低年級學童對於「加法交換律」與「等號」的認識

Children's Understanding of the Additive Commutative Law and the Equal Sign

doi:10.6173/CJSE.2011.1903.02

科學教育學刊, 19(3), 2011

Chinese Journal of Science Education, 19(3), 2011

作者/Author： 姚如芬(Ru-Fen Yao)

頁數/Page： 211-235

出版日期/Publication Date：2011/06

科學教育學刊
2011, 第十九卷第三期, 211-235

Chinese Journal of Science Education
2011, 19(3), 211-235

低年級學童對於「加法交換律」與「等號」的認識

姚如芬

國立嘉義大學　數理教育研究所

(投稿日期：民國99年5月20日，修訂日期：民國100年5月22日，接受日期：民國100年6月10日)

摘要：本個案研究主要目的在探討17位國小低年級學童對「加法交換律」的認識、並討論這群個案學童對於「等號」的相關想法。經由補救教學期間的觀察、晤談與相關文件的綜合分析，研究發現：多數學童在補救教學前知道「50 + 25」與「25 + 50」結果相同，但係透過計算而非「加法交換律」的應用；經由補救教學引導，學童關於「加法交換律」的認識可以逐步進階，依序為計算階段、認知階段、等式表徵前階段、等式表徵階段，而這些不同的認識階段與這群學童對「等號」的認識息息相關；研究者綜合此些發現，於文中提出了關於學童「加法交換律」的發展階層及其與「等號」認識之關聯圖；同時針對「加法交換律」相關的教學與探究，提出若干省思與建議。

關鍵詞：加法交換律、低年級學童、個案研究、等號

壹、緒論

本文首先從研究的背景與動機來論述本研究的必要性，從而點出研究的主要目的與相關的研究問題。

一、研究背景與動機

以下將從「代數的重要性」以及「國內關於低年級學童早期代數(early algebra)學習研究之匱乏」等二個面向，來論述本研究的背景與動機。

(一)代數的重要性

Lodholz (1999)認為代數是推論過程的一部分，是一種解題策略，並且是數學思考與溝通之鑰。代數推理本身所採取的許多形式，以及代數所使用的表徵，像是圖像、表格以及公式等，皆是人類文明發展出最有力量的智慧工具。若沒有一些代數符號的形式，也就難以產生較高等級的數學和量化科學。在美國，所有的學生都必需學代數(algebra for all)已是一個被廣泛接受的觀點，不論是中小學生都應該要

有相關的學習經驗，為後來學習更正式的代數作準備(National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000)，畢竟，代數對於學生未來的生活相當重要，不管是工作或是繼續升學。

事實上，學童的數學學習若欲從具體的數量計算進階至抽象的符號運作，其思維則必須從算術的系統進展到代數的系統；然而，根據許多國內外的研究顯示，學童在此二系統的跨越是存有許多困難的(林光賢、郭汾派、林福來，1989；Booth, 1984, 1988; Kieran, 1992, 2004)，甚至，算術的學習經驗亦有可能會牽絆其代數的學習(Cai & Moyer, 2008; Knuth, Stephens, McNeil, & Alibali, 2006; Schiemann, Carraher, & Brizuela, 2007)。例如：國小學童易將等號視為由左而右運算而得的結果，而非二數量的關係(Erlwanger & Berlanger, 1983; Falkner, Levi, & Carpenter, 1999; Kieran, 1981; Sáenz-Ludlow & Walgamuth, 1998)，這些研究同時亦發現：學習的情境與脈絡很有可能會侷限了學童對於符號意義的理解。

由於每位國小學童在進入中學就讀的同時，皆已具備有算術運算的認識，這些認識亦有可能會進而影響他們對於符號的解釋與符號運算表徵過程(Oksuz, 2007)。因此，如何及早為國小學童營造一個合宜的代數學習情境，以協助他們搭起銜接算術世界與代數世界的橋樑，實為一個值得探究的課題。

(二)國內關於低年級學童早期代數學習研究之匱乏

根據我國九年一貫課程正式綱要(以下簡稱九二正綱)中數學領域所揭示的代數學習內容(教育部，2003)，在國小一年級的分年細目中即包含有「能在具體情境中認識加法的交換律、結合律，並應用於簡化計算(1-a-02)」等項。國外曾有學者主張：學童若能發現或認識交換律的規則，對其發展更進階的加法運算策略是有幫助的(Baroody & Gannon, 1984)；此外，亦有一些證據顯示：「加法交換律」對學童而言也許並非自然存有，然而，是可以被發現的；甚至，小學一年級的學童即有可能領會(appreciate)加法的交換性(Baroody, Ginsburg, & Waxman, 1983; Ginsburg, 1982)，只是，學童究係是如何發展「加法交換律」、以及「加法交換律」與其他基本算術能力發展的關連性為何？所知實在有限。

基本上，比起國內歷年來其他版本的數學課程綱要，九二正綱對於學童代數學習的引入算是較早開始的，也因此，過去在臺灣以代數為主題的相關研究多集中於中學生或國小高年級學童的代數學習或教學成果(李美蓮、劉祥通，2003；林清山、張景媛，1994；洪有情，2006；陳嘉皇，2006；戴文賓、邱守榕，2000；謝和秀、謝哲仁，2002)，至於有關**國小低年級學童**代數學習的探究在過去則較付之闕如，相關的研究大多侷限於學童文字題的解題探究，特別針對國小低年級學童「加法交換律」發展的探究至今尚未出現。

因此，九二正綱實施之後，低年級學童關於認識「加法交換律」的表現究係如何？其所面臨的學習問題是否會與國外的研究發現相符？亦或會有不同的學習表現？教師又應採取如何的教學措施以利低年級學童認識「加法交換律」等等，則皆無從得知！於是，本研究在此有了值得探究的空間。

二、研究目的與待答問題

綜合前節的論述，本研究以一個「數學學習社團」為個案(共有17位低年級學童)，首先從**探究這群學童在補救教學期間對於**

「加法交換律」的認識出發，在此所謂的「認識」，係指此些個案學童對於「加法交換律」的相關想法為何？然而，由於在探究的過程中，要求學童嘗試說明理由時可能會涉及「50 + 25 = 25 + 50」這類的表徵，因此研究者會一併討論個案學童對於「等號」的認識、同時探究「加法交換律」與「等號」認識二者間的關聯；具體而言，本研究的研究問題主要有下列三項：

(一) 「數學學習社團」中的學童對於「加法交換律」的認識為何？

(二) 「數學學習社團」中的學童對於「等號」的認識為何？

(三) 「數學學習社團」中的學童關於「加法交換律」的發展與其對於「等號」的認識二者間的關聯為何？

期望本研究關於低年級學童早期代數學習的理解，能提供一份據實的本土性資料，以填補國內關於低年級學童早期代數學習研究之匱乏，並作為中小學教師進行代數概念探究或從事代數教學時的參考。

貳、他山之石——國外學童代數學習與教學的相關研究

如前所述，由於我國自九二正綱實施以來，才在低年級階段即引入早期代數，於是過去國內關於低年級學童代數學習的相關研究，除了文字題的解題探究外，其他皆尚付闕如，包括有關國內低年級學童對於「加法交換律」以及「等號」的認識究係如何的探討皆較難尋獲，也因此本文在相關文獻的整理，乃聚焦在國外學童代數學習——包含對於「加法交換律」與「等號」的認識，以及早期代數教學引入的適當時機與方式等兩個面向上，分別論述如下：

