

高中生建構橢圓多重表徵之認知特性

左台益¹ 蔡志仁²

¹國立台灣師範大學數學系

²台北市麗山國民中學

(投稿日期：民國 89 年 11 月 8 日，修訂日期：90 年 8 月 29 日，接受日期：90 年 11 月 7 日)

摘要：本研究的目的是在探討高中生橢圓概念多重表徵之認知特性，進而分析學生在表徵運用上的表現。研究學生對一數學概念多重表徵之認知結構，有助於瞭解學生概念建構歷程以提供教學活動的設計。此研究是以九位不同層次高中二年級學生學習橢圓概念作為研究主題，以探討學生內在思維心理歷程及其外顯多重表徵結構。研究方法採取診斷式面談活動，以質性分析，詮釋學生橢圓概念多重表徵建構歷程與結構。研究工具包括先備知識測驗以及診斷性面談教學活動。

研究結果發現：橢圓概念的外顯表徵主要有語意表徵、圖形表徵、軌跡表徵、方程表徵、以及結構表徵，學生在建構橢圓概念歷程中，依其先備知識的品質，在不同層次學生中會有不同的發展方向。

關鍵字：多重表徵、認知特性、橢圓概念。

壹、緒論

一、數學概念的多重表徵

表徵 (representation) 是認知活動中的產物。吾人經由表徵形式以瞭解知識的結構與內涵。在數學學習中，表徵的作用可用來呈現數學概念與思維，它除了是數學本質上的一環，如數學慣用的方程符號表徵，也是數學概念外在具體化的呈現形式 (Dudour-Janvier, Bednarz 和 Belanger (1987))。Lesh, Post 和 Behr (1987) 即以所謂「內在概念化的外在具體化 (可觀察的)」作為表徵的意義。表徵系統在數學學習

理論中佔著重要的地位，它們不僅是將數學概念結構具體呈現的工具，亦是將數學基本結果分類的方法 (Vergnaud (1987))。

數學家通常以形式化的定義描述數學概念，此形式定義所描述的數學概念是包含許多精緻化意涵的結果。這種精緻化的形式，對於數學家而言可以言簡意賅地表達其思維，但對初學者而言，卻難以清晰掌握。一個數學概念通常包含不同表徵形式，如簡約化的符號表徵，現象整理的資料表列及視覺化的圖形表徵等等，學習者需建構此概念定義的多重表徵，方能形成較完整的概念心像。數學概念的表徵方法，在學習者形成這些概念的瞭解與使

用上，扮演了一個重要的角色(National Council of Teachers of Mathematics, [NCTM], 1998)。林福來(1997)即曾指出對一個數學概念，能用不同的現象與表徵說明意義，表示對此概念有感覺。

美國數學教育協會(National Council of Teachers of Mathematics, [NCTM], 1998)在2000年的「學校數學的原則與標準」中更是極為重視表徵的教學。它將表徵列入十個標準之一，明白揭示數學課程必須強調數學表徵以幫助學習數學，重視多重表徵之教學可以使學生(一)創造並使用表徵去組織、紀錄與溝通數學想法；(二)發展一套能有意義地、靈活地、適當地使用的數學表徵；(三)使用表徵去模型與解釋物理的、社會的、數學的現象。

表徵可用來作為呈現數學想法的工具，且由於數學思考方式的多樣性，連帶會使得表徵出現多樣的風貌。從產生表徵的主體來分，可能有個體自我建構發展出的表徵與數學社群中所發展出的表徵(National Council of Teachers of Mathematics, [NCTM], 1998)。從表徵的系統內部分析，表徵可以分為：認知與知覺表徵、在模式內的解釋性表徵、數學內在的表徵、外在符號系統的表徵(Kaput (1987))。若是從外在可觀察的具體化分析，Lesh 等人(1987)分成：經驗基礎的「描述」(experience-based “scripts”)表徵、操作的模型(manipulatable models)表徵、圖形或表格(pictures or diagrams)的表徵、口語(spoken languages)的表徵以及書寫符號(written symbols)的表徵。這些對於同一概念結構的不同表徵形式稱之為多重表徵。例如：橢圓概念的多重表徵形式可以有語意表徵、圖形表徵、方程表徵等。

二、連結多重表徵以促進概念瞭解

多重表徵的意涵是指用不同的表徵形式以呈現及建構同一概念。一個數學概念的多重表

徵就像是星形的冰山一樣，中心蘊含著此概念，每一個尖端都表示著一個表徵形式，而完整的一個概念就是整座表徵結構的冰山(Janvier (1987c))。學習的目標就是期望學生能在自己的腦海中建立一座表徵結構的冰山，使這一座冰山的每一個尖端都很完整。數學學習的理想方法是能在同一個物件上運用數個表徵(Janvier (1987b))，使學生能對該概念有清晰的多重表徵。單一表徵常常只能強調一觀念或概念結構的某些部分，可能無法完全顯現出此概念結構。這就像對一座概念冰山，藉由僅是冰山浮出水面一角的單一表徵，吾人無法完全掌握此冰山的完整結構。因此多重表徵的獲得對數學概念學習益顯重要。

僅就單一表徵的學習並不適當，因為在解題時，不同表徵的角色結構相互牽連，單一表徵在解題時必須要切換到其它的表徵上，所以多重表徵的教學是必須要強調的(Noss 和 Hoyles (1996))。Schwarz, Nathan 和 Resnick (1996)指出教師連結數個表徵間的教學是幫助學生瞭解的主要方式。尤其是，表徵內本身的轉換與表徵之間的轉譯，對數學觀念的獲得與使用更是非常重要(Lesh 等人(1987))。

傳統數學教室，高中生學習解析幾何偏重於代數方程的程序性演算，常有數學即是運算技能的迷失。本研究進行前曾訪談數位現職高中教師，他們一致指出中學生多以單一表徵建構不完整的圓錐曲線概念。例如，學生最常使用方程符號表徵 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 來描述橢圓，而相對應此方程的圖形或語意表徵，對一般學生而言即感困難。他們通常無法建構圓錐曲線完整的多重表徵，而表徵之間的轉換更是困難。橢圓此一概念以 Janvier (1987c) 的說法，就如一複雜結構之冰山。初學者通常無法完整掌握橢圓整體結構。他們會先學習各單一表徵就如辨識冰山的各角。再逐步地

