滑動的路程，藍色的紙條測量向下滑動的路程。
5. 如果受測者不自動進行任何測量，則主試者將長度等於 OC 和 BD 紅色紙條和長度等於 CB 和 DO 的藍色紙條鋪陳於相對應的路徑上，幫助受測者瞭解問題的意義。
6. 此時問題可簡化為：紅色紙條的總長度是否等於藍色紙條的總長度？

【問題 Q3】

1. 串珠的路徑改變為：O → B → A →

C → B → D → O。

2. 重複問題 Q2 的問話和步驟。

三、概念階層及特性

(一) 階層 I（約四至六歲）

此階段的學童在回答 Q1 的問題時，會認為串珠向上滑行的路徑會比向下滑行的路徑長。他們不會用紙條來測量路徑的長短，即使看到主試者的示範測量和證明紙條長短相等，他們也不會改變原來的答案。對於問題 Q2 和 Q3 更無法正確作答。

此階層的學童至少欠缺兩種概念的區分 (differentiation) 能力：其一是無法分辨或混淆位移的路程與到達的位置；其二則是不能區分運動的動力因素與空間的位置改變。因此，這階段的學童會認為：因為 D 點是在山頂上所以向上的路徑較遠；或是因為向上爬時較費力、費時，所以向上的路徑較遠。

同時階層 I 的學童也缺乏空間概念的轉移 (transitivity) 能力。在 Q1 的問題中，就算是他們同意上坡的紅色紙條和下坡的藍色紙條是等長的，但卻仍會認為向上的路徑不等於向下的路徑，因為他們認為測量後離開斜坡的兩片紙條已不能代表山坡路徑的長度了。

由問題 Q2 的反應，可知此階段的學童無法將整體的位移看作是若干段落位移的組合，因此他們無法將各段落的位移區分為向上的位移和向下的位移，他們更不可能將所有向上的位移相加和所有向下的位移相加來作比較，在很多情形他們甚至無法瞭解題目的意義。此時學童並不一定會堅持向上的路徑大於向下的路徑，約有一半的人會認為向下的路徑大於向上的路徑。

(二) 階層 II（約六至八歲）

在回答 Q1 的問題時，開始的表現與階層 I 學童的相類似，但在經歷測量和比較紅色和藍色紙條的長短後，會改變原來錯誤的想法而認為串珠向上滑行和向下滑行的路徑等長。開始時對於

問題 Q2 和 Q3 皆無法正確作答，且不會自己測量。但是在看到主試者的示範測量和證明紙條長短相等後，他們會改正原來的答案。

階層 II 的學童對於位移的動力因素與空間的位置改變表現初期的區分能力，因此他們能在觀察主試者的測量示範後，瞭解到兩者的不同而改變開始時錯誤的想法，而會認為向上與向下的距離是相等的。他們沒有自動進行測量動作，就是因為仍然無法完全區分位移的動力因素與空間的位置兩種概念，不瞭解需要測量的理由。

(三) 階層 IIIA (約六至九歲)

在回答 Q1 的問題時，不需經過測量即可判斷正確。在回答 Q2 的問題時，雖然無法預先用推論方法提供正確答案，但表現自行測量各段落長度的能力，並且也能夠根據測量結果得到正確答案。在回答 Q3 的問題時，反應與 Q2 時類似，Q2 的作答經驗也不會對 Q3 的作答有所幫助。

階層 IIIA 最重要的特徵是具備了對位移的可逆性 (reversibility) 思考能力。因此在 Q1 的問題中不需測量也知道 $O \rightarrow D$ 的距離等於 $D \rightarrow O$ 的距離。

(四) 階層 IIIB (約八至十歲)

不同於階層 IIIA 的學童，他們能由 Q2 的結果推論出 Q3 的正確答案，不需要再次的測量才能確定。

階層 IIIA 與階層 IIIB 學童的不同之處，是階層 IIIA 的學童不能夠在問題 Q2 的各項測量的過程中，體會到一上一下時互相抵消 (compensation) 的現象，而 IIIB 的學童則能夠看到此種位移互相抵消的特性。

(五) 階層 IV (約十至十一歲)

不需要任何的測量就能預測各題正確的答案。

階層 IV 的小朋友用了形式操作思考的方法 (formal operational)。他們能夠在開始時就

預測上上下下的過程中彼此是互相抵消的，然後再檢驗此一假設之正確性。也就是運用假設推論 (hypothetico-deductive) 來解決問題。他們僅由邏輯上的計算 (logical calculation) 就知道是相等的，而不需要藉由測量來驗證。

研究方法

一、紙筆測試工具的設計

我們將試卷設計成兩部份，總共包含九個問題（見圖 1、圖 2、圖 3），第一題至第三題組成第一份試卷（測試 A），第四題至第九題組成第二份試卷（測試 B）。測試的過程亦區分為兩個階段，受測者在完成第一份試卷的作答並繳交給主試者後，才再發給第二份試卷繼續作答。

區分為兩部份的目的，是為防止受測者在回答後面的問題時，再回頭修改前面的作答。我們希望能利用此種方式判斷出受測者在作答過程中所可能產生的學習效果。

題一的目的在診斷最基本層次的位移可逆性概念，它相當於皮亞傑理論中的問題 Q1，所不同的是我們無法在適當的時候針對個別的學生提供測量的示範，或是要求他們自己進行測量的動作。

題組二～三的目的在診斷最高層次的思想操作式位移組合能力。在此兩題中，我們沒有訂定具體的位移路徑，作答者必須在頭腦中想像各種可能的路徑和結果。此題組的層次，相當於在皮亞傑的面診中，回答問題 Q2 和 Q3 時所表現的形式操作推理層次。

題組四～七在診斷受測者具體操作式的位移組合能力，它們相當於在皮亞傑的個別面診中，回答問題 Q2 和 Q3 時的具體操作推理層次。在這些題目中，我們不但訂定了具體的位移路徑，而且還要求受測者依照題意畫出代表上下坡路徑的線段。這樣的設計，不只是希望受測者能真正瞭解題目的意思，也希望因此可以方便受測者在作答時，進行實質的長度測量

工作來解決問題。

第二份試卷中的題組八～九和第一份試卷中的題組二～三的內容完全相同，重複測試的目的是要檢驗受測者，在經歷題組四～七的作答後是否有產生學習的效果。題組八～九和題組二～三的整體診斷效用，相當於皮亞傑的面診中，問題 Q2 和 Q3 的整體效用。

本測試工具的每一個問題所要求的作答步驟，都是：先要求受測者在預先提供的四種選項中（一樣多；向上走的多；向下走的多；不可能知道）作一選答；再要求受測者填寫如果上下坡路程不等時的相差數值；最後再要求受

測者對先前的選答和數值作說明。在作答的過程中，如果受測者有任何的計算，或是有任何其它需要用作圖方式來幫助解答的，我們也都要求他們在試卷上進行。這些計算或作圖，對判別受測者的推理方式常會有很大的幫助。

我們也必須指出，本研究所採用的位移方式，和原來皮亞傑的個別面診中所採用的並不相同。皮亞傑採用的是纜車上下山的位移方式，本研究的是小明上下山散步的位移方式。原來我們改變的主要理由，是認為國內學生對纜車的設備可能並不熟悉，但是事後發現此種改變，更有其他的意義。

測試 A

縣市：_____ 學校：_____ 姓名：_____ 班級：_____

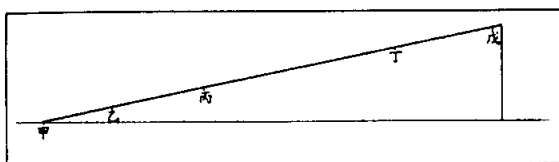
座號：_____ 性別：_____ 生日：_____ 年 _____ 月 _____ 日

今天是：_____ 年 _____ 月 _____ 日 時間：_____

小明家住在某一山腳下(甲點)，他常常到山坡上散步。以下是他散步的方法，請回答相關的問題。

問題一

由甲走到戊，然後由戊回到甲。



小明向上走的路和向下走的路：

(1)一樣多(2)向上走的多(3)向下走的多(4)不可能知道。_____

多了多少公分？_____

你是怎麼知道的？

問題二

小明由甲點出發後，在山坡上隨意的來回散步，因此沒有記下路線，只知道最後是回到甲點。

在這種情形下，小明向上走的路和向下走的路：

(1)一樣多(2)向上走的多(3)向下走的多(4)不可能知道。_____

多了多少公分？_____

為什麼？

問題三

小明由甲點出發後，在山坡上隨意的來回散步，因此沒有記下路線，只知道最後是回到乙點。

在這種情形下，小明向上走的路和向下走的路：

(1)一樣多(2)向上走的多(3)向下走的多(4)不可能知道。_____

多了多少公分？_____

為什麼？

圖 1：位移組合概念紙筆測試工具測試 A 部份

(原稿中斜坡總長約為 14.8 公分，甲乙距離約為 2.3 公分，甲丙距離約為 5.3 公分，甲丁距離約為 11.5 公分，丁乙距離約為 9.2 公分，乙丙距離約為 3 公分，乙戊距離約為 12.4 公分，丙戊距離約為 9.4 公分，丙丁距離約為 6.2 公分，丁戊距離約為 3.2 公分)

測試 B

縣市：_____ 學校：_____ 姓名：_____ 班級：_____

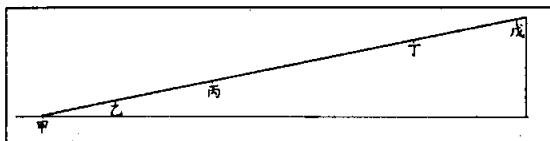
座號：_____ 性別：_____ 生日：_____ 年 _____ 月 _____ 日

今天是：_____ 年 _____ 月 _____ 日 時間：_____

問題四

由甲到丁、丁到丙、丙到戊、最後由戊回到甲。

請在下圖中畫出小明散步的路線。(向上走用紅筆畫，向下走用藍筆畫)



小明向上走的路和向下走的路：

(1)一樣多(2)向上走的多(3)向下走的多(4)不可能知道。_____

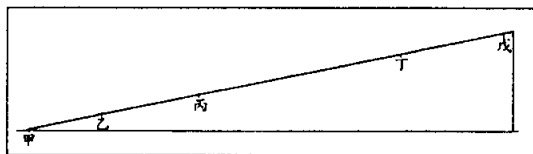
多了多少公分？_____

你是怎麼知道的？

問題五

由甲到丁、丁到丙、丙到戊、最後由戊回到乙。

請在下圖中畫出小明散步的路線。(向上走用紅筆畫，向下走用藍筆畫)



小明向上走的路和向下走的路：

(1)一樣多(2)向上走的多(3)向下走的多(4)不可能知道。_____

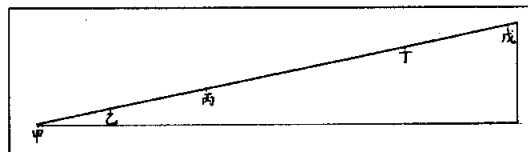
多了多少公分？_____

你是怎麼知道的？

問題六

由甲到丙、丙到丁、丁到乙、乙到戊、最後由戊回到甲。

請在下圖中畫出小明散步的路線。(向上走用紅筆畫，向下走用藍筆畫)



小明向上走的路和向下走的路：

(1)一樣多(2)向上走的多(3)向下走的多(4)不可能知道。_____

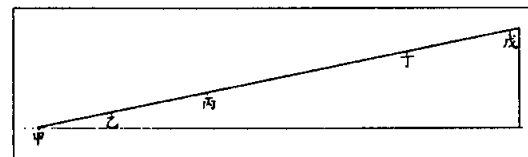
多了多少公分？_____

你是怎麼知道的？

問題七

由甲到丙、丙到乙、乙到丁、丁到丙、丙到戊、最後由戊回到乙。

請在下圖中畫出小明散步的路線。(向上走用紅筆畫，向下走用藍筆畫)