一、關於「加法交換律」與「等號」的相關研究

有關學童學習「加法交換律」的研究，雖早在80年代國外即有學者(Baroody, 1982; Baroody & Gannon, 1984)進行探討，但至今近三十年來，相對於其他代數主題的探究，數量並不多見。

Baroody等(1983)曾綜合其研究結果將幼稚園與國小學童對於「加法交換律」的認識分成三個層次：第一層為「初始階段」(initial)，此階段的學童會認為「3 + 2」是指3個然後再2個，而「2 + 3」是指2個然後再3個，所以「3 + 2」與「2 + 3」是不一樣的，當然不會相等；第二層為「基本的交換性階段」(primitive notion of commutativity)，在此階段的學童已能認知加數的順序對調(如：「3 + 2」與「2 + 3」)並不會影響加法運算的結果；第三層為「數學形式的交換性階段」(commutativity in a mathematical sense)，在此階段的學童除能將交換律與二元運算產生連結，同時亦能聚焦在加法運算的結果上。

Bermejo與Rodriguez (1993)則是以72位五至八歲的學童為對象，分析其對於「加法交換律」的理解與發展，根據研究發現，作者提出一個假設性的認識「加法交換律」的五步模式(five-step model)，Bermejo與Rodriguez認為孩童關於「加法交換律」的認識與理解應該可劃分為五個階段，包括「不相等」(no equivalence)、「知覺相等」(perceptual equivalence)、「植基於計算結果的相等」(computing resulted-based equivalence)、「實質的相等」(practical equivalence)、以及「正式的交換律」(formal commutativity)。所謂「不相等」，係指此階段的孩童會認為兩個式子的加數相反(如「3

+ 6」與「6 + 3」)，結果當然不一樣；而處於「知覺相等」階段的學童，已能藉由比對兩個式子中都有相同的加數來覺知兩式相等(如「3 + 6」與「6 + 3」兩式中都有3與6)，作者稱此為複製(copy)的策略；至於「植基於計算結果的相等」係指孩童在此階段已能透過計算結果的相同來判斷兩式相等；「實質的相等」則是指此階段的孩童已無需經由計算結果的相同即能判斷兩式相等；最後的「正式的交換律」階段則是指學童能直接陳述形式化的「加法交換律」法則，亦即「a + b」與「b + a」的結果相同。Bermejo與Rodriguez還在其研究中發現：若以答對率觀之，呈現「結果」的題型(如「比較8 + 11 = 19與11 + 8」此題型有呈現8 + 11結果是19)其答對率反而低於不呈現「結果」的題型(如「比較8 + 11與11 + 8」此題型並無呈現8 + 11結果是19)，Bermejo與Rodriguez因此推論：有可能19的出現反而干擾了孩童對等式的判斷，此隱約點出「加法交換律」的學習與等式的認識兩者間隱諱的關連性。

Warren (2004)亦曾針對87位三年級學童的「交換」概念進行探究，發現僅有23.00%的學生能正確判斷算式「31 + 16 = 16 + 31」與「31 - 16 = 16 - 31」之真偽，並提出適當的理由；21.00%的學生認為減法算式交換後結果仍會相同；31.00%的學生認為等號「=」右方應為答案，不應該出現算式；還有接近五成學生的解釋顯示其對算式有迷思概念(如較小的數字不能為被加數或被減數)，或甚至無法做出解釋。此外，Warren認為直式算則則容易讓學生誤認為等號後方(或下方)應為所算得的結果，而非另一個算式。

而關於「等號」概念的探究，國外其實已有許多研究發現小學生會將運算符號視為待解決的活動(求出結果)，而非數字間的關係(Behr, Erlwanger, & Nichols, 1980; Friedlander & Taizi, 1987; Kieran, 1981; Warren, 2004)，例如：若以算術的思維來看「等式」，等號通常在算式的右方且等號後僅有一個數字：當學生看到算式「13 - 5 = 8」，常會認為等號的左方是問題，右方則是代表運算的結果；然而，一旦學童認為等號僅是代表算出答案的表示，如此學童則無法進一步理解等量公理(Falkner et al., 1999)，因為等號代表兩數量間的等量關係乃是學習代數時基本且重要的知識，學童若能建立等號兩邊數量相等的概念，日後在處理等量公理時就會容易許多；反之，學童若缺乏此概念，則在學習代數時極易遭遇困難；Carpenter, Franke與Levi (2003)亦主張學習代數的一個主要絆腳石是對等號意義僅有狹隘的認識。

早在80年代，Behr等(1980)即曾訪談六至八歲的學童的等號概念，發現大多數六歲學童看到算式「□ = 4 + 5」時，會將題目改寫成「5 + 4 = □」(由右而左改寫)、「□ + 4 = 5」(+ 與 = 互換)；研究亦發現學童聽到「5等於2加3」時會寫下「2 + 3 = 5」，或提出異議，認為3應該改為7；看到算式「8 = 3 + 5」則會將 + 與 = 互換，得到「8 + 3 = 5」後判斷算式不正確。六至八歲學童看到算式「3 = 3」的反應有：改寫成「3 + 3 = 6」、「3 - 3 = 0」或「0 + 3 = 3」，且無法接受算式「2 + 3 = 3 + 2」。因此Behr等認為學童將等號視為由左而右運算而得的結果，而非二數量的關係。

Sáenz-Ludlow與Walgamuth (1998)則是利用訪談方式研究400位三年級學童的等號概念，結果發現學童對等值的表示方法可能是摹仿過去的經驗或以前的數學課本；而學童對等號的最初解釋為運算結果，但經由訪談引導後，可以接受等號的意義為二量相

等。因此Sáenz-Ludlow與Walgamuth認為學童對於運算符號的解釋是一個值得注意的議題。

Falkner等(1999)亦曾針對幼稚園孩童研究他們的等號概念，結果發現即使利用實務操作，所有的個案孩童仍然認為算式「4 + 5 = □ + 6」中，□應填入9。另外也有研究發現國小學童也有類似的問題：在Carpenter等(2003)的研究中探究145位六年級學童對於「等號」關係的理解──給予學童算式：「8 + 4 = □ + 5」，結果發現參與的學童中，84.00%回答空格□中應填入「12」，另有14.00%的學童認為答案為「17」，剩下的2.00%學童認為答案為「12和17」，理由是學童認為「等號」代表「執行運算」。而Falkner等的研究發現亦與此結果相呼應，Falkner等針對問題「8 + 4 = □ + 5」 調查國小一至六年級的答題情形，結果答對率依序分別為0.00%、6.00%、10.00%、7.00%、7.00%、0.00%。由於Carpenter等在研究中發現個案學童尚未學習「等號」可以代表等號二邊的數存在某種特殊的關係，因此建議教師使用等號時，應強調二量之間的關係，而非僅是運算執行的標誌。