以某一表徵為主表徵作各表徵之轉移與連結。當他們能調和各表徵之間的關係，此時方能完整的掌握橢圓整體概念，也就是說冰山本身的整體結構。

學生常常僅處於一種表徵情形下學習數學概念，當需要多重表徵的轉換時，學生的問題就顯露出來。以圓錐曲線的軌跡而言，學生通常對從給定的性質作出曲線圖形，或從曲線軌跡探討曲線性質感到困難。一個數學概念對專家而言，他已經能形成緊緻連結的物件，但是對於初學者的生手而言，卻往往只是獲得圍繞著此概念名詞之鬆散不相連的組合，原因之一在於學習者沒有多重表徵及其連結的具體經驗。

三、訊息處理模式與多重表徵的建構

數學在處理人類從環境中所發展之數、量、形的訊息及其間的關係，而數學教育研究在探討人類如何思維、傳達、處理或學習這些外來或是外置的訊息，以增進數學學習效能。以訊息處理（Information processing）模式來分析、模擬數學學習時所運用的思維，是認知理論中一個重要的方法。由於訊息處理模式能較清楚地描述人類處理內在訊息的機制，本研究即以此訊息處理模式討論學生橢圓學習的認知歷程。

晚近許多認知心理學家，將學習視為一系列訊息處理的過程，主張人類的學習與其訊息記憶之處理模式息息相關。外在刺激由感官輸入形成訊息，先經登錄（registration），暫時貯存（storage），再經編碼（encoding），然後能加以檢索（retrieval）與利用（utilization）。換言之，訊息處理就是對訊息做有系統的組織、記錄、傳輸、儲存及運用的過程。許多研究（Resnick & Ford, 1981; Glaser, 1984; Nesher & Hershkovitz, 1994; Lawson & Chinnappan, 1994; English & Halford, 1995; Vidakovic, 1996;

Chinnappan, 1998）都是藉訊息處理模式，描述數學學習內在心理運作的歷程，以及處理內在訊息的機制。

學習的認知歷程是指學習進行當中學習者內在認知的過程，如學習者如何選擇、組織及統整新的資訊於現存的知識基模中。當個體產生學習時，訊息便在記憶系統中運作，學習者不斷的使外在訊息，與現存知識發生關聯，這個統整的歷程是在工作記憶區中進行，結果則儲存在長期記憶區。

基於對訊息處理模式的討論，可以知道當個體學習時，必須要能讓個體注意感官記憶所接收到的訊息，引起學生學習興趣，才有可能進入工作記憶中短暫貯存，以利個體運用。而當學生學習時，應提供給學生較多提取舊經驗或現存知識的線索，以利學生順利建立外在連結，讓新、舊知識能統整在一起，進行有意義的學習。為使學生能對學習的材料建立概念性的結構，教師應對提供的教材加以組織統整，以利學生在訊息的過程中對教材建立適當的內在連結。短期記憶的容量有限，所以教師可以在教學活動中提供多重表徵的呈現以減少學生在工作記憶區的負荷量。

近年來對數學教育的研究焦點在瞭解數學概念發展與解題，有一部份是專注於學生如何靈活憶取及運用先前習得知識的這種能力。基於訊息處理理論的觀點，當學生在面對新知識的感官刺激時，其工作記憶區即開始作用。學習者必須要到長期記憶區中去得到其解碼的基模知識，然後運用其表徵結構，進行認知與後設認知的動作。研究顯示 Chinnappan (1998) 學生建構的表徵結構和學生先前知識組織的品質，以及在解題期間所使用的知識三者之間，有一潛在的連結。學生發展出的數學知識品質，對他們的表徵結構及該知識接下來的使用，有一強大的影響。在這樣的動機下，本研究將以橢圓概念做為單元素材，探索學生多重

表徵建構歷程。

認知理論提出起源分解 (genetic decomposition) 的概念以說明一個特定的數學概念要如何學習以及應該如何教, 才能對學生的學習有所助益。所謂一個概念的起源分解就是建構特定概念過程的描述 Dubinsky (1991)。明確地說, 起源分解是描述學生如何學習特定概念, 而且是對於產生該概念發展中的基模 (在個人的思想中存在的形式概念), 所有可能建構方法的外在描述。從訊息處理模式觀點看, 此起源分解的想法是對某特定數學概念整體學習及反應歷程的描述。例如, Vidakovic (1996) 即以起源分解的方法分析學生反函數概念的建構歷程, 並運用電腦設計教學活動以刺激學生去經歷及發展反函數基模的認知建構步驟。數學概念的一個起源分解, 在於用來描述發展該概念基模的可能心智建構方法。由於起源分解並不是唯一的, 甚至在同一個主題下也有可能發生不同的起源分解。因此, 探討學生對一數學概念多重表徵之起源分解的認知特性, 有助於瞭解學生概念建構歷程, 因而提供教學活動設計的參考。

四、研究目的與研究問題

瞭解學生先備知識及可能的認知歷程有助於教學活動的設計, 尤其是, 當我們關心學生在學習活動中能建構足夠的知識, 以形成完整的表徵結構, 進而培養學生解題能力。從多重表徵的理論中, 可以發現學生對於表徵內的轉換及表徵間的轉譯, 常常在教學時被忽略, 而這又是學生解題能否成功的重要關鍵因素。Lesh 等人 (1987) 從學習者數學學習與解題研究中, 進一步具體化鑑別出五種不同的表徵類型: 經驗基礎的描述、操作的模型、圖形或表格、口語、書寫符號。Janvier (1987a) 也以其研究所得, 提出變數 (variable) 概念有物件、語文描述、表格、圖形、式子等五種表徵

的形式。可見得在不同主題上, 多重表徵的形式會因而有所不同。故本研究的目的就在於瞭解學生橢圓概念多重表徵之認知結構特性, 以及表徵運用的情形。

在提出研究問題前, 首先將本研究所採用的重要名詞—橢圓、表徵加以界定。本研究所謂的橢圓學習, 是指現行高中基礎數學第三冊第四章圓錐曲線中的 4-3 橢圓單元的知識內容, 從「至二定點的距離之和為定數」這一定義發展出的橢圓概念。本研究的「表徵」意義, 採以 Lesh 等人 (1987) 所謂的內在概念化的外在具體化 (可觀察的) 的意義, 將「橢圓」視為內在概念化的被表徵對象, 而以可以被觀察到呈現方式當作外在具體化表徵。此外在具體化表徵, 因為其多樣的呈現方式, 而組成多重表徵。本研究對於橢圓的學習, 將以下列型式說明橢圓概念的表徵形式:

語意表徵: 這是包括文字定義、情境描述、口語敘述、表列等。

圖形表徵: 這是指橢圓的幾何形狀以及構圖表徵。這裡的圖形為平面圖形, 包括有靜態的平面圖形, 與電腦中動態的圖形。其中構圖表徵即為橢圓機械作圖之相關的圖形。

軌跡表徵: 這是指以符號代數表現圖形軌跡的表徵, 如 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$ 。

方程表徵: 這是指所有橢圓方程式, 如

$$Ax^2 + Bx^2 + Cx + Dy + E = 0,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1,$$

$$\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1 \text{ 等。其中第三、$$

第四式為平移型式的方程表徵、上下型與左右型的橢圓為方向性型式的方程表徵。

結構表徵: 這是橢圓中有關組成結構的表徵, 例如橢圓長、短軸長與焦點距離所形成的

關係式、長軸長為定義中的固定長 $2a$ 等。

綜合研究目的與以上的界定與說明，本研究主要探討的問題為：中學生認知的橢圓概念多重表徵結構為何？不同層次學生建構歷程有何結構性差異？

貳、研究方法

一、研究設計

在研究設定上是以高中二年級學生學習橢圓概念作為研究主題以探討學生內在思維心理歷程及其外顯表徵結構。學生學習高等數學概念具有非常複雜的心理運作歷程以及多樣性的表徵方式，因此以診斷性面談的教學活動進行，以期獲得一個學生較完整的學習歷程。這個過程是以尚未學習過橢圓單元的學生為研究對象，將學生從學習本單元前的先備知識，到完成本單元學習的整個歷程，經由一個診斷式面談的實驗教學，以質的研究方法，詮釋學生橢圓學習時的歷程與表徵結構。

要有系統地達成描述學生高等數學概念的學習方式，Dubinsky (1991) 描述研究者用來幫助學生獲得數學知識所發展的教學方法。首先，研究者應該在其自身的腦中建構出一個此概念的描述，這個概念是研究者希望學生能從中學習到哪些知識，並且利用這一個概念作為教導此數學知識的方針。當要有系統達成描述高等數學的概念和技能的方式時，這個概念有三個主要的來源：(一)研究者對此數學概念的瞭解，(二)認知理論，(三)對學生在試圖瞭解此概念的歷程之觀察。

Dubinsky (1991) 也強調研究者對概念的瞭解在剛開始時也許是最重要的，在學生的任何觀察被獲得之前，研究者應該以其個人的反思為基準，配合學科的本質、以及學生的認知基礎，去設計那些最初的活動。此研究目的為瞭解學生橢圓概念表徵結構的建立歷程。所以

本階段首先以教材結構、教材地位分析學科本質，再輔以研究者個人反思和專家及教師建議的認知基礎，設計一個先備知識測驗，瞭解學生建構橢圓概念前，應具備的先備知識；接著，再利用設計的教學實驗進行診斷式面談教學，觀察學生建構橢圓概念時，所面臨的困難、認知衝突、迷失概念及解決方法。

二、研究樣本

本研究以台北市高中二年級的九位學生作為研究樣本，此階段的樣本選取是以立意取樣，以樣本的取得難易、配合度的高低為考量。這些學生在研究一開始都未曾學習過橢圓課程，故可以完整觀察學生橢圓學習的歷程。參與研究的學生在瞭解研究過程與目的之後，進行診斷性面談實驗教學活動。這些活動是在課餘時間進行，也就是說這些參與研究的學生在研究期間也有學校課業的正常進度。參與研究的學生分別是來自五所台北市立高中及一個私立高中。研究樣本中有 5 位男同學 4 位女同學以兼顧到樣本的性別因素。

在選取樣本時，先設定樣本必須有高、中、低三個層次的區別，藉此樣本觀察出不同層次學生的學習歷程，以便得到不同層次學生的學習歷程。研究樣本的高、中、低三個層次，先依照高中聯考入學的學校排名，在各個層次各選取三名研究樣本，並再以先備知識測驗作確認與調整。研究對象編碼的方式，以樣本的取得先後順序排列，由於這九名學生的選取，是利用其就讀學校的高中入學排名來作為高、中、低層次的設定，其分佈的原始設定為：高層次 (S5、S7、S8) 中層次 (S3、S4、S6) 及低層次 (S1、S2、S9)。經過處理學生在先備知識測驗的解題情形，得到學生答對率如表 1。

從這一個先備知識測驗的答對率結果來看，學生的層次表現與原始設定大致相同，S7、S8、S5 三位同學的答對率較高，所以仍依原

表 1：第一階段先備知識測驗的答對率

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9
答對率 (%)	57.50	55.00	70.00	67.50	82.50	72.50	90.00	90.00	75.00

表 2：各層次學生診斷性面前數學學習狀態表

	高層次	中層次	低層次
學生代碼	S5、S7、S8	S3、S4、S6、S9	S1、S2
數學成績	85 分以上	70 分上下	60 分以下
學習態度	強調概念的瞭解與解題策略	強調解題技巧與運算技能	不主動學習，很少練習解題
已具基本概念	畢氏定理、三角恆等式、根式方程式化簡、平面軌跡概念	畢氏定理、三角恆等式、根式方程式化簡	畢氏定理、三角恆等式
代數符號概念	變數概念處理	變數概念處理	特定數值處理

表 3：診斷性面談教學活動

學習階段	診斷性面談事件	診斷性面談方法
注意、察覺	引起注意	提問
期望	告知學習者學習目標	確定學生探索的表徵
檢索到運作記憶	喚起舊記憶	提供學生思索時間
選擇知覺	呈現刺激	情境佈置
編碼	提供學習輔導	研究者提供方向
反應	引發表現	學生探索
增強	提供回饋 評估表現	解題 決定下一個表徵活動
線索恢復	增進保留與遷移	表徵運用測驗

始設定為高層次的學生。S3、S4、S6、S9 四位同學的答對率相當，S9 的表現顯示出比中層次的三位學生表現得都好，所以將 S9 的設定作調整。低層次的學生 S1、S2 在此測驗的答對率最低。

經由高中入學成績及先備知識測驗的測驗將研究樣本之高 中 低三層次的學生設定為：高層次(S5、S7、S8) 三位同學、中層次(S3、

S4、S6、S9) 四位同學以及低層次(S1、S2) 二位同學。各層次學生在診斷性面談活動前之數學學習狀態如表 2。

三、研究工具

本研究的研究工具為診斷性面談教學活動與表徵運用測驗。本節將對研究工具的設計理念、編製過程作一個說明。

(一)診斷性面談活動

此診斷性面談活動的設計理念是以橢圓概念的本質、訊息處理模式的認知理論以及研究者個人反思為基準，並參照 Gagné (1985) 所提出的學習階段：注意與察覺、期望、檢索到運作記憶、選擇知覺、編碼、反應、增強及線索恢復等八個階段作為診斷性教學活動進行的流程。相對應 Gagné (1985) 學習階段的九項教學事件所設計的診斷性面談方式如表 3。