小明向上走的路和向下走的路：

(1)一樣多(2)向上走的多(3)向下走的多(4)不可能知道。_____

多了多少公分？_____

你是怎麼知道的？

圖 2：位移組合概念紙筆測試工具測試 B 部份

問題八	問題九
小明由甲點出發後，在山坡上隨意的來回散步，因此沒有記下路線，只知道最後是回到甲點。	小明由甲點出發後，在山坡上隨意的來回散步，因此沒有記下路線，只知道最後是回到乙點。
在這種情形下，小明向上走的路和向下走的路： (1)一樣多(2)向上走的多(3)向下走的多(4)不可能知道。_____	在這種情形下，小明向上走的路和向下走的路： (1)一樣多(2)向上走的多(3)向下走的多(4)不可能知道。_____
多了多少公分？_____	多了多少公分？_____
為什麼？ _____ _____ _____	為什麼？ _____ _____ _____

圖 2 續：位移組合概念紙筆測試工具測試 B 部份

二、測試的實施步驟

1. 以班級為實施測試之單位，每班人數約 30 ~ 40 人。
2. 講桌上斜向架設代表山坡之木條一支，木條上標示可以停留的甲、乙、丙、丁、戊等地點。
3. 代表「小明」的玩具人像模型一個。
4. 每位受測者先發給第一份試卷（題一、題組二~三），並要求先填上姓名、性別等個人資料。
5. 每位受測者發給有刻度之量尺一支（15 公分長），並說明可以作為長度測量之用。
6. 主試者以人像模型和架設的木條，示範及說明小明在山坡上的各種可能的散步的情境。說明中，更特別強調山坡的路線只有一條，是直線的，小明也只在這一條路線上散步。
7. 要求學生回答題一至題三的問題。
8. 第一份題目作答完畢和回收後，主試者發下第二份試卷並要求繼續作答。個別學生可以有不同的速度。
9. 當學生開始進行第二份試卷中的問題

時，主試者只對作圖的方法稍作講解。

10. 本測試之進行，除主試一人外，尚需助理至少一位。
11. 測試進行當中，主試與助理應隨時審視學生之作答情形，並提供必要的個別幫助。
12. 本測試所須的時間約為四十至五十分鐘。

三、測試樣本

利用以上所設計之工具，針對不同年級，不同年齡層的學生，或成人進行了相當大樣本的測試。（見表 1、2、3）

表 1：國小學生部份的測試樣本

學 校	年級	男	女	總計
聖心國小	5	120	87	207
	6	114	89	203
石牌國小	5	71	59	130
	6	71	72	143
總 計		376	307	683(人)

概念階層特徵及案例分析

根據對學生筆測答卷的分析，我們發現大部份學生的作答可以按照階層 A、階層 B、階層 C、階層 D、階層 E 等五個概念層次來

分類。以下是我們對一些具有代表性的案例，所作的分析：

一、概念階層 A：所有題組的作答皆有困難者

(一) 主要特徵

1. 沒有位移的可逆性概念；會混淆動力與位移的概念。
2. 沒有位移的參考座標系概念。
3. 表現位移與空間距離的獨立概念：在固定的兩點間，認為上坡與下坡的難易度不同，或走路的步數不同，或走路的步長不等時，所走的路程長短就會不同。
4. 無法區分與混淆上下坡的路段：根據上坡與下坡的路段的次數判斷總路程的大小；會錯將單一路段的長度當作是上下坡總位移的差。
5. 部份的這些學生表現用尺測量及運算的能力。
6. 不具備任何的組合能力。

表 2：國中學生部份的測試樣本

學 校	年 級	男	女	總計
安樂國中	1	99	117	216
	2	97	108	205
	3	104	113	217
六家國中	1	108	115	223
	2	154	136	290
	3	147	143	290
重慶國中	1	55	64	119
	2	62	45	107
	3	44	55	99
總 計		870	896	1,766(人)

表 3：大專以上學生部份的測試樣本

學 校	系 級	女	男	總計
國立台灣師範大學 台北市立師範學院	工業教育系三年級	8	41	49
	數理系二年級	11	5	16
	學士後學分班(理組)	20	14	34
	學士後學分班(文組)	40	1	41
國立新竹師範學院	美勞系三年級	25	3	28
國立台北師範學院	特殊教育系三年級	15	8	23
	體育教育系三年級	20	18	38
總 計		139	90	229(人)

(二) 案例分析

案例LUJA2168：國中二年級學生；男；13.5歲

答一：向上走的多，多了 3 公分；向上走比較久，向下走比較快。

評析：沒有位移的可逆性概念；忽視上坡與下坡時都是在相同的兩固定點間移動的事實；混淆動力與位移概念。

答二：不可能知道；因為沒有記下路線，所以不可能知道。

答三：一樣多；因為走的路線都一樣多。

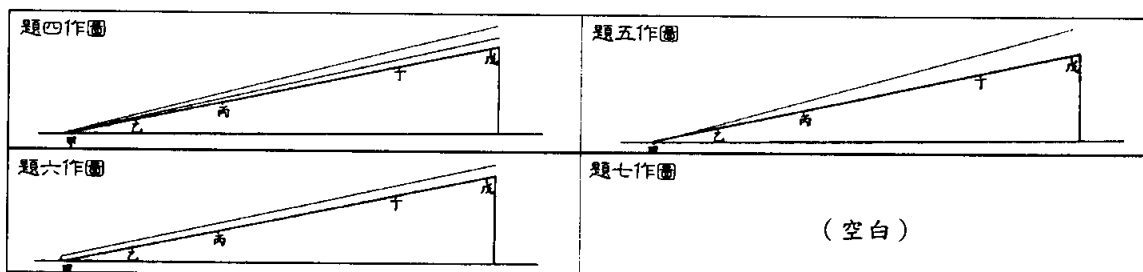
評析：沒有思想操作的位移組合能力。

答四：一樣多；因為走的路都一樣。

答五：一樣多；路線一樣多。

答六：一樣多；因為路線一樣多。

答七：一樣多；因為路線一樣。



評析：四題皆沒有正確作圖，根據直覺回答；題五及題七選答錯誤，題四及題六只是碰巧選答正確。

答八：不可能知道。

答九：不可能知道。

評析：沒有思想操作的位移組合能力。

案例 LUJA2172：國中二年級學生；男；13.6 歲

答一：向下走的多，多了 15 公分；因為向下走比較快。

評析：沒有位移的可逆性概念；忽視上坡與下坡時都是在相同的兩固定點間移動的事實；混淆動力與位移概念；錯將甲戊的距離（15 公分）當作是甲戊與戊甲位移的差；表現用尺測量的能力。

答二：向下走的多，多了 4 公分；比較快。

答三：向下走的多，多了 4 公分；比較快。

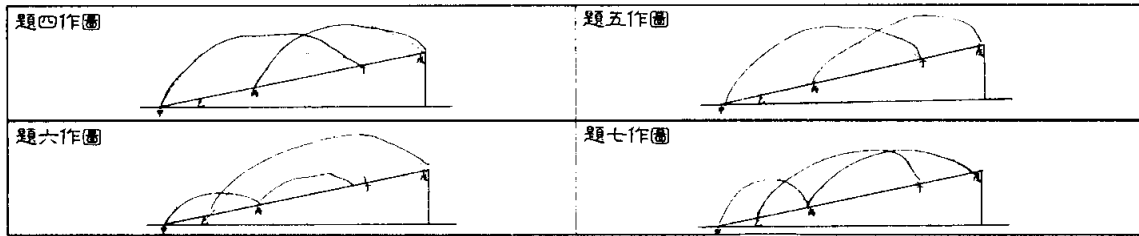
評析：沒有思想操作的位移組合能力；表現動力與位移概念的混淆；錯將單一路段的位移（4 公分）當作是上下坡總路程的差。

答四：一樣多；因為他上去二次下去二次才一樣。

答五：一樣多；因為他上去二次下去二次也是一樣多。

答六：向上走的多；因為他上去三次下去二次是向上走的多。

答七：一樣多；因為上去三次下去也是三次一樣多。



評析：沒有具體操作的位移組合能力；根據上坡與下坡的次數判斷路程的大小，不知道對上下坡路段的長度作組合。

答八：不可能知道；多了 15 公分；因為沒有做記號。

答九：不可能知道；因為他沒有做記號。

評析：沒有思想操作的位移組合能力；題八中錯將甲戊的距離 (15 公分) 當作是上山下山位移的差。

案例 SANS5200：國小五年級學生；男；11.2 歲

答一：向上走的多；多了 15 公分；由於地心引力的影響，走上坡比較吃力，所以向上走的多。

評析：沒有位移的可逆性概念；忽視上坡與下坡時都是在相同的兩固定點間移動的事實；混淆動力與位移概念；錯將上坡的位移 (15 公分) 當作是上下坡位移的差；表現測量的能力。

答二：不可能知道；小明隨意的來回，因此不能知道向上走的多還是向下走的多。

答三：不可能知道；小明來回走動，也不知道到底向上走多少公分，向下走多少公分。

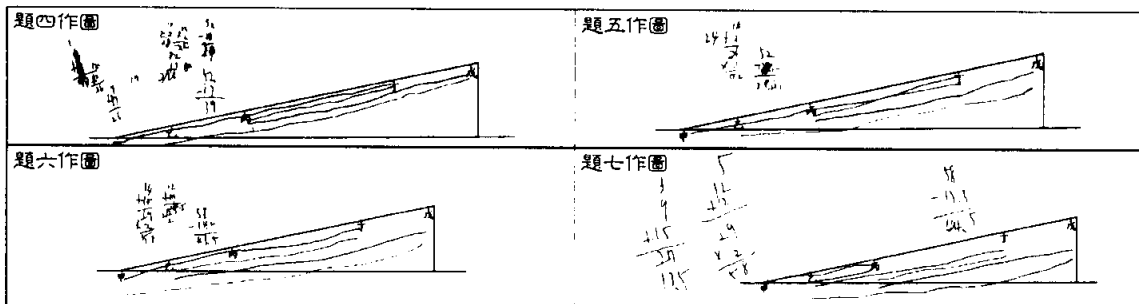
評析：無思想操作的組合能力。

答四：向上走的多，多了 39 公分 ($14 \times 2 \cdots 12 \times 2 \cdots 52 - 13 = 39$)；小明上坡受地心引力的影響，一步會成兩步。

答五：向上走的多，多了 28 公分 ($14 + 12 = 26$ ， $26 \times 2 = 52$ ， $52 - 24 = 28$)；也是受地心引力的影響，走下坡 2 步可能會成為 1 步。

答六：向上走的多，多了 43.5 公分 ($14 + 15 = 29$ ， $29 \times 2 = 58$ ， $12 + 17 = 29$ ， $29 / 2 = 14.5$ ， $58 - 14.5 = 43.5$)；地心引力的影響，上坡 1 步變 2 步。

答七：向上走的多，多了 44.5 公分 ($3 + 9 + 15 = 27$ ， $27 / 2 = 13.5$ ， $5 + 12 + 12 = 29$ ， $29 \times 2 = 58$ ， $58 - 13.5 = 44.5$)；小明也是地心引力的影響。



評析：表現錯誤的組合方法；混淆動力與位移概念；

答八：不可能知道；隨意走動，上去幾公分，下去幾公分都不知道。

評析：無思想操作的組合能力。

(一) 主要特徵

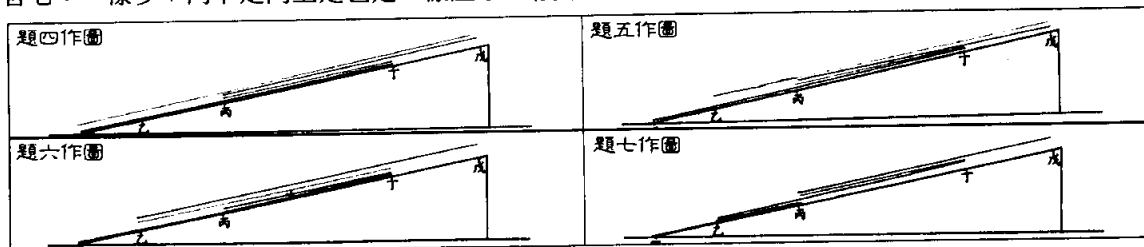
1. 表現可逆性的位移概念，對位移的判斷不再受動力因素的影響。
2. 對單一直線的位移，表現位移與空間距離的統合概念：在固定的兩點間，不再認為上坡與下坡的難易度不同，或走路的步數不同，或走路的步長不等時，所走的路程長短就會不同。
3. 仍然無法區分與混淆上下坡的路段：根據上坡與下坡的路段的次數判斷總路程的大小；會錯將單一路段的長度當作是上下坡總位移的差。
4. 無法對所有的路段作整體的考量，通常只對起始和最後路段的長短作比較，忽略中間的路段對總位移大小的影響。
5. 只根據對圖形的直覺作答。
6. 仍然沒有任何位移組合的能力。