Knuth等(2006)也曾研究177名六至八年級學童對等號的了解，根據其研究結果，Knuth等推論學童對於等號的認知會影響其代數學習。Knuth, Alibali, Hattikudur, McNeil與Stephens (2008)進一步研究375位尚未學習解方程式的六至八年級學童之等號概念及其方程式解題表現，發現若學童具備「關係」概念(二量相等)，則其表現較僅具備「結果」概念的學童優異。Knuth等因而認為「等量概念」為成功學習代數的關鍵。

因此，許多學者主張學童必須能理解等式是「表示數值相同的二種數學表徵間的關連性」，否則，缺乏此涵義的學童於算術與代數銜接的過程中將會遇到巨大的阻礙(Falkner et al., 1999; Kieran, 1981)；反之，若能形成此概念，將能有效促進算術與代數間的連結。

以上分析的是國外學童對於「加法交換律」與「等號」的認識及發展，至於特別針對「加法交換律」與「等號」二者間關聯性加以探討的相關文獻則較付闕如，如此也再次為本研究提供了探尋的空間。而關於早期代數引入的時機與適當性、以及值得關注的面向與需注意的事項等之解析，接著論述如下。

二、關於「早期代數」的相關教學研究

近年來國際間有許多研究(Bodanskii, 1991; Carraher, Schliemann, & Brizuela, 2001)發現，經由系統化的教學，國小中低年級學童的代數學習表現，優於同儕甚至高年級學童。而學童究竟何時適合開始學習代數？須等其認知發展成熟後嗎？近年來有些學者提出了不同的看法，他們認為若代數引入教材的方式正確且時機適當，即使幼童亦能學習與文字符號相關的代數內容。如Davis (1989)即認為如果能將代數的學習與學童的生活經驗連結，而非僅是格式化的數學操弄，則在二或三年級的數學課堂便能引入早期代數。Bodanskii更發現：從一年級便開始導入代數符號的四年級學童，其在未知數概念的表現，可以優於六年級才導入代數的六、七年級學童。因此，許多數學教育學者皆主張，若能在中、低年級階段即引導學童討論代數關係或發展未知數符號的相關概念，則在正式學習代數單元時，能夠有更好的學習表現(Brito-Lima & da Rocha Falcão, 1997; Brizuela & Schliemann, 2003; Carraher et al.)。

事實上，Kaput (2009)亦曾提出類似的

主張，包括：應該在兒童早期就開始，尤其某些部分可以建構在學童非正式的知識上；透過數學知識的擴展和應用，可將代數的學習與其他學科的學習加以統整；可以藉由數學知識的應用，融入不同形式的代數思考；以及可以建構在學童自然發生的語言和認知的力量上，鼓勵他們在省思到底學到了什麼，同時說明他們所明瞭的等等。

基本而言，不論國內或國外，認為代數課在早期數學課程執行，已逐漸在研究者和政策制定者之間擴展。例如：Davydov (1991)建議代數必須在小學階段開始；NCTM於2000年出版的《學校數學的原則與標準》亦主張代數推理可以自然地從幼稚園開始培養，且亦都贊同在早期的教育就介紹代數，並且建議代數的活動可在正式教育的第一年就開始實施，代數符號可以從小三開始就予以教導，做為課程的一部分(NCTM, 2000)；陳維民(1998)、陳嘉皇(2006)、黃寶彰(2003)、莊松潔(2004)等的研究亦皆發現，只要設計合宜的情境，例如：利用學童現有的算術基礎，並輔以學童能理解的表徵方式與用語，設計融入代數概念發展的問題來逐步引導、或是在具體情境中以數的基本運算性質來類比未知數的運算與化簡等等，國小學童是可以參與代數推理活動，學習代數符號的應用並加以解題。

不過仍然有許多人對於這樣的觀念抱持懷疑的看法，例如：國小學童真的可以學習代數嗎？國小教師有能力教導學童代數嗎？以及學童及早學習代數是重要和有用的嗎？等等。針對此些疑慮，Schliemann等(2007)認為：學童的學習困難是由於算術和代數之間被鮮明的分割(不論是課程或教學)，以致於無法透過課程的設計，被適宜的處理；如果能讓算術和代數之間的轉化更加容易，那麼它們二者之間就得加以統整。因為Schliemann等在其研究中發現，只要給予合適的條件，包括：與學童的生活經驗連結，而非僅是格式化數學的操弄；或是植基於學童關於量的連結概念，來引導學童了解及使用代數的語法規則等等，學童是可以學習代數推理的。

由於九二正綱於國小正式實施至今僅數載，所以目前國內可能仍有許多教師對於正式的代數教學歷程中，低年級學童可以學習什麼以及如何學習，尚未具備一個完整的圖像，也因此，尚無法理解何種知識可以創造有用的基礎以建構代數教學。是故，理解我國小學低年級階段學童代數概念的發展情形，並提供有效的代數教學策略給第一線教師參考，實有其必要性。而上述這些研究除了說明學童在代數學習中關於「加法交換律」以及「等號」的認識等可能面臨的困境，也針對代數可在早期數學課程中進行提出了有利的辨證；而藉由這些困境的認識以及初階代數教學上的種種提醒，除有助於研究者在設計代數教學活動時參考與借鏡外，對於本研究中個案學童代數學習的解析也給予了一個較為完整的理解脈絡，同時，對於本研究的發現亦能提供較為豐富的討論空間。

參、研究設計

以下依研究類型與研究參與者、補救教學活動介紹、資料蒐集與分析、以及主要研究流程等四部分說明本研究之設計。

一、研究類型與研究參與者

本研究屬於**個案研究**。研究者以一整個「數學學習社團」為一社會單位(social unit；郭生玉，1990)，亦即，以此「數學學習社團」做為一個「**個案**」，透過此「數學學習社團」的經營，採用觀察、晤談、測驗

等多種方法蒐集資料，探究與描述社團成員的代數學習情形，期望能為國內有關低年級學童的代數學習與教學研究，提供一個具體的本土性實例。

「數學學習社團」的參與成員，係從嘉義縣某國小兩個合作的個案班級中，根據「國小一年級數學基本能力測驗(下)」(以下簡稱「一下基測」)的調查結果邀請而來。選擇的主要標準是**「一下基測」得分低於班級平均得分一個標準差**者；而基於研究團隊對弱勢學習者的關懷與照顧，凡是「一下基測」成績低於班級平均得分的「弱勢家庭子女」(含新移民子女、以及低收入戶、單親家庭與隔代教養等之子女)，亦可參加「數學學習社團」；結果有13名學童入選為邀請名單。經與兩位個案班級級任教師討論後，教師又各自推薦了2位學童(此4位學童「一下基測」得分雖皆高於班級平均但被級任教師認定為二上數學學習情況不佳者)，因此共有17位學童參加「數學學習社團」的補救教學活動(依照學號順序，分別以S1-S17代表之)，而此17位學童亦是組成「數學學習社團」的所有成員。

至於「一下基測」係研究者配合個案班級96學年度一年級下學期的數學學習內容，將自編且已效化(主要包括內容效度、專家效度、與效標效度)的「國小一年級數學基本能力測驗」(姚如芬，2007)進行挑題與修訂後所製成的，共有9大題，涵蓋10項數學概念(其中代數主題包含有加法交換律的檢測)。