診斷性面談活動進行時，研究者佈置橢圓概念的多重表徵，設定不同表徵方式，探索學生的學習情形。表徵方式計有圖形、語意、軌跡、方程、結構等五個不同的表徵。依照學生在引起注意的提問之後所作的反應，作為確定學生探索的表徵活動，再以情境佈置的方法，提供學生適當的工具以激發學生的探索。

當學生詢問橢圓的意義時，則以橢圓文字定義的語意表徵活動進行。當學生提問如何作圖時，以圖形表徵（圖形與構圖）活動進行。當學生將軌跡表徵 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$ 提出時，以本表徵的活動接續進行。當學生能將關係式或是方程式的形式，提問出來時，則探索方程表徵。如學生能以橢圓元素的性質作提問時，則以結構表徵進行。在診斷性面談時依照設定的表徵活動完成，研究學生如何建構橢圓概念，研究者的角色設定為情境佈置者，期使學生能大聲地反映出其建構的方式。

四、研究過程

在研究的準備階段，研究者閱讀並收集國內、外的相關文獻後，首先分析高中教材第三冊 4-3 節的橢圓課程之內容，並與高中數學任課教師討論教材重點，開始編製研究之工具，並進一步選定樣本和聯絡施測之相關事宜。

根據選定的研究樣本進行研究，為了在研究進行時，達到除了研究者與研究對象間的互動之外，也要呈現學生間的互動與影響。每一

個時段有兩個或三個樣本在進行實驗教學。實驗進行時間在十月初到十一月初，每組學生每週進行一次兩小時教學，每一組實驗的時間為八個小時，其中先備知識測驗一小時，診斷性面談五小時，表徵運用測驗兩小時。活動進行時以錄音及學生所有原始作品的保存的方式收集資料。

叁、研究發現

研究者依據研究問題作橢圓診斷性面談教學及表徵運用測驗，並以訪談錄音與學生作品作原始資料的整理。經過資料的整理、分析後，將本研究的發現根據不同層次學生的表現分成兩個部分討論，一為不同層次學生橢圓學習歷程結構分析，另一為不同層次學生解題時橢圓表徵運用結構分析。

這一部分是依照學生在橢圓診斷性面談教學活動進行過程中，學生建構橢圓概念的歷程加以描述。以下分別從高、中、低層次學生的建構歷程作說明。

(一)高層次學生的建構歷程

高層次的學生能正確辨識橢圓圖形。當研究者詢問如何確認橢圓時，學生提出定義的需求。以下是與學生的對談紀錄。

R：那你是怎麼知道它是橢圓？

S7：就是一個圓滑的曲線啊。

S8：對喔，橢圓是什麼，我們好像沒說過喔。

R：對喔，好像課本都沒教。那你不知道的橢圓是什麼？

S8：就是跟圓有關係的圖形，..我想一下。應該就這樣吧。（S7在紙上畫出一個橢圓形）。對，就是這樣。

S7：我們好像應該要有定義才能判斷嘛。

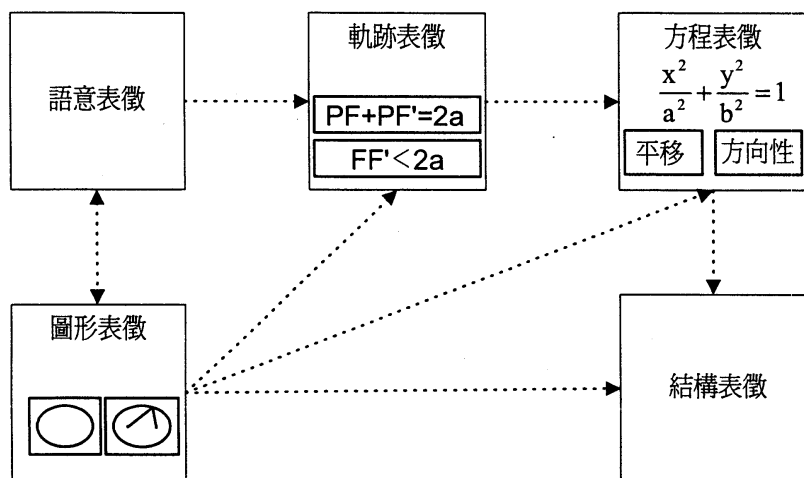


圖 1：高層次學生橢圓多重表徵鏈結結構圖

S8：對喔，要有定義，那橢圓的定義是什麼？

學生接著以文字定義為基礎，用機械作圖的工具進行橢圓作圖，觀察到圖形與構圖時的橢圓元素，焦點與固定線長，並將固定長分成兩個線段，在圖上說明。以下是與學生的對談紀錄。

R：你能不能說明一下，這一個定義的意思？

S7：就是這樣（標上兩點，畫了一個橢圓），（橢圓）上面的到這（分別指向兩個焦點）是固定的。

（研究者拿出圖釘與一條線）

S8：你還準備這一個喔。..就是這樣。兩點，然後把線拉直，這樣就會有兩個距離...，啊！這兩個的距離和，一樣，一樣。

當研究者要求找橢圓方程式時，學生先利用文字定義與圖形作輔助，自行轉譯文字定義為代數式 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$ 形式，然後以 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$ 進行討論、化簡，而得到

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 。以下是與學生的對談紀錄。

R：我們學過直線啊，拋物線啊，這些的方程式，那橢圓的方程式是什麼？

S5：..你就用這一個 P 嘛，然後這裡是 A、這裡是 B，..就是 \overline{PA} 加 \overline{PB} 是固定長。

在方程式得到之後，學生藉由座標圖形得到長軸長是定義中的固定長，以及橢圓的焦點距離與長短軸長之性質。

研究發現高層次的學生其橢圓學習歷程，可以如圖 1 鏈結流程的方式表示。

高層次的學生提出橢圓定義的需求，從語意表徵的文字定義出發，進入圖形的構圖。從文字定義與座標平面圖形得到代數式 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$ ，再從代數符號式中得到方程表徵 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，在方程式的討論中，藉由座標圖形，得到長軸長是定義中的固定長，以及橢圓的焦點距離與長短軸長之性質。高層次的學生反映出強調概念瞭解的學習態度