案例 ANLO2160：國中二年級學生；女；13.8歲

評析：表現位移的可逆性概念；不再混淆動力與位移概念；明白上坡與下坡時都是在相同的兩固定點間移動。

評析：主觀的將原來的問題修改，使其簡單和具體化後再作答；錯將上坡的位移（14.9 公分）當作是上山與下山位移的差。

答七：一樣多；向下走向上走也是一樣差了 2 段路沒走。



評析：無法區分與組合上下坡連續位移的路段，只對起始和最後路段的長短作比較，忽略中間的路段對總位移大小的影響；表現錯誤的位移大小概念，在題五時誤認為甲丁和戊乙相等，在題六時誤認為甲丁（甲丙+丙丁）和戊乙相等。題四時錯將下山的位移（14.9 公分）當作是上山與下山位移的差。

答八：一樣多；由甲點出發來回走由甲到戊，戊到甲還不是走的一樣多。

答九：向上走的多，多了 14.9 公分；由甲走到戊是上坡，下坡是戊走到乙，下坡比上坡少走了一段路，所以上坡多。

評析：無思想操作式的位移組合能力；主觀的將原來的問題修改，使其簡單和具體化後再作答；題九時並錯將上坡的位移（14.9 公分）當作是上下坡位移的差。

案例 SASN5189：國小五年級學生；女；10.9 歲

答一：一樣多；因為小明走的路是一樣的。

評析：表現位移的可逆性概念；不再混淆動力與位移概念；明白上坡與下坡時都是在相同的兩固定點間移動。

答二：不可能知道；因為小明所走的路不知道。

答三：不可能知道；因為小明從甲走到山上，後來又沒有回到甲點，所以不知道他在山上所走的路。

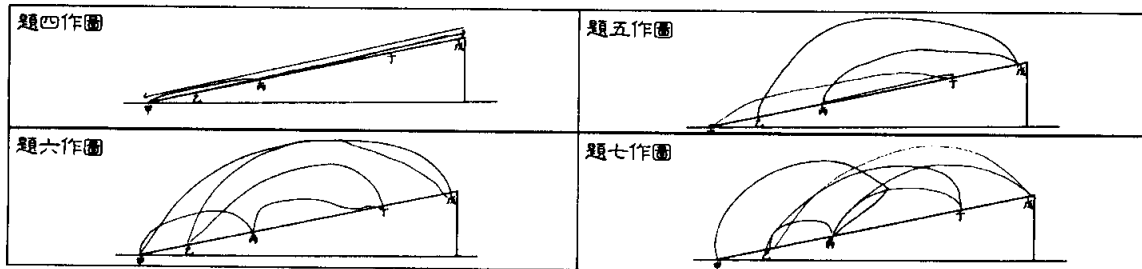
評析：沒有思想操作的位移組合概念。

答四：向下走的多；多了 5 公分；因為小明所走的路沒到過乙，只到丙，而走下來時有到乙點，所以是向下走的多。

答五：向下走的多；多了 7 公分；因為向下走的路比向上走的路長，看上圖而知。

答六：向上走的多；多了 7 公分；因為向上走路，來回比較多。

答七：向上走的多；多了 7 公分；因為向上走的路有很多來回的地方。



評析：題四時混淆位移與位置兩種概念，未注意地點間的距離；題五時根據對圖形的直覺作答；題六題七時根據路線的轉折次數作答。錯將單一路段的長度當作是上下坡總位移的差。

答八：不可能知道；因為小明沒有記下來回走的路線。

答九：不可能知道；因為不知道小明走的路。

評析：無思想操作式的位移組合能力。

案例 LUJA2173：國中二年級學生；男；13.5歲

答一：一樣多；因為路線一樣。

評析：明白上坡與下坡時都是在相同的兩固定點間移動；表現位移與空間距離的統合概念；表現位移的可逆性概念；不再混淆動力與位移概念。

答二：一樣多；因為向上的路線和向下的路線一樣多。

答三：一樣多；因為路線一樣所以一樣。

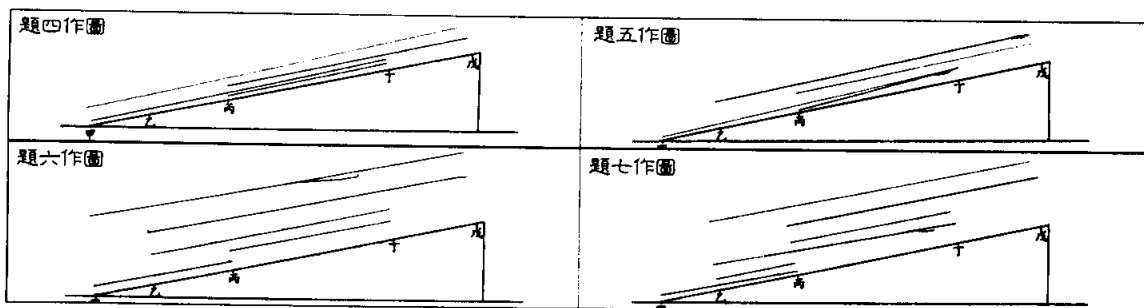
評析：無思想操作的位移組合能力；感官式判斷。

答四：一樣多；因為畫的線一樣所以一樣。

答五：向下走的多；因為向下的比較長，所以向下走的多。

答六：向上走的多；因為向上的線比較長，所以向上的比較長。

答七：一樣多；因為畫的線一樣所以一樣。



評析：沒有具體操作的位移組合能力；感官式的判斷；對各別路段有標示的能力。

答八：一樣多；因為都一樣，所以一樣多。

答九：一樣多；因為小明走的一樣所以一樣多啦。

評析：無思想操作的位移組合能力。

三、概念階層 C：問題一和題組四～七可以正確作答，其它題組二～三和題組八～九仍有困難

(一) 主要特徵

1. 表現可逆性位移概念；明白上下坡都是在相同的兩固定點間移動；不會混淆動力與位移概念
2. 開始對所有的路段作整體的考量，表現對連續路段中的各別路段的區分能力。不會再錯將起始時的路段距離當作是上下山總位移的差；不會只根據路線的轉折次數作答；在具體操作的問題中，不會只比較起始和最後路段，而忽略中間的路段；不再只根據對圖形的直覺作答。
3. 題組四～七的作答表現定量與實作式的組合能力。表現二種組合方式：一種是採用定量的測量再相加和比較；第二種是對上下山各路段直接作互相的比較或抵消，再由不能抵消的部份作判斷。
4. 沒有「位移」的參考系概念，只注意到移動本身的大小，未能注意到移動時與固定參考系

的遠近或相對位置的關係，偶然只能經由實作過程知道總位移的差等於起點與終點間的距離。

5. 此階段的學生會因實作組合時所產生的誤差而作出錯誤的選答，因此常常只能部份正確選答題組四～七的問題。
6. 此階段的學生沒有思想操作的組合能力，同時也沒有表現學習的效果。