基本上，「一下基測」是在這群學童<u>一年級下學期</u>期末時施測的，而「數學學習社團」則是在他們<u>二年級上學期</u>組成的，主要是利用「數學學習社團」活動時間為學童進行數學科補救教學；而因為研究期間跨越了一年級與二年級共兩個年段，故一律以「低年級學童」稱呼本研究之學童；另外，經由「一下基測」之測驗結果分析發現：17位學童在代數主題的答對率最低，所以補救教學內容是以<u>一年級下學期的代數</u>為範疇，不過受制於篇幅的限制，因此本文主要聚焦在「加法交換律」的討論。

二、補救教學活動介紹

(一)學童的學習起點分析

由於研究者想了解學童關於「加法交換律」的認識，為能再次確認學童在補救教學前的狀態，研究者在補救教學開始前，先針對「一下基測」中出現的「加法交換律」問題再施測一次(題目並無任何改變，研究者稱此為補救教學「前測」)，以再次檢測學童是否具備「加法交換律」的概念，題目敘述如下：

題目　以下是小強和小芬在10月和11月所存的錢

	小強	小芬
10月	50元	25元
11月	25元	50元

(1)誰存比較多的錢？請打✓。

□小芬□小強□一樣多

(2)你怎麼知道的？請在下面寫出你的算法。

結果17位學童在第(1)題的答對人數是16人，但第(2)題的答對人數僅4人，比較第(1)題與第(2)題的答題情形，結果顯示多數學童在補救教學前**可以答出「50 + 25」與「25 + 50」的運算結果是相同的**，但是**不知如何以算式來說明理由**。關於此點發現，研究者推測：這群學童有可能是**經由計算得知「50 + 25 = 25 + 50」**而非運用「加法交換律」——此推論已於補救教學期間透過課輔

觀察進行檢驗。

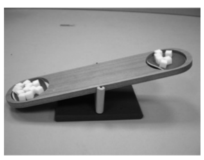
(二)設計理念與補救教學活動介紹

考量本研究個案係低年級學童且多數為數學低成就者，因此補救教學活動的設計主要秉持三項原則：**彈性**、**故事性**、以及**具體化**；所謂「彈性」，係指補救教學活動的內容雖會在活動進行前即構思完成，但仍會根據社團學員的學習反應隨時進行調整——包括活動進行的時間、教學的例題、以及作業的內容等；而整個教學活動主要是以「洋洋」和「阿寶」兩位主角貫串全場，透過他們在生活中所遇到的問題來引導學童進行解題。畢竟，「『故事』是教學之心」(Collins & Cooper, 1997)，喜歡故事乃是人的天性，特別是對年紀小的孩童，故事彷彿具有神奇的魔法，令人無法抵抗它的魅力。熊召弟(1996)亦認為童話故事可以做為有效的催化劑，融入課室教學之中激起學生的學習興趣，讓學生樂於學習；至於「具體化」於本研究之意涵，係指補救教學活動進行時，依循的是：由具體到半具體再到抽象，亦即，先由具體物的演示與操作、再到半具體物的演示與操作、最後再以數學等式表徵與先前的具體物／半具體物之操作歷程作比對，以引導學童理解數學等式表徵之意涵，例如：先利用具體物的操作讓孩子「看見」3枝鉛筆加2枝鉛筆的結果與2枝鉛筆加3枝鉛筆的結果相同、4本書加5本書的結果與5本書加4本書的結果相同……，接著利用黑板上磁鐵的展示與排列再次強化孩子的概念：將「3個紅色磁鐵又2個綠色磁鐵」與「2個綠色磁鐵又3個紅色磁鐵」排成上下兩列後可以「對齊」，顯示兩列的數量一樣多(都是5個磁鐵)，此處故意選用兩種不同顏色的磁鐵除了是表徵甲數與乙數兩個不同的量外，亦是期望利用排列與操作的過程讓孩子「看見」與「連結」加法的「交換性」以及加法的運算結果，最後，再出現「3 + 2 = 2 + 3」，「4 + 5 = 5 + 4」……等式子，來引導學童認識如此的等式表徵所代表的意義。

整體而言，研究者是以兒童心理發展為基礎，順從孩子愛好聆聽故事的天性，將自創的故事融入補救教學之中，營造輕鬆的氛圍，同時配合許多具體物以及半具體物的示範與操作，降低數學內容的抽象性，幫助個案學童連結與建構較為抽象的數學表徵，期望能藉此提升個案學童的學習興趣、增強其學習動機與效果。

而由於在引導學童學習如何說明理由時會涉及到「50 + 25 = 25 + 50」這類的表徵，因此研究者考慮在「加法交換律」教學的同時，應該引入「等號兩邊數量一樣多」的概念以及等式的表徵。而因為在學童一年級上學期期末時，研究者曾於該校施測過「國小一年級數學基本能力測驗(上)」(與本研究使用的「一下基測」是不同的測驗)，該測驗出現過「3 + 2 = 1 + ( )」這樣的問題，於是研究者再次調閱資料，找出此17位學童的試卷，並針對此題進行統計，結果發現答題表現並不理想，答對率只有36.00%，17位學童中最常出現的錯誤是認為「3 + 2 = 1 + ( )」中的括號應填5(由「3 + 2」得來)或6(由「3 + 2 + 1」得來)，顯示這些學童對於等號與等式的認識仍有迷思。此結果與Falkne等(1999)以及Carpenter等(2003)的研究發現相似：不論是幼稚園或是國小學生，仍存有許多學童認為等號所代表的是運算的結果，也因此無法解答「3 + 2 = 1 + ( )」這類的問題。是故，研究者決定將「等號兩邊數量一樣多」的概念以及等式的表徵也排入此次的補救教學活動中。茲將各個補救教學活動及其代數學習內容摘述整理如表1所示，以期

表1：「數學學習社團」代數補救教學活動摘要表

活動名稱 (分年細目)	活動摘要	數學教學問題示例	時間
誰比較多 (加法交換律 1-a-02)	一、逛動物園： 透過兩位故事主角「洋洋」和「阿寶」的動物園之旅，引導學生發現兩數相加時，加數與被加數互換，結果還是會一樣多。 	洋洋和阿寶在動物園看見大象媽媽第一口吃了1支甘蔗，第二口吃2支甘蔗；大象爸爸第一口吃了2支甘蔗，第二口吃1支甘蔗；請問誰吃的比較多？為什麼？	3節
	二、黑黑的罐頭： 以洋洋和阿寶家的小貓「黑黑」為主角繼續故事的鋪陳，利用教師佈題，讓學生在具體情境中再次熟悉加法交換律；並逐步引導學生練習以等式來表徵問題情境。 	洋洋跟阿寶買了好多罐頭給小貓黑黑，如果黑黑在星期一早上吃3個罐頭，晚上吃2個罐頭；在星期二早上吃2個罐頭，晚上吃3個罐頭；請問黑黑在星期一跟星期二吃的罐頭一樣多嗎？為什麼？	
等號天平 (等號兩邊數量一樣多 1-a-01)	三、等號天平： 藉著天平兩邊相等的概念搭配畫圈的活動，引導學生利用具體物認識等號兩邊數量一樣多的意義。 	小朋友！有沒有玩過翹翹板呢？如果翹翹板平平的，表示兩邊一樣重喔！現在老師在左邊先放進1個磁鐵後又再放進2個磁鐵，那麼(1)右邊總共要放進幾個磁鐵，翹翹板才會平平的？(2)如果現在右邊已經有2個磁鐵了，那麼老師還要再放進幾個磁鐵，翹翹板才會平平的？(接著引導學童以等式來表徵老師剛才的動作)	3節