先要求瞭解橢圓的定義。掌握橢圓定義的語意表徵後，自行發展橢圓的圖形表徵，接著以圖形表徵為核心建構相關表徵。

(二)中層次學生的建構歷程

中層次的學生也都能正確辨識橢圓圖形。藉由質疑是否有橢圓作圖工具的疑問，學生以構圖展開學習。以下是與學生的對談紀錄。

R：這樣的一個橢圓，你要怎麼樣畫出來？

S3：用手畫，.....不知道。

R：不知道。你呢？

S4：我不知道。

S3：那要怎麼樣畫橢圓？

R：那你要怎麼樣畫出這樣的一個橢圓？

S9：.....不知道。

R：不知道。.....那如果要你畫出來，你要怎麼畫？

S9：那有沒有跟圓一樣（的作圖工具）？有圓規可以畫。

研究者操作機械作圖的過程時，學生都能觀察到圖形與橢圓元素，焦點與固定線長。學生可以描述作圖方法，進而獲得文字定義。

R：那你能不能描述一下，我是怎麼操作這一個作圖方法？

S4：把線固定在兩個點上，然後用筆把線分成兩段，畫出來的圖形就是。

S3：所以橢圓可以這樣畫出來喔。

R：那是不是所有的橢圓都可以這樣畫出來。

S3：對啊。

所有中層次的學生都能將文字定義以機械作圖方式說明。學生可以將橢圓文字定義直接或藉由圖形幫助，改為代數式 $PF + PF' = 2a$ 。

當研究者要求找橢圓方程式時，學生利用代數式 $PF + PF' = 2a$ 與圖形作輔助，進行討論、化簡，而得到 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 。以下是

與學生的對談紀錄。

〔當研究者要求學生將 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ ，固定長是 $2a$ 的方程式求出〕

R：直線、拋物線這些的方程式我們都學過了，那這一個的橢圓方程式是什麼？

S4：（寫下 $PF + PF' = 2a$ ）..你就把 P 點代進去嘛。

S3：根式可以化簡啦。

在方程式得到之後，學生藉由機械作圖的圖形中，得到長軸長是定義中的固定長，以及橢圓的焦點距離與長短軸長之性質。

中層次的學生其橢圓學習歷程，可以如下鏈結流程圖 2 的方式表示。

中層次的學生在研究者詢問如何繪圖時，提出如何繪出橢圓或是否有如圓的作圖工具。在研究者操作橢圓機械作圖下，學生可以得到橢圓的文字描述。從文字定義的語意表徵下，學生可以自行建構出圖形構圖表徵與軌跡表徵。從代數符號式中，所有中層次的學生都能得到方程表徵 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 。在方程式的討論中，藉由座標平面上的圖形，學生可以得到長軸長是定義中的固定長，以及橢圓的焦點距離與長短軸長之性質。中層次的學生反映出強調解題技能的學習態度先要求繪出橢圓的作圖工具，從繪圖中瞭解橢圓定義的語意表徵。再從橢圓定義的語意表徵後，反思橢圓的圖形表徵的意義，接著以圖形表徵為核心建構相關表徵。

(三)低層次學生的建構歷程

低層次的學生都是以文字形容來表達其對橢圓的想法。這些文字形容都是對於圖形的視覺想法。所以學生在學習前對橢圓概念的想法只有圖形，不知道方程式，且沒有生活經驗的連結。以下是與學生的對談紀錄。

R：那你們認為的橢圓是什麼？.....你想到的橢圓是什麼？

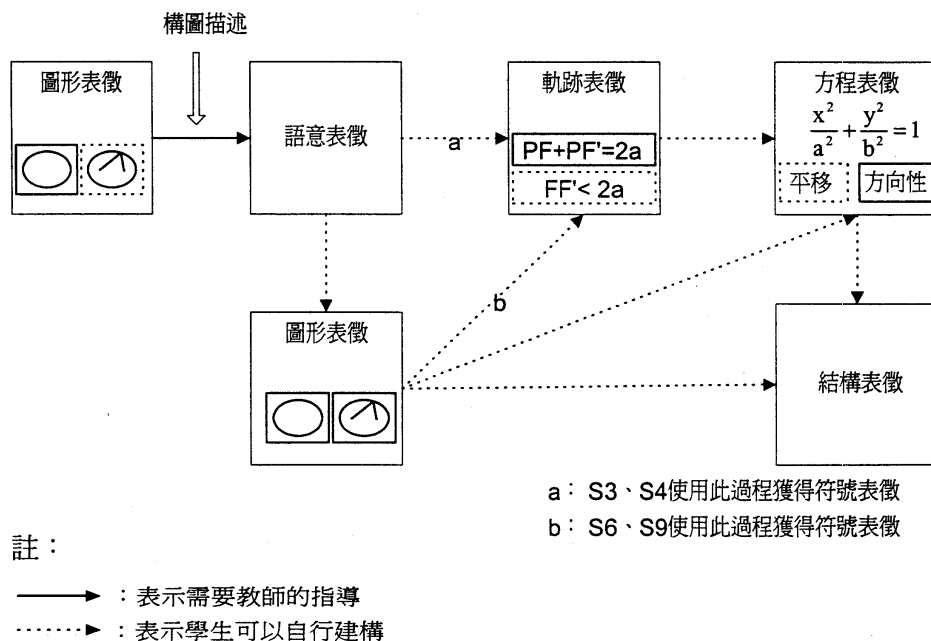


圖 2：中層次學生橢圓多重表徵鏈結構圖

S1：..就對稱。

R：你呢？（對 S2）

S2：..長的像圓又不像圓的。

R：那還有其它的想法嗎？.....沒有了？..你知道橢圓的方程式嗎？

S2：...(搖頭)。

R：你呢？（對 S1）

S1：不知道。

R：那你想一下，日常生活中在哪裡有看過橢圓？

S2：...(搖頭)。

R：你呢？（對 S1）

S1：...(搖頭)。

R：那你們怎麼辨識一個橢圓？

S2：你給我看一個圖形，看到我就知道了。

R：你呢？

S1：對。

低層次的學生能指出在機械作圖時，固定長與兩點的橢圓要素，但無法將橢圓機械作圖的方法敘述出來。有觀察到不同的固定兩點（焦點）或不同的固定線長，會形成不同的橢圓。學生並不能從操作機械作途中獲得文字定義。以下是與學生的對談紀錄。