(二) 案例分析

案例NTNU031：台師大工教系三年級學生；男；26歲

答一：一樣多。

評析：表現可逆性的位移概念。

答二：不可能知道；只有問小明才知道，因為我不是小明，我那知道。

答三：不可能知道；問小明。

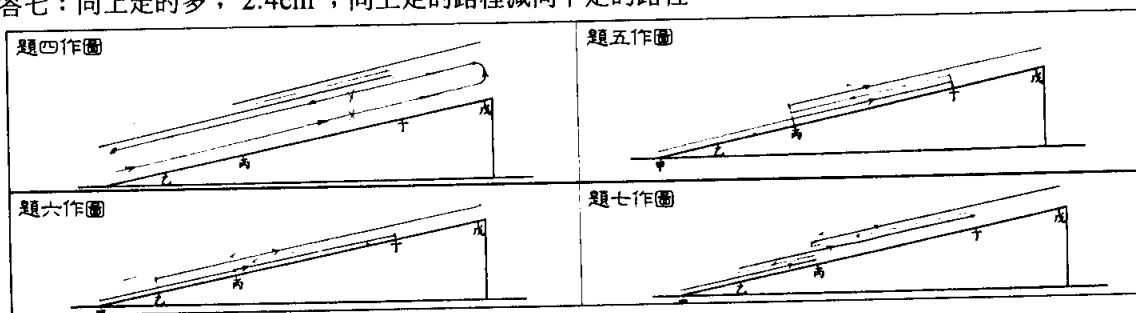
評析：沒有思想操作的位移組合概念。

答四：一樣多；因去程與回程是一樣長（ $11.4 + 9.7 = 21.1$ ； $15 + 6.1 = 21.1$ ）。

答五：向上走的多；2.3cm；向上走的路程減向下走的路程。

答六：向上走的多；0.3cm；向上走的路程減向下走的路程。

答七：向上走的多；2.4cm；向上走的路程減向下走的路程。



評析：表現定量式的具體操作組合能力：測量誤差造成題六選答錯誤；不知道總位移的差應等於起點與終點間的距離。

答八：不可能知道；因為小明才知道。

答九：不可能知道；因為只有小明才知道。

評析：沒有思想操作式的位移組合能力；無學習效果。

案例 LUJA2188：國中二年級學生；男；13.4歲

答一：一樣多；用尺測量都是一樣的長度。

評析：具可逆性位移概念。

答二：不可能知道；無記下路線，因此無法知道距離。

答三：不可能知道；無記下路線，所以無法知道走的距離。

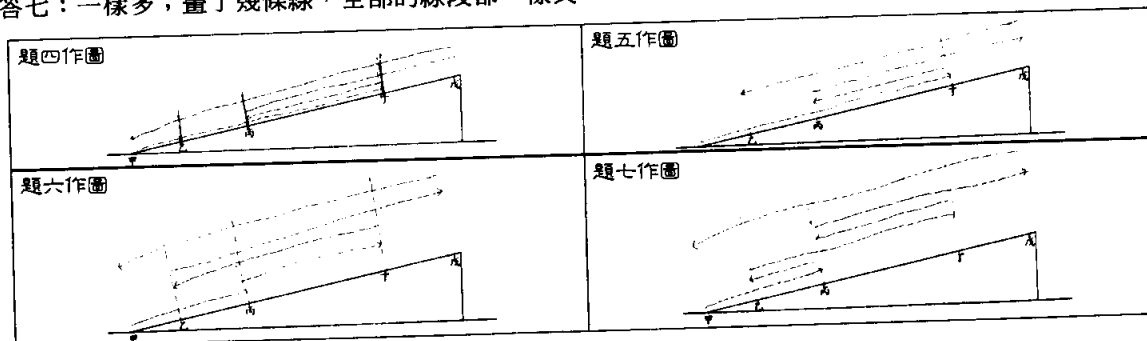
評析：無思想操作的組合能力。

答四：一樣多；把上圖畫幾條線之後，發現所有的長度都一樣。

答五：向上走的多；多了 2.3 公分；畫了幾條線之後，知道向上走的距離多了一截甲到乙的線段是多出來的。

答六：一樣多；畫了幾條線之後，全部線段的長度都一樣。

答七：一樣多；畫了幾條線，全部的線段都一樣長。



評析：表現定性式的具體操作組合概念；實作時的誤差造成題七的錯誤選答；只有在題五中知道總位移的差等於起點與終點間距離的概念。

答八：不可能知道；無記下路線，我們也不知道什麼時候向上走，什麼時候向下走。

答九：不可能知道；無記下路線，不知何時向上或向下走。

評析：無思想操作式雙向位移組合能力；無學習效果。

案例ANLO1117：國中一年級學生；女；13.0歲

答一：一樣多；因為甲地到戊地距離相同，距離是不會改變，只有時間和速度才會不同，所走的路是相同的，不會改變。

評析：具可逆性位移概念；明白上下坡都是在相同的兩固定點間移動；不會混淆動力與位移概念。

答二：不可能知道；沒有記下路線，怎麼知道走多遠，況且是來回散步，沒有說明去哪到那，所以走的路是不可能瞭解的。

答三：不可能知道；就算從甲點出發，走的路也未必相同，況且從甲走到乙還有來回散步，又沒有記下路線，不可能知道走多少路。

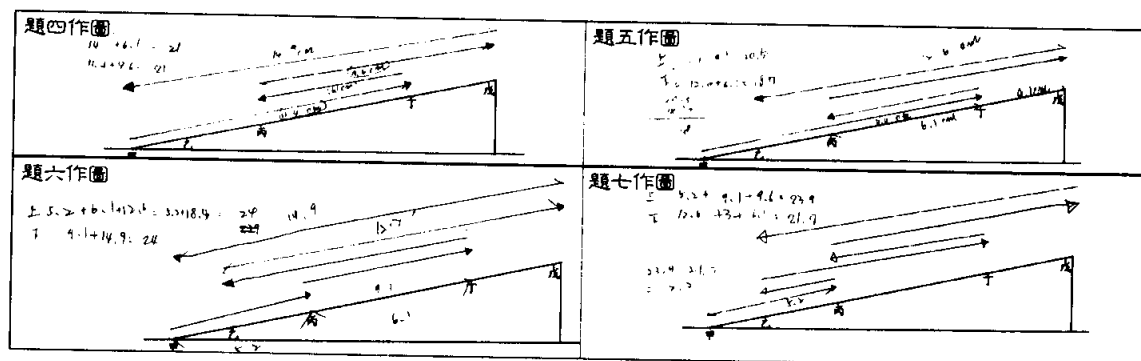
評析：無思想操作式的位移組合能力。

答四：一樣多；用尺量的，雖然看起來是向下走較長，其實仔細一量就可知其實是相同的。上： $14.9+6.1=21$ ；下： $11.4+9.6=21$ 。

答五：向上走的多；多了 1.8 公分；用尺量的，用看的是不正確的，要真正去量才能知道有多長，不相等。上： $11.4+9.1=20.5$ ；下： $12.6+6.1=18.7$ ； $20.5-18.7=1.8$ 。

答六：一樣多；用尺量，用肉眼看紅色現應該比較長，其實用尺一量確是相等等長的；上： $5.2+6.1+12.6=24$ ；下： $9.1+14.9=24$ 。

答七：向上走的多；多了 2.2 公分；用尺量，向上走 23.9，向下走 21.7，所以向上走多了 2.2 cm。



評析：表現定量式的具體操作位移組合能力；不知道總位移的差等於起點與終點間距離。

答八：不可能知道；沒有解釋清楚從哪走到那，也沒有記錄線，不能瞭解。

答九：不可能知道；沒有標明路線，沒有說哪到那，標示不清，不能瞭解。

評析：不具備思想操作式雙向位移組合能力；無學習效果。

案例 SPAI5094：國小五年級學生；男；11.5歲

答一：一樣多；因為不管甲到戊或戊到甲長度都相同。

評析：具可逆性位移概念；明白上下坡都是在相同的兩固定點間移動；不會混淆動力與位移概念。

答二：向下走的多；因為由於地心引力的關係，所以向上走的較累，向下走得較輕鬆，因此向下走的多。

答三：不可能知道；因為他最後是回到乙，所以無法判斷。

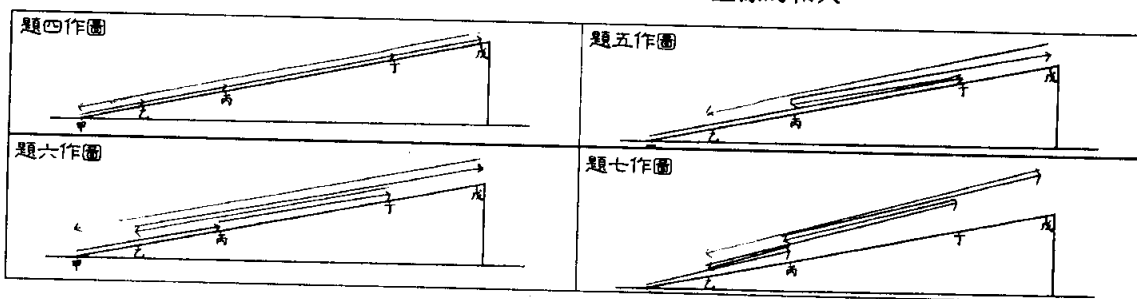
評析：無思想操作式的位移組合能力；表現動力與位移概念的混淆。

答四：一樣多；來回的長度一樣。

答五：向上走的多；多了 2.4 公分；因為紅線的和比藍線的和。

答六：一樣多；用尺量時兩種線的和一樣。

答七：向上走的多，多了 2.5 公分；用尺量的結果紅線的和比藍線的和。



評析：表現定量式的具體操作組合能力；不知道總位移的差應等於甲乙的距離。

答八：不可能知道；因為我們不知道路線。

答九：不可能知道；因為不知他的路線。

評析：無思想操作式的位移組合能力；無學習效果。

案例 TMTC048：北市師院學士後國小理科教師學分班；女；24歲

答一：一樣多；以直線進行，甲到戊的距離等於戊到甲的距離。

評析：具可逆性位移概念；明白上下坡都是在相同的兩固定點間移動；不會混淆動力與位移概念。

答二：不可能知道；既是隨意來回散步，答案 1 ~ 3 均有可能。

答三：不可能知道；由於是來回散步，雖然戊到甲的直線距離比戊到乙的直線距離長。但因路線是來回走，所以答案 1 ~ 3 均有可能。

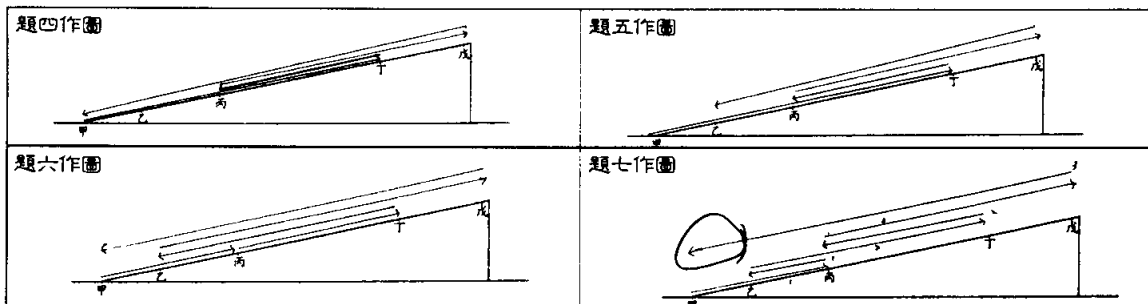
評析：無思想操作組合能力。

答四：一樣多；向上（紅線）甲—乙，乙—丙，丙—丁，丁—戊。向下（藍線）丁—丙，丙—乙，乙—甲，兩相抵銷，剛好一樣。

答五：向上走的多；多了 2.3 公分；向上（紅線）甲—乙，乙—丙，丙—丁，丁—戊；向下（藍線）丁—丙，戊—丁，丁—丙，丙—乙，抵銷後，向上多了甲到乙的距離，以尺量為 2.3 公分。

答六：一樣多；向上（紅線）甲—乙，乙—丙，丙—丁，丁—戊。向下（藍線）丁—丙，丙—乙，戊—丁，丁—丙，丙—乙，乙—甲，兩相抵銷，路徑一樣長。

答七：一樣多；向上（紅線）甲—丙及丙—戊，向下（藍線）戊—甲相同，向上（紅線）乙—丁與向下（藍線）丁—丙，丙—乙相同，所以一樣多。



評析：表現定性式的具體操作組合能力；題七因實作的錯誤而選答錯誤；只有題五時表明總位移的差等於起點與終點間距離的概念。

答八：不可能知道；路線多種，答案 1 ~ 3 均有可能。

答九：不可能知道；路線多種，答案 1 ~ 3 均有可能。

評析：無思想操作式的位移組合能力；無學習效果。

案例 NTNU039：台師大工教系三年級學生；男；28.8歲

答一：一樣多；我們從題意已知小明散步有固定路線，而且題意中沒說中途有無折返（在乙，丙，丁），所以可知走的路是一樣多。

評析：表現可逆性的位移概念。

答二：不可能知道；如果從位移上來看小明的位移是 0，若由路徑看條件不足，無法了解向上多還是向下多。

答三：不可能知道；在位移上小明移動了甲乙距離，路徑無法確定，所以無法得知。

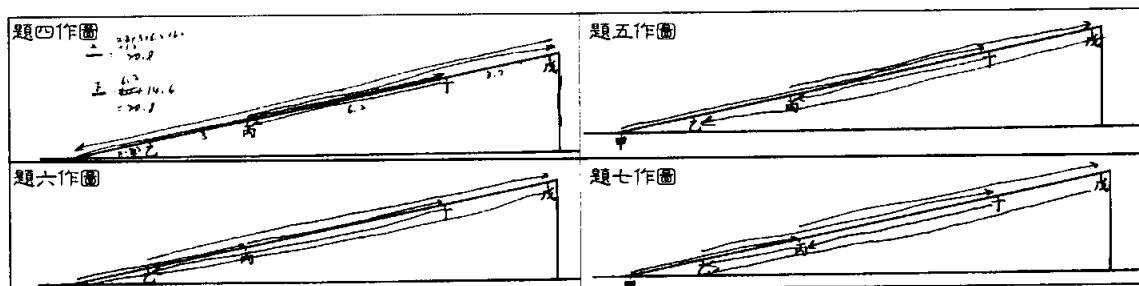
評析：無思想操作式的組合能力。

答四：一樣多；（上 $2.2+3+6.2+6.2+3.2=20.8$ ；下 $6.2+14.6=20.8$ ）用尺量路徑圖得知。或由圖可看出向上路線丙丁有重覆，等於全長+丙丁=向下（全長+丙丁），由此得知。

答五：向上走的多；多了 2.2 cm；由路徑看兩者只差甲乙的距離，所以向上比向下多 2.2 cm。

答六：一樣多；由路徑看出向上在乙丁有重疊=全長+乙丁，向下=全長+乙丁，故兩者的路徑相同。

答七：向上走的多；甲乙= 2.2 cm；由路徑看兩者只差甲乙的距離，因為除了丁戊之外，向上和向下的路徑在乙丙，丙丁各有重覆，只差了向上甲乙的距離，所以向上比向下多了 2.2 cm。