能讓讀者更融入研究情境來理解牽引學童代數學習的一些關聯，同時也讓關注代數教學者，能有參考的依據。

三、資料蒐集與分析

由於本研究關注的焦點為「數學學習社團」中參與學童的代數學習表現，因此，研究過程中蒐集資料的主要管道有下列五項：

(一)補救教學活動觀察原案

「數學學習社團」於每星期二早自習聚會一次，共計八次(含前、後測)；聚會期間除進行觀察與全程錄影、錄音外，並將錄影內容進行原案轉錄。

(二)「觀察記錄單」

於補救教學活動結束後馬上填寫，內容包括每位學童上課狀況(含心情、動機、態度與秩序等)的描述、該堂課數學學習表現的紀錄、臨場所採取的教學輔導措施、以及觀察的省思與心得(資料代號為「學童—日期觀」，如：「S14-971223觀」)。

(三)個案學生的學習文件

係指各個補救教學活動中學童所完成的學習單(每人皆有四份)、以及研究者視學習需要而指派的回家作業(每人有三份)等(資料代號為「學童—日期學習單」、「學童—日期作業」，如：「S3-971209學習單」)；研究者將此些學習文件視為形成性評量，以藉此隨時掌握學童的代數學習情形，亦作為是否調整教學的參考。

(四)各式測驗

主要包括隨堂測驗以及代數補救教學後測等項，分別說明如下：

1. 隨堂測驗(如附錄一所示，資料代號為「學童—日期卷」，如：「S12-980106卷」)是在每一概念教學完後實施，共計二次，主要是作為形成性評量，以便隨時掌握學童對於代數概念的理解。
2. 代數補救教學後測的內容(詳見附錄二)係呼應補救教學的內容，主要在檢測學童對於「等號」與「加法交換律」的認識，於補救教學活動結束後實施，以了解學童的代數學習情形與補救教學成效。

(五)非正式訪談

主要係針對學童的代數學習或相關問題進行了解，在課間休息時間進行。(資料代號為「學童—日期晤」，如：「S12-971216晤」)

而由於低年級學童的代數學習乃本研究關注之焦點，特別是學童代數概念的建構與改變，因此，有關這群學童代數學習的質性資料之蒐集在本研究中相對的重要；研究者在資料分析初期，乃針對上述所蒐集的各項質性資料，先採用「分析歸納法」(analytic induction)：以九二正綱代數主題內一年級的各項分年細目為參考架構進行資料分析，逐步歸納學童在各細目之學習表現，以形成初步的發現(黃瑞琴，1994)；而為了避免資料蒐集的單一方法、單一來源、與單一觀察者所造成的偏見，研究者採用「三角校正法」(triangulation; Patton, 1990)做為進一步的資料分析依據，主要包括：方法的三角校正、資料來源的三角校正、與分析者的三角校正等三種形式。其中「方法的三角校正」係指研究者採用多種方法針對研究的初步發現做交互的比對，例如利用上課時的觀察、以及學習單與測驗等相關文件、並輔以訪談等方法來了解學童代數概念的建構與轉變；而「資料來源的三角校正」係指研究者透過不同來源的資料，從不同的時間點檢驗研究發現的一致性，例如利用學童每週的學習單與回家作業、配合上課時的討論原案等資料，來了解補救教學與課輔對學童代數學習的影響；至於「分析者的三角校正」除有研究者與二位助理針對初步發現進行進一步的討論以達共識外，並將相關結果與兩位個案班級教師討論以檢驗其詮釋上的客觀性。

四、主要研究流程

(一)至嘉義縣某國小實施「一下基測」，並根據「一下基測」的統計結果邀請個案班級中的學童參加「數學學習社團」(97年6月至97年9月)

研究者於97年6月學期結束前至嘉義縣某國小的兩個一年級研究班級進行「一下基測」施測後，隨即進行閱卷並統計測驗結果。然後，根據「一下基測」的調查結果、以及與兩位個案班級教師的晤談與討論，總共邀請了17位學童參加「數學學習社團」的補救教學活動。

(二)分析學童補救教學前的學習表現並初步發展補救教學活動雛型(97年8月至97年11月)

研究者針對「數學學習社團」參與學童在「一下基測」的答題表現以及補救教學前測結果進行分析，以了解學童的學習起點；然後根據學童補救教學前的學習表現分析來構思補救教學活動的初步設計；而配合低年級學童的學習特質，決定採用故事情境來鋪陳活動的內容，再加上具體物的示範與操作

來協助數學低成就的學童建構代數的相關概念。

(三)至小學現場進行數學科補救教學並蒐集相關資料(自97年12月至98年3月)

研究者於97年12月初開始，利用每週二的早自習時間至嘉義縣個案國小為17位學童進行數學科補救教學，同時蒐集學童代數學習的相關資料。每次補救教學時間為40分鐘，共計進行八次(含前、後測時間)。

肆、研究發現與討論——關於學童的代數學習表現

由於本研究是個案研究，屬於質性的探究，研究過程中並非由理論來引導研究，而是較接近紮根理論(grounded theory)的探究軌跡，是由研究現場收集到的資料逐步形成脈絡、以歸納的方式，對現象加以分析整理而獲至研究結果；再者，由於研究者關心的是低年級學童學習代數時的思維，因此經由相關文件以及觀察與晤談的綜合分析，有關補救教學期間這群學童代數學習的探究結果與討論，乃是以代數相關概念為架構、針對整個「數學學習社團」在代數學習過程中的特別之處加以論述與分析。此外，由於本研究係以整個「數學學習社團」做為個案，因此研究發現並不特別去呈現個別學童的學習結果，而是以「數學學習社團」整體為單位作為論述的基礎。

在匯整與解析學童的各種學習文件與各式測驗的結果、以及補救教學觀察紀錄單等資料後，關於「數學學習社團」在補救教學期間的代數學習表現有下列幾項重要發現：

一、個案學童關於「加法交換律」的認識

在整個補救教學過程中，研究者發現許多學童關於「加法交換律」的認識可以透過教學引導逐步進階，依序為：計算階段、認知階段、等式表徵前階段、以及等式表徵階段，分別敘述如下：

(一)計算階段

由於研究者推測這群學童可能是經由計算得知「50 + 25 ＝ 25 + 50」，而非運用「加法交換律」，因此，進行前測時乃委請多位研究團隊成員擔任觀察員，針對學童的解題歷程進行觀察與紀錄，結果發現17位學童確實都是透過「**計算**」來解答該問題的，而非應用「加法交換律」來判斷「25 + 50」與「50 + 25」兩者運算結果相同，此現象顯示：「知道25 + 50與50 + 25一樣多」與「認識加法的交換律」二者間仍是有差距的。因此，研究者將此時學童關於「加法交換律」的認識定位為「計算階段」。而此發現呼應了Bermejo與Rodriguez (1993)的研究結果——在孩童到達「實質的相等」階段之前，會先經歷「植基於計算結果的相等」。