R：那我們繼續問說：那你能不能把我剛剛的。你能不能說我怎麼做出這個橢圓？

S2：就是這兩點嘛。然後這樣，然後再畫出圖形。

R：再畫出，怎麼畫出？

S2：就是移動啊。

R：移動。

S1：對啊。..就移動就畫出來了。

研究者提供文字定義給學生時，學生只是閱讀了許久，將文字敘述畫底線。當研究者要求學生將機械作圖與文字定義之間的關係說明時，S1 並無法作連結，S2 則可以藉由橢圓作

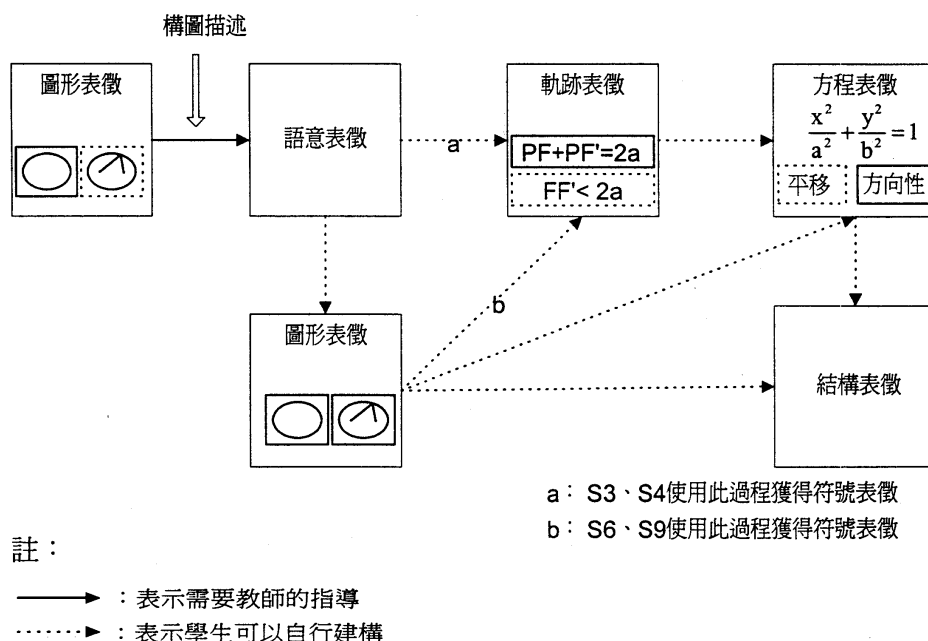


圖 3：低層次學生橢圓多重表徵鏈結結構圖

圖說明橢圓定義者，以下是與學生的對談。

R：你說給你一個圖形，你就可以知道是不是橢圓。那這一個文字敘述的是不是橢圓？

〔學生只是閱讀文字定義許久，S1 將文字敘述畫底線〕

R：那它是不是橢圓

〔兩個學生還是只閱讀文字定義，沒有回答〕

R：有沒有看不懂的地方。

S1：...(搖頭)。

R：好，現在我再把機械作圖作一次給你們看，...。固定兩點，再以一固定線段長，把線拉直成兩個線段，繞一圈，就畫出來了。那現在在問一次這一個，這一個文字敘述的是不是橢圓？

S2：是啊。

R：那你不能說明一下，為什麼這一個定義是橢圓？

S2：..這個（指文字定義的兩定點）是這兩個（指機械作圖的兩個圖釘），這個（指文字定義的定值）是這一條線。

研究者要求學生以更精簡的文字改寫定義，兩個學生都沒有反應任何行為，經過研究者再提示將定義中距離的文字敘述用距離符號表示，則學生才能將文字以代數符號表示，S1 直接簡寫成 $\overline{PF} + \overline{PF}' = 2a$ ，S2 透過圖形寫出 $\overline{PF} + \overline{PF}' = 2a$ ，S2 並跟 S1 討論他所寫的式子，修正 S1 的符號式子。

方程表徵 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 方面，研究者必須提供文字定義與適當的協助，低分組學生才連結到 $\overline{PF} + \overline{PF}' = 2a$ ，得到標準式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 。

學生對於橢圓的焦點距離與長短軸長之性質表徵，則是直接經由方程表徵推導過程中的 $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ 得到，學生並未瞭解其幾何意義。

研究發現低層次的學生其橢圓學習歷程，可以如圖3鏈結流程的方式表示。

低層次的學生以橢圓圖形，在研究者操作橢圓機械作圖時，學生必須研究者的介入，學生才得到文字定義。從文字定義出發，學生必須在研究者提示機械作圖下，才能連結上圖形表徵。在研究者的協助下，學生得以建立軌跡表徵。從代數軌跡式中，學生在研究者的協助下得到方程表徵 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 。學生對於橢圓的焦點距離與長短軸長之結構表徵則是經由方程表徵的 $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ 得到。低層次的學生也反映出不主動練習的學習態度，需經由研究者的介入方能掌握橢圓機械作圖的橢圓圖形表徵意涵，從繪圖中經研究者輔助說明才瞭解橢圓定義的語意表徵。再從橢圓定義的語意表徵後及研究者的提示，反思橢圓的圖形表徵的意義，接著以圖形表徵為核心建構相關表徵。

肆、結果分析與討論

實驗學生在診斷面談教學前，對於橢圓概念以不完全的圖形影像表徵為主，其它表徵則未出現。他們以日常用語表達其對橢圓的想法，而這些非數學語句所形容的橢圓，源自他們對於圖形的視覺想法。對於生活經驗中的橢圓觀念與數學定義的橢圓概念連結有困難，只有對稱、曲度等數學概念在其中。學生會使用如矮胖、瘦長、扁平等非數學的感官概念。若能在教學中轉化這些概念為數學化的語句，則有助於學生的學習。學生也會有如圖形為兩拋物線合成、只要是上下左右對稱的圖形就是橢

圓的先備迷思概念，低層次學生尤為明顯。佈置認知衝突情境有利學生概念的調適。

單純的語意表徵無法讓學生掌握橢圓的完整概念。如低層次的學生對於語意表徵與橢圓構圖之間的關連性，無法作自發性的連結，必須要利用其它的表徵加以協助。低層次學生S1雖認為橢圓可由兩個點和一條線構圖，而在說明時卻將那兩點（焦點）的位置畫在長軸的兩頂點上。多重表徵有助於學生橢圓概念的學習，可以使學生對於較不完整的語意文字定義有其他表徵的協助而更加完整。學生S1藉由操作橢圓機械作圖的圖形構圖表徵強化語意表徵，這樣的結果在推導方程式時，學生才能自行由軌跡表徵 $PF + PF' = 2a$ 代數式上，繼續推導的工作。引進多重表徵可利用表徵間的補強以降低單一表徵上的學習困難。