評析：同時表現定量與定性兩種具體操作組合方法；明白總位移的差應等於甲乙的距離。

答八：不可能知道；沒有路徑無法得知，但位移=0。

答九：不可能知道；沒有路徑無法得知，但位移是甲乙。

評析：無思想操作式的位移組合能力；無學習效果。

案例CCHN3055；國中三年級學生；女；14.6歲

答一：一樣多；因為來回的路程皆是一樣。

評析：具可逆性位移概念。

答二：一樣多；因為不管是否走過多少遍，最後還是回到原點。

答三：向上走的多；多了 2.3 公分；因為去的路程皆有走完，唯有回來的路程只到乙，所以可以知道向上走的多，再用尺量甲乙的路程，便知道多了多少公分。

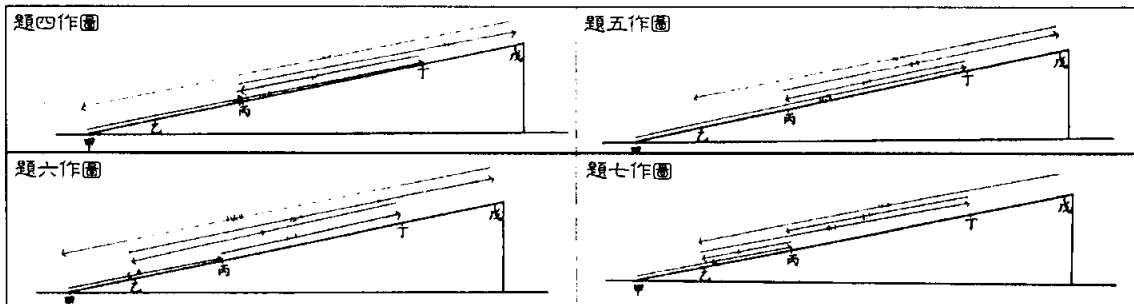
評析：無思想操作的位移組合能力；由題三知道該生是主觀的將問題簡化後再作答。

答四：向上走的多；多了 0.1 公分；因為用尺先量向上的距離，再用尺量向下的距離，便會得到答案。

答五：向上走的多；多了 2.3 公分；先用尺先量向上走的路程，再用尺量向下的，然後相減，便知道多了 2.3 公分。

答六：向上走的多；多了 0.6 公分；用尺個別量向上走和向下走的路程。

答七：向下走的多；多了 7 公分；用尺個別量向上走和向下走的路程。



評析：表現定量式的具體操作組合能力；題四、題六、題七皆因測量誤差而選答錯誤；不知道總位移的差應等於甲乙的距離。

答八：不可能知道；因為他來回的路程不一定同樣的長度。

答九：不可能知道；因為他回來的定點不一定，且長度也不一定一樣。

評析：無思想操作的位移組合能力。無學習效果。

四、階層階層 D：問題一，題組四～七，和題組八～九可以正確作答，題組二～三仍有困難

(一) 主要特徵

1. 具可逆性位移概念；明白上下坡都是在相同的兩固定點間移動；不會混淆動力與位移概念。
2. 在題組四～七的實作問題中，表現隨機組合的能力；能夠對各路段的順序及位置作隨機的排列及組合；依情況的需要能夠對單一的路段作各種分割和隨機的排列及組合。
3. 具備參考座標系的能力，在解答題組四～七時的隨機組合過程中：能夠注意到各路段與固定參考系（路面）的遠近或相對位置的關係；可以體會到總位移的差等於起點與終點間的距離的關係。
4. 題組二～三表現，顯示沒有思想操作的組合能力。
5. 在題組八～九的問題中表現學習的效果，但是只限於正確答案的學習，並未顯示推理能力的改進。

(二) 案例分析

案例ANLO2189：國中二年級；女；13.7歲

答一：一樣多；因由甲到戊，或由戊到甲距離相等。

評析：具可逆性位移概念；明白上下坡都是在相同的兩固定點間移動；不會混淆動力與位移概念。

答二：不可能知道；因為隨意的來回，可能向上的路較多，也可能向下的路較多。

答三：不可能知道；因隨意走，雖然從甲出發回到乙，但因隨意，所以不知道上、下哪一個走得更多。

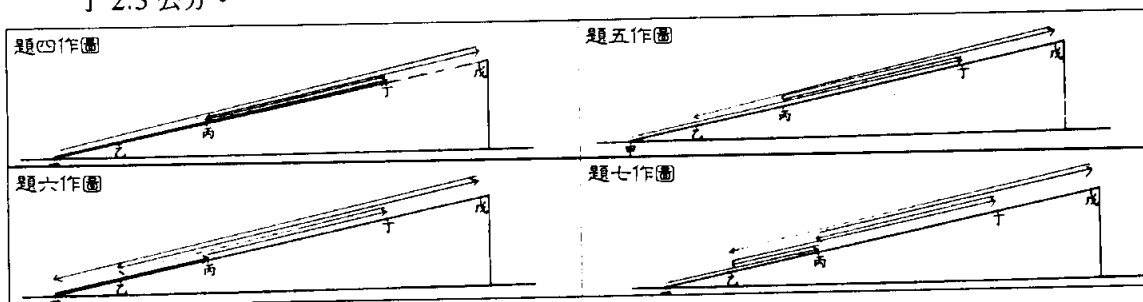
評析：無思想操作式的組合能力。

答四：一樣多；因小明向上走了甲到戊及丙到丁的距離，向下也走了甲到戊及丙到丁的距離。

答五：向上走的多；多了 2.3 公分；小明向上走的距離比向下走的距離多了甲到乙的距離，而用直尺測得甲到乙得到 2.3 公分。

答六：一樣多；小明向上及向下都走了甲到戊及乙到丁的距離，故一樣長。

答七：向上走的多；多了 2.3 公分；小明向上的距離比向下的距離多了甲到乙的距離，故用尺測得多了 2.3 公分。



評析：表現隨機的具體操作組合能力；知道上下山總路程差與起點終點間距離關係。

答八：一樣多；由甲出發回到甲。

答九：向上走的多；由甲出發只回到乙。

評析：表現學習效果；體會到上下山總路程差與起點終點間距離關係的一般性，未顯示推理能力的改進。

案例NTNU049：台師大英研所二年級；女；25歲

答一：一樣多；就字面解釋由甲到戊，再由戊到甲的行走路線，依上圖兩者路線一樣。

評析：具可逆性位移概念；明白上下坡都是在相同的兩固定點間移動；不會混淆動力與位移概念。

答二：向上走的多；向上走雖費力但好施力，向下走較不易。

答三：向上走的多；2.2公分左右+未知數；和問題二理由相同。

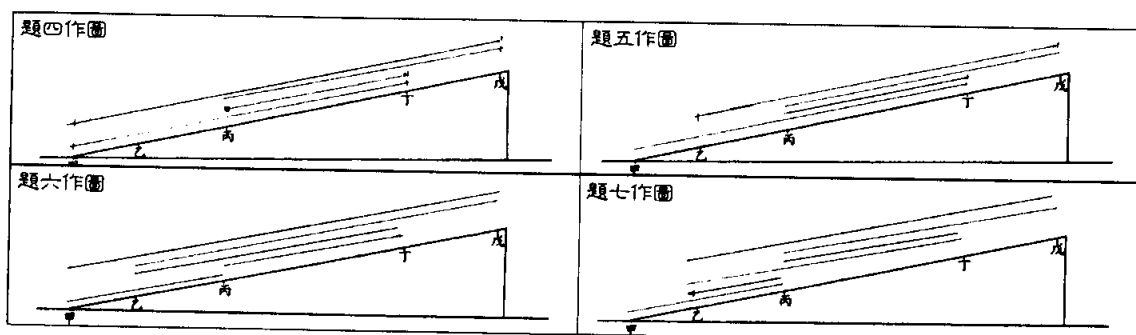
評析：沒有思想操作的位移組合能力；表現動力與位移概念的混淆。

答四：一樣多；向上走：甲丁+丙戊=甲戊+丙丁，向下走：甲戊+丙丁，所以兩者路線一樣。

答五：向上走的多；2.2 cm；向上走：甲丁+丙戊=甲戊+丙丁(6.2 cm)，向下走：戊乙+丁丙=甲戊+小於丙丁的一段路線(4 cm)。

答六：一樣多；向上走：甲丙+丙丁+乙戊=甲乙+乙丁+乙戊=甲戊+乙丁；向下走：甲戊+乙丁，所以距離相同。

答七：向上走的多；2.2 cm；向上走：甲丙+乙丁+丙戊=甲戊+乙丁=甲乙+乙戊+乙丁，向下走：丙乙+丁丙+戊乙=戊乙+丁乙。所以向上走的路線較向下走多了甲乙一段，甲乙一段2.2 cm。



評析：表現隨機的具體操作組合能力；知道上下山總路程差與起點終點間距離關係。

答八：一樣多；由前面的散步路線種類，小明維持總距相同的來回散步路線，甲點為出發點及終點者，距離一樣。

題九：向上走的多；2.2cm；在山坡上隨意的來回散步路線維持來回距離相同的形式，但回程時，只須到乙點，依前面情況，會比去程少甲乙一段。

評析：表現學習效果；體會到上下山總路程差與起點終點間距離關係的一般性。

案例LUJA2174；國中二年級；男；13.6歲

答一：一樣多；因為他把出發點告訴你又把目標告訴你，所以出發的長度和回來的長度是一樣。

評析：具可逆性位移概念；明白上下坡都是在相同的兩固定點間移動；不會混淆動力與位移概念。

答二：不可能知道；因為他只有告訴你目的沒說出發從哪一個地方，所以不可能知道。

答三：不可能知道；因為他只有告訴你目的沒說出發從哪一個地方，所以不可能知道。

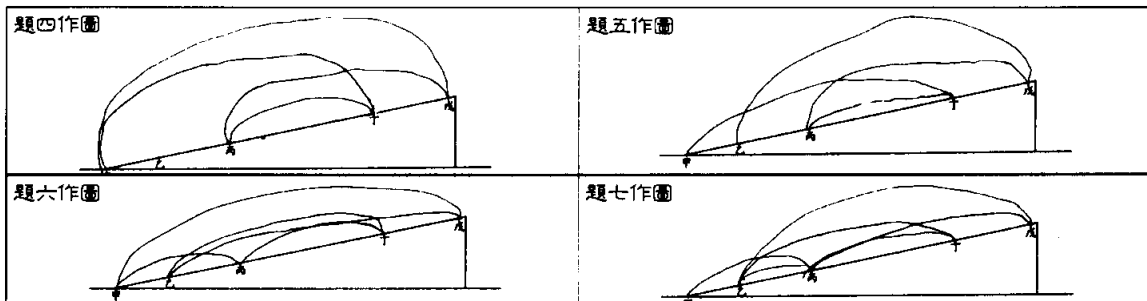
評析：無思想操作的位移組合能力。

答四：一樣多；因為甲先到丁再丁到丙，丙到戊，最後回到甲所以一樣多。

答五：向上走的多；多了 2.2 公分；為從甲出發到戊最後才回到乙，所以向上走的多。

答六：一樣多；因為從甲出發回來還是甲所以一樣多。

答七：向上走的多；多了 2.2 公分；因為出發點從甲地回來的時候只到乙，所以向上走的多。



評析：根據位移時覆蓋的路程作答；表現定性式的具體操作組合能力；注意到過程中相對位置的變化與位移的關係；上下山總路程差與起點終點間距離的關係。

答八：一樣多；因為從甲出發回來還是原來的地方所以一樣多。

答九：向上走的多；多了 2.2 公分；因為從甲出發回來的時候沒回到甲，所以從這裡看向上走的多。

評析：表現學習效果；體會到上下山總路程差與起點終點間距離關係的一般性。

案例NTNU007：台師大工教系三級學生；男

答一：一樣多；因為甲到戊的距離等於戊到甲的距離。

評析：具可逆性位移概念；明白上下坡都是在相同的兩固定點間移動；不會混淆動力與位移概念。

答二：因為他隨意來回散步，無法測出正確距離。

答三：向上走的多；多了 2.3 公分；因為小明下山的路程少了 2.3cm，（甲→A）。

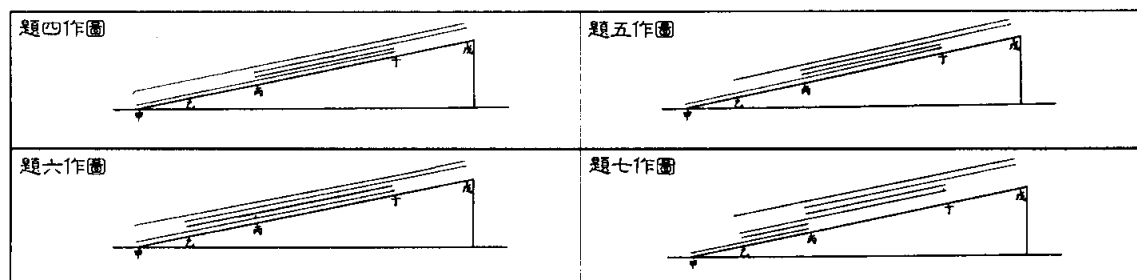
評析：表現初期的思想操作組合能力；題二選答錯誤，題三選答正確，題三時並且知道上下山總路程差與起點終點間距離的關係。