(二)認知階段

由於前測的發現，研究者決定植基在這群學童「能**計算出**『甲數 + 乙數』與『乙數 + 甲數』的結果相同」上，朝「加法交換律的認識」邁進。如前所言，此階段的補救教學亦是經歷「由具體至半具體再至抽象」的循環，主要分為兩個層次：先利用**具體物的操作**讓孩子「看見」：兩數量相加時，前後順序對調並不影響相加的結果，例如：3枝鉛筆加2枝鉛筆的結果與2枝鉛筆加3枝鉛筆的結果相同，接著利用黑板上**磁鐵**(半具體物)**的展示與排列**再次強化孩子的概念，例如：將「3個紅色磁鐵又2個綠色磁鐵」與「2個綠色磁鐵又3個紅色磁鐵」排成上下兩列後可以「**對齊**」，顯示兩列的數量一樣多

(都是5個磁鐵)，研究者係利用排列與操作的過程讓孩子「看見」與「連結」加法的「交換性」以及加法的運算結果。

經過二次的補救教學後，這群學童藉由研究者所佈的問題情境中的解題與運算，皆能認知「甲數 + 乙數」與「乙數 + 甲數」的運算結果會相同而無須經過計算，亦即，解答「甲數 + 乙數」與「乙數 + 甲數」的運算結果是否會相同？**是透過「直接識別」對結果做判斷而非經由計算**；有幾位學童甚至會在課堂上以自己的語言「相反」、「顛倒」(指「甲數 + 乙數」與「乙數 + 甲數」兩者的加法運算方向相反、或顛倒)、「調換」(指「甲數 + 乙數」與「乙數 + 甲數」中甲數、乙數的位置對調)來說明相加的結果並不會改變；不過此階段仍有至少半數以上的學童無法接受「3 + 7 = 7 + 3」這類等式的表徵(如：S2, S3, S4, S6, S11, S12, S14, S17等)，此部分涉及學童對於等號及等式的認識(此部分將在發現二詳述)，這些學童的理由是「等號的右邊是要寫答案，不能寫算式」、以及「這樣寫不對，因為沒有算完」等。因此研究者決定配合學童對於等號與等式的認識(請見發現二)，將其對於「加法交換律」的理解從具體情境提升至符號表徵的層次。

(三)等式表徵前階段

研究者於是利用學童已有的加法運算基礎，以及教學者在解題過程中的教學引導，例如：「3 + 7 = 10，7 + 3 = 10，所以**3 + 7 = 10 = 7 + 3**」——**以「10」做為中間的「跳板」**，結果發現多數學童能接受「**3 + 7 = 10 = 7 + 3**」這類等式的表徵、也能認同在具體情境中，以「**3 + 7 = 10 = 7 + 3**」這類的等式來表徵加法的交換性。故研究者稱此階段為等式表徵前階段；不過也有3位學童(S1, S7, S10)無須經歷此階段而能直接到達下一個階段——等式表徵階段；例如：在第三次補救教學課堂中，已有學童(S1)採用「**9 - 6 = 3**」來解決「5 + 4 = (　) + 6」此類問題，顯示此名學童不但理解這樣的等式表徵，且具有等號兩邊數量一樣多的概念，甚至具備「加減互逆」的概念。

(四)等式表徵階段

經由幾次「3 + 7 = 10 = 7 + 3」此類等式表徵的過渡與引導，以及配合學童對於「等號」認識的擴展與提升(「『等號』的左邊要等於『等號』的右邊」)，17位學童在補救教學後已能接受以「3 + 7 = 7 + 3」這類的等式來表徵加法的交換性了。

再從【980226隨堂測驗】(詳見附錄一)以及後測中有關「加法交換律」的測驗結果觀之：由於【980226隨堂測驗】中有20題(第1-1至1-10題以及第2-1至2-10題)關於「加法交換律」的問題以及後測中前4題關於「加法交換律」的問題皆是以「等式表徵」的方式呈現，而非在具體情境中陳述，結果17位學童的答對率幾乎接近百分之百，顯示這群學童關於「加法交換律」的認識已從認知的層次提升至等式表徵的層次了。

二、個案學童關於「等號」的認識

研究發現：個案學童關於「等號」的認識，在補救教學的歷程中，有著不同的進展。補救教學初期，在研究者所佈置的問題情境中，即使許多學童已經可以不經計算即可認知「甲數 + 乙數」與「乙數 + 甲數」的結果一樣(甲數、乙數代表某兩個正整數)，但是卻仍至少有8位個案學童(例如S2, S3, S4, S6, S11, S12, S14, S17)無法接受「2 + 3 = 3 + 2」這樣表徵的等式，顯示此些學童對於等號的認識或是等式的表徵仍然存有問題。例

如：

1. 有學童不能接受等號的兩邊皆有算式(如：S12)，認為「等號的右邊是要寫答案，不能寫算式」。(S12-971216晤)
2. 部分學童(如：S4, S6, S14)雖能理解「1 + 4 = 5」以及「4 + 1 = 5」，但卻還是無法接受「1 + 4 = 4 + 1」這樣的表徵形式，這些學童認為「1 + 4 = 4 + 1」這樣的寫法是不對的，因為「沒有算完」。(S4-971209晤、S6-971209晤、S14-971209晤)
3. 至少有5位學童(S2, S3, S6, S11, S17)雖然知道「2 + 3 = 5」以及「3 + 2 = 5」，也有學童可以接受「2 + 3 = 5 = 3 + 2」，「1 + 4 = 5 = 3 + 2」；但都會懷疑「2 + 3 = 3 + 2」或是「1 + 4 = 3 + 2」這樣的表徵是否正確？(S2-971216觀、S3-971216觀、S11-971216觀、S17-971216觀、S6-971216觀)

整體而言，不論是上述哪一種情況皆顯示，這些學童在補救教學初期對於「等號」的認識仍停留在「代表運算的結果」而不能理解「等號兩邊數量一樣多」的意涵，也因此無法接受「2 + 3 = 3 + 2」、或是「1 + 4 = 3 + 2」這類的算式表徵。這樣的結果再次呼應了Falkner等(1999)以及Carpenter等(2003)的研究發現：不論是幼稚園或是國小學生，仍存有許多學童認為等號所代表的是運算的結果；此發現也與國內陳嘉皇(2007)的研究結果相近：在其有關〈兒童代數融入國小數學教育之研究〉中發現：982位三至六年級的樣本中，許多學童將等號理解為運算的概念，僅少部分學童視為關係的解釋；由此可見中、高年級學童尚且如此，更遑論低年級學童等號概念的薄弱。

不過經過了幾次的補救教學後(即「由具體至半具體再至抽象」幾次的循環)，有部分學童(如S3, S11, S14)已有不同的進展，以下的發現係來自幾次不同時間的補救教學觀察紀錄：