學生所使用的詞彙也會影響學生的思考，學生常常會因為詞彙的關係，而在在某一個概念上停留許久，而無法再進一步觀察到相關的概念。例如像是對稱這一個概念，所有學生要表達對稱於長、短軸時，常常只能夠用「這個」「那個」來表示。這種詞彙的運用影響學生引進數學思維作進一步思考對稱軸交點的中心位置。當研究者說明長、短軸名稱及意義後，學生方能使用長短軸而衍生出中心位置及結構表徵的長軸長是定義中的固定長等。所以名詞的界定與說明應該在教學時強調，雖然這一部分學生在學習時並沒有什麼太大的困難，但使用約定的數學語言可以更容易溝通數學想法。

在診斷面談教學時，對於圖形表徵的學習均須要教師的介入，學生方能獲得橢圓構圖的表徵。此部分研究者發現與學生討論數學史上橢圓作圖工具及由學生親自操作繪圖可以讓學生更全面掌握橢圓圖形表徵。診斷面談教學的研究發現，無論任何層次的學生橢圓構圖表徵是連結橢圓其它表徵的關鍵表徵。學生若只著重代數方程的演算，往往無法清晰掌握橢圓概

念結構。學生對圖形表徵的掌握有助於各表徵間的轉譯與連結。

對於橢圓方程式而言，雖然從定義出發的想法，仍是本研究在診斷面談教學時所要採取的方法，但是從學生在學習時的表現上來看，學生對於方程式的形式有一些基本的認識。例如 S1、S2、S5、S7、S8 等學生都能猜測到橢圓方程式應該與 x^2 、 y^2 有關。此部分可在教學時鼓勵學生說明猜測所依據的理由。九位實驗學生對於橢圓方程式都可從用語意表徵與軌跡表徵推導獲得。高、中層次的學生都會再以圖形表徵來輔助學習，但低層次的學生就只有使用方程式的推導化簡的工作。這樣的結果，造成低層次的學生都直接將最後推得的方程式直接拿來使用，所以就會發生學生並未考慮到橢圓的長、短軸性質，而直接代入最後推得的方程式。例如低層次學生 S2 只算出 a 、 b 值就代入標準式中，而形成兩個中心不一樣的橢圓，方程式卻一樣的錯誤結果。該生在研究者詢問之下，雖思考了許久但仍沒有辦法以其他的表徵來輔助回答。反觀高層次的學生，如 S7 除了使用題意訊息表徵外，還使用了圖形表徵將圖形畫出來，加以輔助，觀察從方程式的所得到的橢圓元素其相關位置，進而可以覺察到中心的影響。因此教學時，應該要能注意到表徵間的連結，使學生表徵的靈活性能強化。

學生在方程表徵中對於中心為原點與中心非原點的橢圓，會因為橢圓的圖形根深蒂固地在學生的腦海中，而並不會直接與座標軸產生關連。因而造成學生中心為原點與中心非原點的橢圓其方程式會一樣，而且學生也不會感到錯誤的情形。這樣的情形在中、低層次的學生，是非常明顯的現象。所以在教學設計上應該也要注意這樣的情形。

學生表現出方程表徵的錯誤類型，大致上有兩種：(1) 所有的方程式只是 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 唯一類型，所以只要 a 、 b

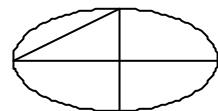
值相同，則其方程式都相同；(2) 所有的方程式都是 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，所以 a 值一定只跟 x^2 的係數有關、 b 值一定只跟與 y^2 的係數有關。這必須要學生對於圖形與方程表徵連結才會有調適的動作發生，否則學生仍會是方程與圖形不相關，各自平衡的存在。

在研究中發現學生乘法公式 $(A + B)^2 = A^2 + B^2$ 的錯誤其實會造成學生在學習時的困擾，這些學生在先備知識測驗時發生錯誤，到學習橢圓時一樣發生錯誤。所以在教學設計時，應該在這一個地方上提醒學生注意，或造成認知衝突，使學生認知上呈現不平衡的狀態，以建立學生正確的方程表徵。

部分學生可經由語意表徵獲得軌跡表徵。但是經由圖形表徵的輔助可以強化學習者的軌跡表徵。如高層次的學生可以再發覺到其語意表徵中的固定兩點距離與固定長之間的關係，會造成圖形的變化，只有在 $\overline{FF'} < 2a$ 下才是橢圓的圖形，而非只是單純符合 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$ 都是橢圓。這樣的發覺是在圖形的操作獲得，所以學生應該要有充足的圖形的操作經驗才能較完整獲得橢圓概念結構。

學生在學習結構表徵時， a 、 b 、 c 的意義與關係應該從定義、圖形與標準式去瞭解，學生學習時若只注意到單一個形式的意義與關係，則可以發現學生在後續的學習中常常會發生錯誤，或是需要再重新出發學習或提醒。例如 S1、S2、S4 對於 a 、 b 、 c 的意義與關係會發生錯誤或反反覆覆的情形。學生在重新找 a 、 b 、 c 的意義與關係時，圖形表徵的建構是一個重要的關鍵。

學生在 a 、 b 、 c 的意義與關係之間發生錯誤時，都是利用圖形表徵來重新思考或憶取這一個概念。學生對於結構表徵的迷失往往受學生獲得



此表徵的方式所影響，如橢圓的焦點距離與長短軸長之性質，學生若是使用方程表徵推導過程中的 $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ 得到者，在圖形表徵的表現上會出現如右圖，以長軸、短軸頂點畫出的三角形。但是若學生是從圖形表徵的操弄中得到的，則可以將圖形與其元素、性質等結構表徵，作一更完整瞭解。

在此研究中可以發現高層次的學生中較常利用多樣的表徵來思考同一概念，中層次的學生也有一點這樣的傾向但不完整。而低層次的學生則會依照問題或研究者所要求的表徵，執著於這單一表徵的訊息，較不能憶取到其它的表徵來幫助學習。

從這一次的診斷面談教學活動中可以發現圖形表徵扮演學生學習時的一個重要角色。在教學活動中，學生的圖形表徵往往是學習時抓取概念的關鍵。語意表徵則必須依靠圖形表徵的輔助，將語意的條件用圖形表徵出來。方程表徵中，平移與方向性是多數學生面臨認知衝突時才獲得。例如中心為原點與中心非原點的橢圓方程式，學生是在圖形上觀察到不一樣時，學生才會進行調適的工作，否則學生仍保持平衡的狀態，不會進行認知的學習。而軌跡表徵則是在圖形的操作中才會完整。結構表徵更是幾乎均融入圖形與其他表徵之中才能獲得。