答四：一樣多；甲丁 + 丙戊的距離等於丙丁 + 甲戊的距離。

答五：向上走的多；多了 2.3 公分；向上走比向下走的距離多出甲乙段。

答六：一樣多；甲丁 + 乙戊的距離等於乙丁 + 甲戊的距離。

答七：向上走的多；多了 2.3 公分；因為向上走比向下走的距離多出甲乙段。



評析：表現隨機的具體操作組合能力；知道上下山總路程差與起點終點間距離關係。

答八：一樣多；向上走和向下走一樣距離。

答九：向上走的多；多了甲乙段。

評析：表現學習效果；體會到上下山總路程差與起點終點間距離關係的一般性。

案例NTNU037：台師大工教系三級學生；女

答一：一樣多；同一條路，走的當然一樣多，只是向上和向下所費的力不同而已。

評析：具可逆性位移概念；明白上下坡都是在相同的兩固定點間移動；不會混淆動力與位移概念。

答二：視情況而定；若小明走了無限多次，則根據常態分配，兩者會一樣多。若沒有無限多次，則也不一定，看甲是上去的次數多還是下去的次數多。

答三：視情況而定；若只是在乙點附近盤桓，則向上走的多，因多走了甲到乙的距離，若小明隨意走動無限多次，則是常態分配，但仍多走了甲到乙的路程，仍是向上的多。

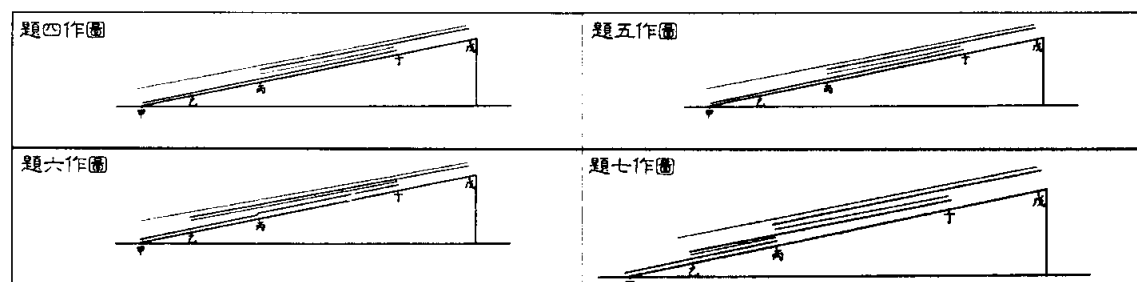
評析：無思想操作式的組合能力。

答四：一樣多；紅線和藍線一樣長，相抵銷。

答五：向上走的多；多了 2.3 公分；多了甲乙的路。（根據紅線和藍線相抵銷的結果，紅線多了甲到乙的路段）。

答六：一樣多；紅、藍線相抵銷的結果，沒有差異。

答七：向上走的多；多了 2.3 公分；多了甲到乙的路，（根據紅線和藍線相抵銷的結果）。



評析：表現隨機的具體操作組合能力；知道上下山總路程差與起點終點間距離關係。

答八：一樣多；由甲到戊，在由戊到甲，不論如何走，向上走都等於向下走的路。

答九：向上走的多，多了 2.3 公分；因只回到乙點，向下最多只從戊到乙，但向上確是由甲到戊，多了甲乙的路。

評析：表現學習效果；體會到上下山總路程差與起點終點間距離關係的一般性。

五、概念階層 E：所有四個題組的問題皆能正確作答

(一) 主要特徵

1. 具可逆性位移概念；明白上下坡都是在相同的兩固定點間移動；不會混淆動力與位移概念。
2. 表現隨機式的具體操作組合能力。
3. 表現互補式的思想操作組合能力。
4. 表現明確的位移參考系概念；不必經由實作，明白總位移的差等於起點與終點間的距離的關係。

(二) 案例分析

案例 TMTC063：北市師院學士後國小社會科教師學分班；女；21歲

答一：一樣多；甲戊 = 戊甲。

評析：具可逆性位移概念；明白上下坡都是在相同的兩固定點間移動；不會混淆動力與位移概念。

答二：一樣多； Σ （向上走的路）= Σ （向下走的路），才會回到原點。

答三：向上走的多，多了甲乙 = 2.2 公分； Σ （向上走的路）- Σ （向下走的路）= 甲乙，所以回到乙點。

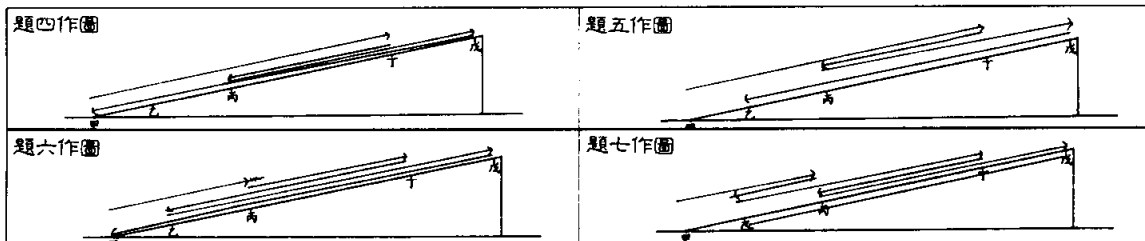
評析：表現隨機式的思想操作組合能力；明白總位移的差等於起點與終點間的距離。

答四：一樣多；甲丁 + 丙戊 = 甲戊 + 丙丁。

答五：向上走的多，多了甲乙 = 2.2 公分； $(\text{甲丁} + \text{丙戊}) - (\text{丙丁} + \text{乙戊}) = \text{甲乙}$ 。

答六：一樣多；甲丙 + 丙丁 + 乙戊 = 乙丁 + 甲戊。

答七：向上走的多；多了甲乙 = 2.2 公分； $(\text{甲丙} + \text{乙丁} + \text{丙戊}) - (\text{乙丙} + \text{乙戊}) = \text{甲乙}$ 。