> S14寫考卷時，發現他知道「7 + 3 = ( ) + 8」，( ) = 2，詢問他是如何作答的，他說因為左右相等，「7 + 3 = 10」，然後8再來會是9、10，算了兩個，所以( ) = 2。(S14-971223觀)
>
> S3完成考卷後，給她結合律的題目，EX：「1 + 2 + 3 = 3 + 1 + ( )」，詢問她的解法，她說：等號的左邊已經有6，右邊只有4，又「4 + 2 = 6」，所以括號中要填2。(S3-980226觀)
>
> S11完成考卷後，也給他結合律的題目，EX：「1 + 2 + 3 = 3 + 1 + ( ) = ( ) + 2 + 1」，他在紙上畫出他的解法：
>
> $\underbrace{1 + 2 + \underbrace{3 = 3}_{} + 1 + (\ )}_{}$，所以括號要填
>
> 2。(S11-980226觀)

其實S14即是原先認為「1 + 4 = 4 + 1」這樣的寫法是不對的孩童，因為他認為這樣「沒有算完」。而不管是S3或是S11亦皆是在補救教學初期懷疑「2 + 3 = 3 + 2」或是「1 + 4 = 3 + 2」這樣的表徵是否正確的孩童，但是從補救教學觀察紀錄中都顯示出這3名學童對於「等式的認識」層次已進階了。此發現呼應了Sáenz-Ludlow與Walgamuth (1998)的研究結果：經由訪談引導，學生對等號的解釋可從「運算結果」轉換為「二量相等」。

而在補救教學後期，由於17位學童皆已能使用「『等號』的左邊有沒有等於『等號』的右邊」這樣的策略來針對「8 + (1) = 9 + 3」等題型偵錯、以及解決「1 + ( ) = 5 + 3」等相關題型，雖然若是題目中的數字較

大時，常會影響學童的正確答對率(此又另外涉及了學童計算能力的探討)，然而解題的策略卻皆是依賴「『等號』的左邊有沒有等於『等號』的右邊」這樣的判斷，因此研究者推論學童關於等號的認識已從「代表運算的結果」進展為知道「等號兩邊數量一樣多」的意涵。

三、綜合發現一與發現二的討論

事實上，發現一中所陳述的四個階段除了代表這群學童關於「加法交換律」的不同認識階段外，對照發現二，研究者認為此些階段其實與學童對於「等號」及「等式」的認識亦息息相關，針對此點，研究者將這群學童關於「加法交換律」認識階段的階層性以及與等式認識的關連性以圖1表之。圖1中左下角第一個方框指的是「加法交換律」的教學起始點，其餘各個方框顯示的是學童關於「加法交換律」不同的認識階段，經由適當的教學引導，可以逐步進階(由左而右)；方框下的箭頭顯示的是學童能進階至下一個認識階段所需的基礎；而所謂「等號的認識(一)」係指將「等號」視為運算的結果，至於「等號的認識(二)」則是指能了解等號兩邊數量一樣多的意涵。

若以本研究所發現的「加法交換律」認識階段與Baroody與Gannon (1984)對於學童認識「加法交換律」的三個層次作比較，本研究的四個階段其實是對Baroody與Gannon所言的第二個層次「基本的交換性階段」作更細微與精緻的細分：在Baroody與Gannon所提的模式中，學童要從「初始階段」(認

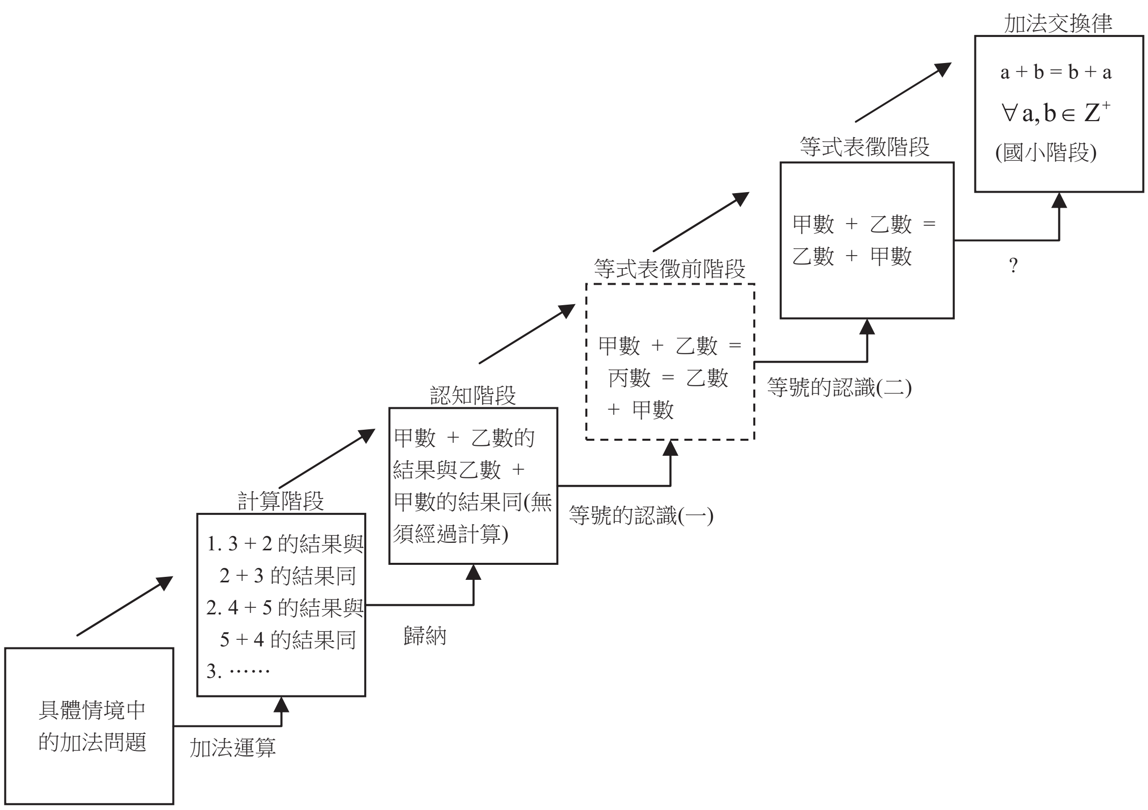


圖1：學童的「加法交換律」發展階層圖及其與等號認識的關連

為「3 + 2」與「2 + 3」是不一樣的)進展到「數學形式的交換性階段」(已能將交換律與二元運算產生連結，同時聚焦在加法運算的結果上)，只有經過一層，即第二層「基本的交換性階段」，然而，根據本研究的發現，單就「能認知加數的順序對調並不會影響加法運算的結果」其實是可能有許多轉折的，即研究者所謂的「計算階段、認知階段、等式表徵前階段、等式表徵階段」四層；若再與Bermejo與Rodriguez (1993)所提出的假設性「加法交換律」的五步認識模式比較，本研究所發現的四個階段其實是Bermejo與Rodriguez的模式中第三步「植基於計算結果的相等」到第四步「實質的相等」的細分，亦即，Bermejo與Rodriguez所提模式中的兩個步驟在本研究中可以再細分為「計算階段、認知階段、等式表徵前階段、等式表徵階段」四層；而這樣細分的好處是當教學者發現學童在認識加法交換律有障礙時，可以透過本研究的四個階段引導學童慢慢過渡，逐步更深層地認識「加法交換律」。此外，不論是Baroody與Gannon或是Bermejo與Rodriguez在探討孩童的「加法交換律」概念時，皆欠缺了與等號關聯性的討論，而本研究所提出的學童「加法交換律」發展階層圖不僅在層次上比這兩位學者的模式更細緻，亦具體明白地點出及其與「等號」認識間之關聯性。