伍、結論與建議

本研究以九名高二學生為樣本，研究目的在瞭解學生橢圓概念多重表徵結構的建立歷程以及表徵運用的情形。針對本研究所提出的研究問題，以下就依據實際發現以及綜合討論的結果，提出結論。

一、橢圓概念的表徵結構

學生的先備橢圓概念中只有幾何形狀的圖

形影像表徵而未呈現其它的表徵。經過診斷面談教學後，學生呈現的外顯的表徵有語意表徵、圖形表徵、軌跡表徵、方程表徵、以及結構表徵。

二、橢圓概念表徵結構的建構歷程

學生在橢圓學習的歷程中，會因先備知識的不同而有不同的發展方向。

高層次的學生從語意表徵的文字定義出發，進入圖形的構圖表徵。再從文字定義與座標平面圖形得到代數表徵，進而發展出方程表徵，藉由圖形表徵與方程表徵可以得到結構表徵。

中層次的學生是從圖形表徵開始啟動，進而得到語意表徵，在圖形的幫助下，學生建構出圖形構圖表徵與軌跡表徵。再藉由軌跡表徵能得到方程表徵。在方程表徵與座標圖形的探究下，學生可以得到結構表徵。

低層次的學生則是以圖形表徵，藉由機械作圖才得到語意表徵，接著的軌跡表徵、方程表徵、結構表徵都需研究者的協助下完成。

綜觀橢圓表徵的建構歷程，應該要強調先前經驗的銜接，並以圖形表徵來作為一個核心的表徵方式，其餘的表徵就能在此表徵的支助下完成。

在一般的橢圓單元教學活動中，較著重在解析幾何的方程運算，而在此研究中發現圖形表徵是橢圓學習時的核心。因此建議在教學時應強調圖形表徵並注重多重表徵的連結。教學上使用多重表徵有助於學習者在學習時連結不同的表徵並應用於解題中。

數學概念的表徵方法，在學習者形成這些概念的瞭解與使用上，扮演了一個重要的角色 (National Council of Teachers of Mathematics, [NCTM], 1998)。數學的符號化與表徵是人類的一項重要的成就，數學表徵更是經過數世紀來的精鍊，所以當學生能使用這些數學表徵與

他們所表徵的概念時，他們已經可以說是擁有擴充數學思維的重要工具。若是在教學時就能強調表徵的特色，學生的數學學習將會更有意義。

誌 謝

本研究的完成承蒙國科會專題計畫經費補助(計畫編號：NSC89 - 2511 - S - 003 - 058 - N, NSC89 - 2511 - S - 003 - 065)，特此感謝。同時，特別感謝國立台灣師範大學數學系主任林福來教授在此研究過程中的指正及建議，以及論文繕寫的寶貴意見。

參考文獻

1. 林福來、陳美芳、吳毓瑩等人 (1997)：教學思維的發展：整合數學教學知識的教材教法。國家科學委員會年度計劃執行進度報告，P13。
2. Chinnappan, M. (1998). Schemas and mental models in geometry problem solving. *Educational Studies in Mathematics* 36, P201-217.
3. Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D.Tall (Ed.). *Advanced mathematical thinking*. London: Reidel.
4. Dudour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Lawrence Erlbaum, Hillsdale: Claude Janvier, NJ. P109-122.
5. English, L. D., & Halford, G. S. (1995). *Mathematics education : Models and processes*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
6. Gagné, R. M. (1985). (4th ed.). *The conditions of learning*. New York: Holt, Rinehart and Winston.
7. Glaser, R. (1984). Education and thinking: The role of knowledge. *American psychologist* 39, 93-104.
8. Janvier, C. (1987a). Conceptions and representation: The circle as an example. *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp 147-158). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
9. Janvier, C. (1987b). Multiple embodiment principle. Excerpts from the conference. *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp 99-107). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
10. Janvier, C. (1987c). Representation and understanding: The notion of function as an example. *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp 679-71). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
11. Kaput, J. J. (1987). Representation systems and mathematics. *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp 19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
12. Lawson, M. J. & Chinnappan, M. (1994). Generative activity during geometry problem solving: comparison of the performance of high-achieving and low-achieving students. *Cognition and Instruction*. 12(1), 61-93.
13. Lesh, R., Post, T. & Behr M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
14. National Council of Teachers of Mathematics, (1998). *Principles and standards for school mathematics: discussion draft*. Download from

- <http://www.ntcm.org>.
15. Nesher, P., & HersHKovitz, S. (1994), The role of schemes in two-step problems: Analysis and research findings. *Educational studies in mathematics*, 26, 1-23.
 16. Noss, R. & Hoyles, C. (1996) *Windows on mathematical meanings: learning cultures and computers*. Netherlands. Kluwer Academic Publishers.
 17. Resnick, L. B., & Ford, W. W. (1981), *The psychology of mathematics for instruction*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
 18. Schwarz, B. B.; Nathan, M. J., & Resnick, L. B. (1996). Acquisition of meaning for arithmetic structures with the planner. *International perspectives on the design of technology-supported learning environments* (pp 105-129). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
 19. Vergnaud, G. (1987). *Conclusion. Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp 227-232). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
 20. Vidakovic, D. (1996). Learning the concept of inverse function. *International Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 15(3), 295-318.

Cognitive Characteristics of Senior High School Students in Constructing Multiple Representations of Ellipse

Tai-Yih Tso¹ and Jyh-Ren Tsay²

¹Department of Mathematics, National Taiwan Normal University

²Li-San Junior High School

Abstract

The purpose of this study was to investigate the cognitive characteristics of senior high school students in constructing multiple representations of an ellipse, and to analyze the application of representations in problem solving. It is useful to our understanding the process of concept construction and designing of learning activities to study the cognitive structures of multiple representations of mathematics concepts. The sample consisted of 9 eleventh-grade, mixed ability students enrolled at six senior high schools in the Taipei area. The investigations employed diagnostic interviews and qualitative method to interpret the construction processes of multiple representations of elliptical concepts. It was found that the main external representations of elliptical concepts are verbal, graphical, structural, formulaic, and locus representation. The results of this study revealed that students have different ways to develop their elliptical concepts based on their initial knowledge.

Key words : multiple representations, cognitive characteristics, elliptical concepts.