評析：表現隨機式的具體操作組合能力；明白總位移的差等於起點與終點間的距離。

答八：一樣多； Σ （向上走的路）= Σ （向下走的路），才會回到原點。

答九：向上走的多；多了 2.2 公分； Σ （向上走的路）- Σ （向下走的路）= 甲乙，因此回到乙點。

評析：表現隨機式的思想操作組合能力；明白總位移的差等於起點與終點間的距離。

案例 NTNU004：台師大工教三年級學生；男；22歲

答一：一樣多；理論上，如果從甲到戊或從戊到甲的路徑呈一直線，則路長是往回相同的。

評析：具可逆性位移概念；明白上下坡都是在相同的兩固定點間移動；不會混淆動力與位移概念。

答二：一樣多；小明在同一方向來回走動，必因向下走的路和向上走的路一樣多，而回到原出發點甲。

答三：向上走的多；小明在同一方向作正負來回走動，必因向上走比向下走之路徑總和多出甲乙長度使小明停駐在乙點。

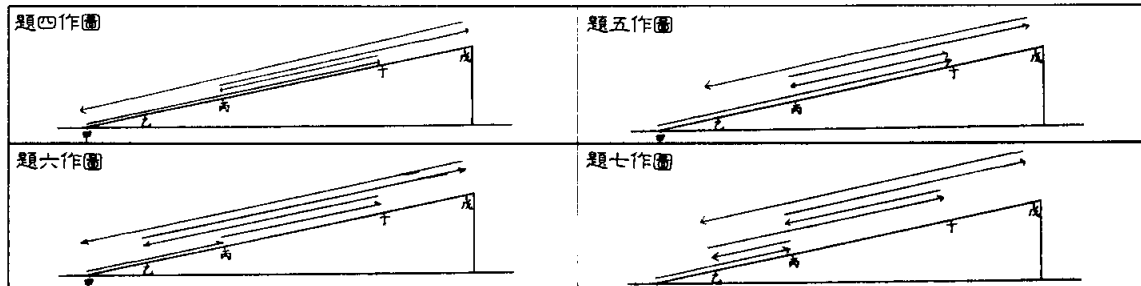
評析：表現互補式的思想操作組合能力；明白總位移的差等於起點與終點間的距離。

答四：一樣多；向上 = 甲丁 + 丙戊 = 甲戊 + 丙丁，向下 = 甲戊 + 丙丁 = 向上。

答五：向上走的多；向上 = 甲丁 + 丙戊 = 甲戊 + 丙丁，向下 = 乙戊 + 丙丁 < 甲戊 + 丙丁 = 向上。

答六：一樣多；向上 = 甲丙 + 丙丁 + 乙戊 = 甲戊 + 乙丁，向下 = 甲戊 + 乙丁 = 向上。

答七：向上走的多；向上走 = 甲丙 + 乙丁 + 丙丁 = 甲戊 + 乙丁，向下走 = 乙戊 + 乙丁，向下走 = 乙戊 + 乙丁 < 甲戊 + 乙丁。



評析：表現具體操作的隨機組合能力；明白總位移的差等於起點與終點間的距離。

答八：一樣多；向上和向下行的總行程，兩者之間必須相等才會回到起點甲。

答九：向上走的多；向上的總行程必定大於向下的總行程，且兩者之差恰為甲乙，使小明的終點回到乙點。

評析：表現互補式的思想操作組合能力；明白總位移的差等於起點與終點間的距離。

案例NTNU015：台師大工教系學生；男

答一：一樣多；理論上應該是一樣多，因為來回路線相同，不過可能牽涉一些小因素而影響距離，但理論上說起來是相同的。

評析：具可逆性位移概念；明白上下坡都是在相同的兩固定點間移動；不會混淆動力與位移概念。

答二：一樣多；因為就算是隨意散步，但走上去和走下的距離要一樣才能回到原點。

題三：向上走的多；從甲點出發未回到甲點，少了從甲點到乙點的距離。

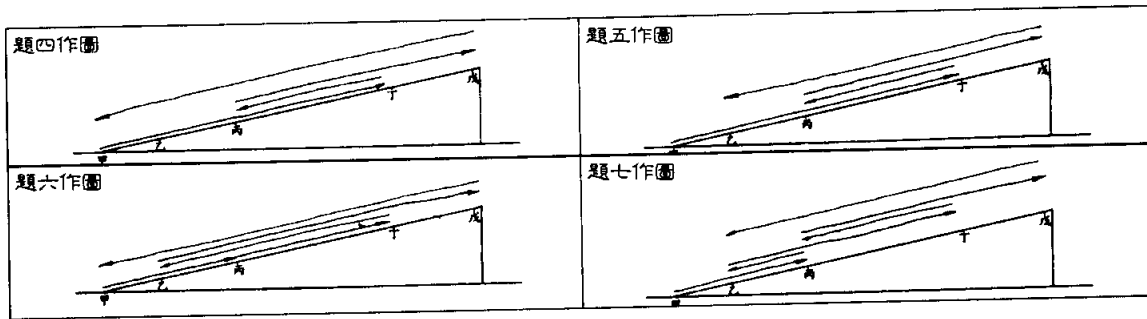
評析：表現互補式的思想操作組合能力；明白總位移的差等於起點與終點間的距離。

答四：一樣多；向上的路線距離是甲戊加上一個重覆的距離丙丁，和向下的距離丙丁加上甲戊距離一樣。

答五：向上走的多；由圖可知向上走的距離甲戊加上一重覆之丙丁，但向下走的距離是丙丁加乙戊，少了一段甲到乙的距離。

答六：一樣多；向上走的距離為甲戊加上重覆之乙丁，向下距離為甲戊再加上一個乙丁。

答七：向上走的多；向上走距為甲乙 + 2 × 乙丙 + 2 × 丙丁 + 丁戊，向下走為 2 × 乙丙 + 2 × 丙丁 + 丁戊，差了一段甲乙的距離。



評析：表現隨機式的具體操作組合能力；明白總位移的差等於起點與終點間的距離。

答八：一樣多；從起點往山坡上走，要回到起點所走的距離要相同才有可能回到起點，除非路線不一樣。

答九：向上走的多；因為由甲出發，但最後卻只走回乙點，就差了這段甲到乙的距離。

評析：表現互補式的思想操作組合能力；明白總位移的差等於起點與終點間的距離。

案例NTNU021：台師大工教系二年級學生；女

答一：一樣多；若走一直線的話，來回走的路應是相同的。

評析：具可逆性位移概念；明白上下坡都是在相同的兩固定點間移動；不會混淆動力與位移概念。

答二：一樣多；因為雖沒記下路線，但走上就一定走回來，所以相同。

答三：向上走的多；因少了從甲到乙的路。

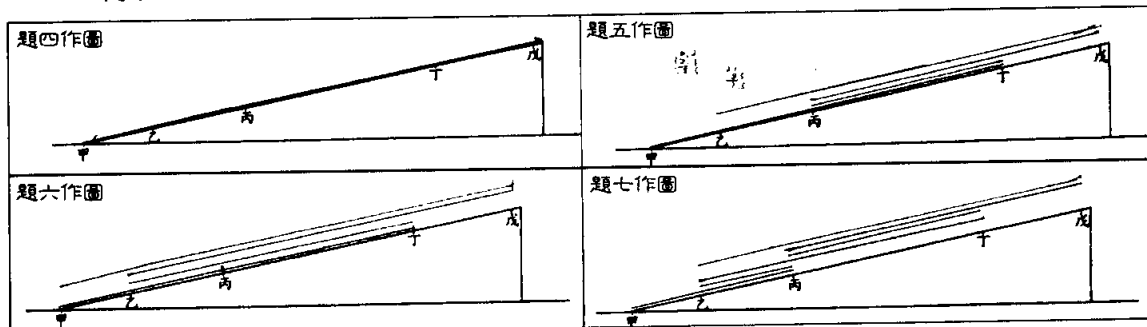
評析：表現互補式的思想操作組合能力；明白總位移的差等於起點與終點間的距離。

答四：一樣多；兩線等長。

答五：向上走的多；用尺量出之結果（ $6.2 + 12.3 = 18.5$ ， $\dots 21 - 18.5 = 2.5$ ）。

答六：一樣多；因為向上走的部份：甲丙 + 丙丁 + 丁戊 = 甲戊，還剩乙丁，而向下走部份有甲戊和乙丁，剛好來回相等。

答七：向上走的多；往上部份：甲丙 + 丙丁 + 丁戊 = 甲戊，還剩乙丙 + 丙丁 = 乙丁，往下部份為乙丙 + 丙丁 = 乙丁和乙戊，所以乙丁兩互抵又往上的甲戊 > 乙戊，所以向上走的多。



評析：表現隨機式的具體操作組合能力。

答八：一樣多；由前面問題得知，只要最後起終點相同距離相同。

題九：向上走的多；由前問題求證出。

評析：表現思想操作的組合能力。

案例 SPAI6073：國小六年級學生；男：12.6歲

答一：一樣多；因為甲到戊的距離和戊到甲的距離相同。

評析：具可逆性位移概念；明白上下坡都是在相同的兩固定點間移動；不會混淆動力與位移概念。

答二：一樣多；因為有上就會有下，因此回到甲點後向上和向下一樣多。

答三：向上走的多；多了 2.3 公分；因為他沒有回到甲點，因此向上的距離多了甲到乙的長度。

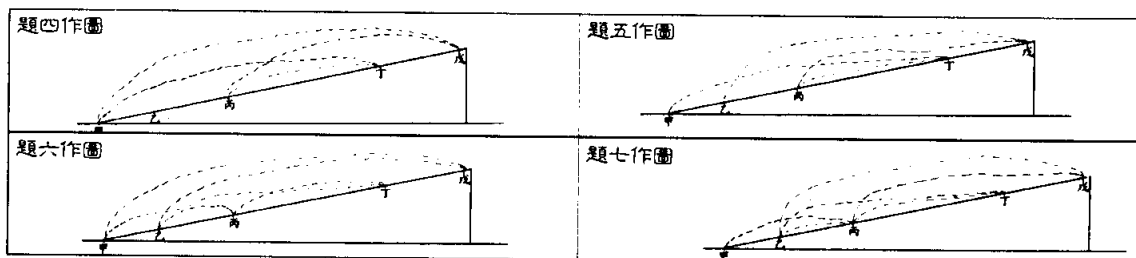
評析：表現互補式的思想操作組合能力；明白總位移的差等於起點與終點間的距離。

答四：一樣多；因為最後是回到原點（甲）。

答五：向上走的多；多了 2.3 公分；因為下去只到乙，並未到甲，所以向上走較多。

答六：一樣多；因為從甲出發，最後回到甲。

答七：向上走的多；多了 2.3 公分；因為並未回到甲，所以向上多了甲到乙的長度。



評析：表現具體操作組合能力；明白總位移的差等於起點與終點間的距離。

答八：一樣多；因為由甲出發，最後又回到甲，所以一樣多。

答九：向上走的多；多了 2.3 公分；因為多了甲到乙的距離。

評析：表現互補式的思想操作組合能力；明白總位移的差等於起點與終點間的距離。

案例ANLO1125：國中一年級學生；女：12.4歲

答一：一樣多；因為沒有來回亂走，又是同一路線。

評析：具可逆性位移概念；明白上下坡都是在相同的兩固定點間移動；不會混淆動力與位移概念。

答二：一樣多；來回走，向上走時，向下走會補回來。向下走時，向上走會補回來，來回當然相同。

答三：向上走的多；多了 2.2 公分；來回互補，但回來時，並未回到甲點，而是回到乙點，回來時少了甲～乙（2.2 公分）的路程。

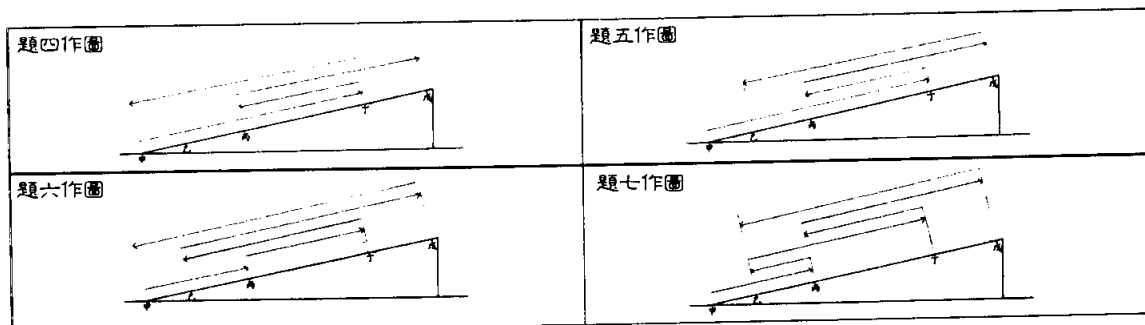
評析：表現互補式的思想操作組合能力；兩題選答皆正確；明白總位移的差等於起點與終點間的距離。

答四：一樣多；用尺量，而且起點終點都是甲。

答五：向上走的多；多了 2.2 公分；來回互補，最後終點是乙而不是甲。回去時少了甲～乙（2.2 公分）這段路。

答六：一樣多；同一終點、起點。來回互補。

答七：向上走的多；多了 2.2 公分；來回互補。回去時少了甲～乙起（2.2 公分）的路程。



評析：表現互補式的具體操作組合能力；明白總位移的差等於起點與終點間的距離。

答八：一樣多；同一終、起點。來回互補。

答九：向上走的多，多了 2.2 公分；來回互補，多了甲～乙（2.2 公分）的路程。

評析：表現互補式的思想操作組合能力；明白總位移的差等於起點與終點間的距離。

案例 TMTTC079：北市師院學士後國小社會科教師學分班；女：20歲

答一：一樣多；小明走的是直線，其中又無叉路，由起點到終點再由終點回到起點，自然一樣多。

評析：具可逆性位移概念；明白上下坡都是在相同的兩固定點間移動；不會混淆動力與位移概念。

答二：一樣多；無論怎麼走，最後還是回到甲，而且只有一條路，所以向上的位移必要等於向下的距離才可能回到甲點。

答三：向上走的多；多了 2.2 公分；由甲出發，但最後只回到乙，回來時少走了甲→乙的距離，因此向上走多了 2.2 公分。

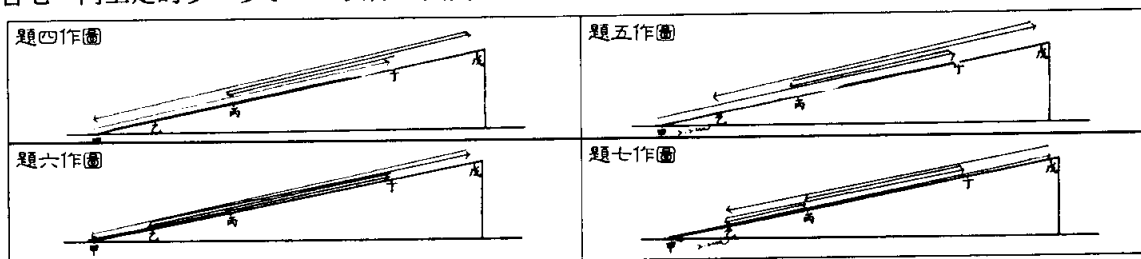
評析：表現互補式的思想操作組合能力；兩題選答皆正確；明白總位移的差等於起點與終點間的距離。

答四：一樣多；由問題二即知，此時再獲肯定，只要回到原點，距離必相同。

答五：向上走的多；多了 2.2 公分；由問題三即知，此時由繪圖可再次證明。

答六：一樣多；紅筆所畫和藍筆所畫正好互相抵銷，表距離相等，與問題四其實完全一樣，只要由原點出發，再回到原點，其所走的距離必相同。

答七：向上走的多；多了 2.2 公分；與問題三相同，且由繪圖可之，紅的比藍的多 2.2 公分。



評析：表現互補式的具體操作組合能力；明白總位移的差等於起點與終點間的距離。

答八：一樣多；與前面的問題一樣，只要回到原點，所走的路必一樣多。答案正確；表現思想操作的位移組合能力。

答九：向上走的多；多了 2.2 公分；與前面的問題一樣，因沒有回到甲，只到乙，所以向上多走了甲到乙的 2.2 公分。

評析：表現互補式的思想操作組合能力；明白總位移的差等於起點與終點間的距離。

結 論

以上的個案分析，不只是驗證了皮亞傑對於學生位移組合概念的階層發展理論，而且還讓我們對其發展的歷程和特性有更深一層的瞭解。

概念階層 A 的學生所表現的位移概念，可以說是一種主觀及絕對的概念。他們對位移的體會，沒有任何客觀參考座標系的意識。他們的位移大小觀念只是一種主觀的感受，或者只是一種以本身為參考系的移動觀念。這時候的學生是以感覺來判斷位移的大小，比較辛苦的時候就可能認為比較遠，或是比較快的時候就可能比較近等等。由於位移只是一種主觀的感覺，當然就會認為上坡與下坡的遠近會不相等，而表現不可逆性的位移概念。由於沒有客觀參考座標系的意識，因此也就不可能具備對長度大小的相對性概念，當然也就不可能具有位移的大小概念。

概念階層 A 學生所表現的位移概念，也顯示位移與空間距離對他們而言是兩種互相獨立的概念。在固定的兩點間移動時，雖然空間的距離是固定的，但是當上坡與下坡的難易度不同，或走路的步數不同，或走路的步長不等時，就會認為所走路程的長短不同。

步行式的位移概念，顯然也可以看作是一種距離的測量概念。概念階層 A 學生會以為走路的步數不同時，或是走路的步長不等時，所走路程的長短就會不同的想法，就相當於以為使用不同大小的尺去測量同一物體的長度時，會認為長度就會不相等。但是由概念階層 A 的案例，我們可以看到部份的這些學生顯然具備用尺作測量的能力，甚至還可以對測量的結果進行某種的計算。以上的情形，毫無疑問的告訴我們，學生會用一固定長度的尺去作測量，或是教會學生用一固定長度的尺作測量，並不等同於具備測量或長度的正確概念。

由以上概念階層 A 學生的作答情形，可以看到我們所採用較擬人化的步行方式的問題

設計，相當程度的提升了題一對學生可逆性位移概念診斷的效度。相對於皮亞傑所採用的串珠滑動方式，我們的示範方式或問題，能更有效地引發受測者對個人感官和步伐大小等的考慮因素。

概念階層 B 學生的最明顯進步是對簡單位移現象的可逆性概念的建立。此種能力的建立事實上包含兩種子概念的形成：其一是對空間距離的可逆性的認識，也就是說瞭解到兩固定點間的空間間隔是和方向沒有關係的（甲乙 = 乙甲）；其二是體會到在兩點間位移的大小是由該兩點間的空間間隔所決定，而與步行的方式無關。我們可以看到，這時候的學生發展出一種地區性 (local) 的參考座標系概念，也就是說他們開始能以地點的順序作為判斷位移和空間間隔的遠近或大小。當位移是由甲到乙、乙到丙、丙到丁、丁到戊的時候，他們知道到達戊要比到達丁遠、到達丁比到達丙遠、到達丙要比到達乙遠等等。此種順序的能力同時也使他們具備可逆性位移的概念，因為他們知道甲到戊和戊到甲都是在相同的兩點間移動，所以是相同的位移。

概念階層 B 學生只具備對簡單位移情況下（題一）的距離概念，對於連續多次位移的情形則完全失去對距離意義的瞭解。這種情形的發生顯然與他們的地區性參考座標系概念，或是以地點的順序作為判斷位移和空間間隔的遠近或大小的能力有關。因為在連續和來回移動的情況下，地點的直線順序性就被壞了。這時期的學生所表現的特徵是缺乏對連續位移路段的區分能力：他們會混淆位移與位置的概念；會只根據經過的地點或根據路線的轉折次數來判斷路程的遠近；會錯將單一路段的長度當作是上下坡總位移的差，或是將起始時的路段距離當作是上下山總位移的差；在具體操作的問題中（題組四～七），只對起始和最後路段的長短作比較，忽略中間的路段；在思想操作的問題中（題組二～三），會主觀的將問題簡化或具體化後再作答；或是只根據所畫的路

段圖形作一種直覺式的作答。我們還必須指出的是這種對路段區分的困擾，通常是發生在位移組合的過程當中，而不是發生在每一單獨路段的認識上。事實上，這些學生可以根據題目的說明，一一的標示出各別上下坡的路段，甚至可以對各別的路段進行正確測量。

達到概念階層 C 的學生，開始脫離以地點的順序作為判斷位移和空間間隔的遠近或大小的方法，他們開始表現位移路段的距離概念。在面對題組四～七的問題時：他們會特別強調地點間的距離概念，而不只是到達或經過的地點；他們不再只根據路線的轉折次數作答；不再混淆位移與位置的概念；不會再錯將起始時的路段距離當作是上下山總位移的差；也不會只比較起始和最後路段而忽略中間的路段。

這時期的學生在面對題組四～七時普遍表現兩種組合的方式：其一是對固定地點的各個路段，進行長度的測量，然後再作紙筆式的加減計算和比較；其二是在各路段原來的位置上直接對上下坡的路段的長短作互相的比較或抵消，然後再由抵消的情形作判定。這兩種組合方式都顯示這些學生的組合能力的缺乏靈活性，他們無法在思想上對位移的路段進行交互的移動或位置的移動，他們所認識的位移和發生位移時的空間位置的關係是相互固定不變的。這種組合方式的表現，顯示位移距離概念的發展與空間位置概念的發展的相關性，也就是說學童要能夠隨時注意到位移時移動物與外界參考系的關係，他才可能發展出位移的距離概念。

然而概念階層 C 學生的這種固定式的參考座標系能力，也使他們缺乏一種宏觀的相對位置的關係，他們看不出來總位移的差與起點與終點間距離的關係。也因為如此，他們對實作組合所得到的結果，缺乏一種檢驗的準則。因此經常只會根據實作的結果作出錯誤的選答，而變成只能部份選答正確。

相較於概念階層 C，概念階層 D 的學生

則表現充分靈活的具體組合方式，他們的標準推理方式通常是： $甲丙 + 丙丁 + 乙戊 = 甲乙 + 乙丁 + 乙戊 = 甲戊 + 乙丁$ 。也就是說，他們能夠對各路段的順序及位置作隨機的排列和相加或相減，或是依需要可以對單一的路段作分割再隨機的排列和相加或相減。由於這種靈活的組合特性，這些學生可以注意到位移時的一種宏觀的相對位置關係，因此會表現一種宏觀的參考座標系概念。因為具有此種宏觀的參考座標系概念，他們可以很快就看出來總位移的差與起點與終點間距離的關係。也因為如此，這些學生對於經由實作組合方法所得到的結果，具有一種判別的準則，他們也就不太可能會被實作方式所產生的誤差所誤導，而對題組四～七作錯誤的選答。

概念階層 D 學生的這種宏觀參考座標系概念，很顯然的只是一種具體操作期的能力。這些學生是在回答題組四～七的時候才體會到總位移的差與起點與終點間距離的關係，在回答題組二～三的思想操作層次的問題時他們並不知道這種關係。而這些學生在題組八～九上所表現學習的效果，也只是一種經驗或知識的轉移，並沒有真正提升他們實質的組合能力，這點也可以由他們對題組八～九的作答模式加以証實。

概念階層 E 的學生可以輕易的回答題組二～三和其它所有的問題。題組二～三所不同於題組四～七者，是作答者必須在頭腦中去想像各種可能的路徑，然後再加以証實及歸納。概念階層 E 學生所不同於概念階層 D 學生之處，就是他們能夠對不確定的路徑情況，去想像各種具體或可能的路徑而再加以証實，這種過程並且要能夠重複的在腦中進行。這種能力，也許這就是皮亞傑所謂的二次操作(second order operation)的形式操作能力的意思吧。

我們的分析也顯示，具有長度測量的能力，並不一定相等於具有距離的概念或距離組合的能力：能夠正確測量出甲戊間距離的大

小，並不一定知道由甲到戊會相等於由戊到甲；能夠正確測量出所有路段的長度，甚至能夠將測得的結果作四則的運算，也並不一定能夠對實質的位移作正確的組合。如果測量與運算的結果與想像的結果不一樣時，低層次的學生會同時接受兩種答案而認為理所當然，又如如果測量的誤差與錯誤的想法一樣時，低層次的學生會把測量的誤差作為他錯誤想法的證明。以上的現象，明顯的告訴我們，傳統的測量能力的教學方式必須要加以檢討。以往的教學可能是把它當作是一種技能的訓練，我們要求學生要如何對齊量尺與被測物的兩端，如何閱讀量尺上的數值。這種訓練很明顯的是和增進長度或距離的概念無關，也許學生所需要的是多一些長度概念的定性的學習。

以上的案例也顯示，位移組合概念的發展和座標參考系能力的發展的相關性。概念階層 A 時，學生沒有任何客觀的參考座標系的概念，最多也只有含混的主觀的遠近觀念；概念階層 B 時，學生開始有地區性地點的參考座標系的概念，他們以到達的地點的前後作為判斷位移大小的依據；概念階層 C 的學生，開始具備初期的正確座標系概念，他們開始注意到位移時兩點間的距離問題；達到概念階層 D 的學生，同時也達到參考座標系能力的最後發展階段，這時候的學生在組合的過程中，隨時隨刻都很清楚位移與外在座標的相對位置。這種情形表示位移組合能力和參考座標系概念的發展是互相平行和互為因果的。同時，我們的案例分析也發現，具備參考座標系概念的階層 D 學生並非就可以解決思想操作式的位移組合問題。換句話說，參考座標系概念的發展只是代表一種具體操作期能力的發展，它與形式操作期的能力尚有一段距離。

我們所區分的五個概念發展階層顯然是與皮亞傑所宣稱的五個概念發展階層相互對應的。概念階層 A 相當於皮亞傑的概念階層 I；概念階層 B 相當於概念階層 II；概念階層 C 相當於概念階層 IIIA；概念階層 D 相當於概

念階層 IIIB；而概念階層 E 則相當於概念階層 IV。但是我們也必須指出，我們所區分的階層並不一定完全對等於皮亞傑理論中的階層。原因之一是因為在實施紙筆式的群測時，主試者無法像個別面診時一樣，可以對受測者進行個別的示範動作，或是可以根據受測者的不同反應提出不同方式的問題。此種限制，對於低層次概念的診斷影響尤其大。例如，在被歸類到概念階層 A 和概念階層 B 的受測者中，我們就無法知道有那些人會因為主試者的示範動作而改進他們的作答。因此之故，概念階層 A 的學生中有部份可能會是屬於皮亞傑理論中的概念階層 II，而概念階層 B 的學生中也可能有部份是皮亞傑理論中的概念階層 IIIA。就整體而言，我們所區分的每一個概念階層，應該會比相對應的皮亞傑所區分的概念階層稍高。

本研究証明了紙筆式測試工具對位移組合概念發展的診斷的可行性，增進了我們對學童位移組合概念發展歷程的更深一層的理解，也建立了各個概念階層學生的推理模式資料庫，對於未來教材教法的改進應該具有一定的參考價值。

誌 謝

本研究承蒙國科會專題計劃經費的補助 (NSC86-2511-S-003-022)，各取樣測試學校的行政配合與協助，研究所廖德富、梁添水、王郁軒、林准儂、陳介文、張州甫等同學的部份測試工作的參與，僅在此致最高的謝意。

參考文獻

1. 黃湘武、劉謹輔、陳忠志、江新和、杜鴻模、陸業堯 (1985)：國中學生質量守恒、重量守恒、外體積觀念與比例推理能力之抽樣調查。中等教育，36(1)。
2. 黃湘武、邱韻如、莊福泰 (1995)：我國學生水平面及空間概念成長之研究。科學教

- 育學刊，3(2)。
3. 黃湘武、邱韻如 (1997)：水平面概念的群體式實驗學習和個別式自我學習的效果研究。科學教育學刊，5(1)。
 4. Piaget, J. *The Child's Conception of Movement and Speed*. New York: Basic Books. (Originally published in French by Press Universitaires de France, Paris, 1946)
 5. Piaget, J. *The Child's Conception of Space*. New York: Basic Books. (Originally published in French by Press Universitaires de France, Paris, 1956)
 6. Piaget, J. *The Child's Conception of Geometry*. New York: Basic Books. (Originally published in French by Press Universitaires de France, Paris, 1960)
 7. Piaget, J., (1964). Cognitive development in children: Development and learning. *Journal of Research in Science Teaching*, 2, 176-186.
 8. Inhelder, B., & Piaget, J. (1958). *Growth in logical thinking from childhood to adolescence*. New York: Basic Books.
 9. Ervin, P. & Darrell G. P. The Performance of College Students on Piaget-type Tasks Dealing with Distance, Time, and Speed. *Journal of Research in Science Teaching*. 23(9), 841-848.

Paper and Pencil Diagnostic Method and Case Studies of the Concept of Composition of Displacement

Hsiang-Wu Huang, Sheau-Wei Renn

Department of Physics, National Taiwan Normal University

Abstract

This study included two parts: the first one was to design a group administered paper and pencil diagnostic test for the concept of composition of displacement, and the second to explore the conceptual development of individual cases that were selected from the results of the diagnostic test. Piaget's original clinical interview method for the concept of composition of displacement was used as a guide for designing of the paper and pencil diagnostic test. Twenty-five elementary, high school, and college students were analyzed in this study.

The results indicated that the diagnostic tool could effectively classify students's concept of composition of displacement into five developmental levels, and also effectively demonstrated students' conceptual characteristics as described by Piaget. The case analyses indicated that quite a few college students or adults have difficulties with the concept of composition of displacement. This result is contradictory to Piaget's original claim that people develop mature conception of composition of displacement at about ten or eleven years of age. The analysis also indicated that the development of the concept of composition of displacement has the close relation with the development of the concept of reference frame. The early developments of the two concepts were interdependent and parallel, while the later development of the concept of composition of displacement exceeded that of the concept of the reference frame. The final developments of the concept of the reference frame required only concrete operational ability, while that of the concept of composition of displacement required formal operational ability. The ability to measure length with the graded rule did not imply the possession of a correct concept of composition of displacement. Students may be able to measure a distance between two points but did not mean they understood that the distance was equal in both directions. Also the ability to measure the lengths of successive displacement, and make all correct calculations of subtraction and addition, did not mean that the student could do the actual composition.

Key words: cognitive development, composition of displacement, concept growth, learning reference frame.