不過，由於研究中發現有少數學童(S1, S7, S10三位)無須經過「等式表徵前階段」即可直接到達「等式表徵階段」，因此研究者在圖1中特別以虛線表之，表示並非每位學童皆須經歷該步驟，只是教師可將此步驟特別作為學習較遲緩或認知上有困難的學童之學習跳板。至於本研究沒有探討到抽象形式的「加法交換律」階段，係因本研究個案為低年級學童，抽象形式的「加法交換律」之認識已超越其可以學習的範圍以及低年級數學課程的範疇，故不予在此討論。

四、其他相關發現

(一)「3 + 2 = ( ) + 3」與「3 + 2 = ( ) + 4」這兩類題型對部分學童而言是有難度上的區別的

研究者之所以主張「3 + 2 = ( ) + 3」與「3 + 2 = ( ) + 4」兩類題型對部分學童有難度上的區別主要來自以下幾種證據：

1. 整理【980226隨堂測驗】(題目詳見附錄一)的測驗結果如表2所示，我們可以發現：「3 + 2 = ( ) + 3」此類題型(即表2中「a + b = b + a」該列之各題型)不論括號在哪一個位置，其平均答對人數至少皆在16人以上；而「3 + 2 = ( ) + 4」此類題型(即表2中「a + b = c + d」該列之各題型)不論括號在哪一個位置，其平均答對人數則只有10人上下；亦即，比較表2中「a + b = b + a」與「a + b = c + d」兩列的答對人數，由此可驗證研究者的主張：「3 + 2 = ( ) + 3」與「3 + 2 = ( ) + 4」這兩類題型對部分學童(17位中約佔有7位)而言是有難度上的區別的。

表2：【980226隨堂測驗】中不同形式與不同括號位置之題型的平均答對人數統計表

「a + b = b + a」各題型	**( ) + b = b + a**	**a + ( ) = b + a**	**a + b = ( ) + a**	**a + b = b + ( )**
平均答對人數	17.00	16.70	17.00	16.70
「a + b = c + d」各題型	**( ) + b = c + d**	**a + ( ) = c + d**	**a + b = ( ) + d**	**a + b = c + ( )**
平均答對人數	9.70	10.70	10.30	10.30

n = 17。

2. 若再檢視後測(題目見附錄二)的結果亦可看見：第1至4題是屬於「3 + 2 = ( ) + 3」的題型，答對人數分別是17、17、17、15，第5至8題是「3 + 2 = ( ) + 4」這類的題型，答對人數分別是16、16、14、12，顯示直至後測階段，「3 + 2 = ( ) + 3」與「3 + 2 = ( ) + 4」這兩類問題對部分學童而言仍有難度上的區別。

首先，研究者認為多數學童之所以能解答「3 + 2 = ( ) + 3」這類的問題，是由於在補救教學後期(98年2月下旬至98年3月)，學童對於「加法交換律」的認識已趨穩固，即已達研究者所稱的「符號表徵階段」，亦即，學童不僅無須經過計算即能認知「甲數加乙數等於乙數加甲數」，而且也已習慣「3 + 2 = 2 + 3」這類的表徵，所以根據研究者的課輔觀察，多數學童已能以「左邊有3右邊也有3，左邊有2右邊也要有2」這樣的策略來思考解題之道而無須經過計算，因此，解決「3 + 2 = ( ) + 3」這類的問題對多數學童而言並非難事；然而，這樣的思考以及「加法交換律」的情境應用，卻無法類推到解決「3 + 2 = ( ) + 4」這類的問題，學童此時所採取的解題策略是「檢驗等號的左邊有沒有等於等號的右邊」，而解題的過程中由於同時涉及了學童的計算能力，因此會影響其答對率。

(二)算式填充題中括號的位置並不會影響學童的答對率

由於前述關於不同問題有不同難易度的發現，研究者因此好奇「3 + 2 = 2 + ( )」、「3 + 2 = ( ) + 3」、「( ) + 2 = 2 + 3」、與「3 + ( ) = 2 + 3」此四類問題對這群學童而言，是否也會因為括號所在位置的不同而有難易之分？對照附錄一的題目以及表2中第一列所呈現的結果，所謂題型「( ) + b = b + a」係包括「( ) + 3 = 3 + 2」、「( ) + 5 = 5 + 4」、「( ) + 8 = 8 + 4」等三題；而題型「a + ( ) = b + a」則是指「2 + ( ) = 3 + 2」、「4 + ( ) = 5 + 4」、「4 + ( ) = 8 + 4」等三題；其餘情形類推。結果發現：不論括號在哪一個位置，其平均答對人數幾乎不相上下(分別是17.00、16.70、17.00、16.70)，可見有關「a + b = b + a」此類中括號位置不同的四種題型對學童而言，並無難易之分；此外，從此列中所有題型的高答對率亦驗證了研究者前述所言：絕大多數的學童在此階段關於加法交換律的等式表徵已趨於穩定。

同樣地，「3 + 2 = ( ) + 4」這類的問題是否也會因為括號所在位置的不同而對學童有難易之分？對照附錄一的題目以及表2中第二列所呈現的結果，所謂題型「( ) + b = c + d」係包括「( ) + 7 = 5 + 3」、「( ) + 6 = 9 + 5」、「( ) + 8 = 9 + 9」等三題；而題型「a + ( ) = c + d」則是指「1 + ( ) = 5 + 3」、「8 + ( ) = 9 + 5」、「10 + ( ) = 9 + 9」等三題；其餘情形類推。研究者同樣亦發現：不論括號在哪一個位置，其平均答對人數亦幾乎不相上下(9.70、10.70、10.30、10.30)，可見有關「a + b = c + d」此類題型中括號的位置亦不會影響學童的答對率。

(三)加法的運算能力以及文字閱讀與理解能力，皆會影響學童的代數解題能力

研究者發現至少有5位學童的概念理解與運算能力並非同步發展，亦即，即使已具備代數相關的概念(如：已認識加法的交換性)，但是由於計算能力太弱，以致於仍然無法成功解題，特別是數字大於10的運算，常須借助手指或花費較長的時間來思考，且容易計算錯誤(S8-971209學習單、

S13-971209學習單、S16-971209學習單、S2-980106卷、S17-980106卷)；而從98年1月6日的隨堂測驗結果亦可發現，答錯率最高的四題(判斷正確性)：「5 + 4 = 4 + (13)」、「10 + (4) = 7 + 7」、「5 + 6 = 2 + (13)」、「7 + 6 ＝ (10) + 3」數字和皆大於10，亦可呼應：加法的運算能力會影響學童的代數解題。而從發現(一)中提及的學童後測答題情形亦可看見：雖然所有學童皆能以「『等號』的左邊要等於『等號』的右邊」這樣的策略來解題，但礙於題目中數字的大小，往往影響了學童的答題正確率。

此外，由於研究者嘗試引導學童在具體情境中理解加法的交換律與結合律，因此遂以一些文字題來作為問題情境的鋪陳，結果發現至少兩位以上的學童在理解題意上的困難以及閱讀上的障礙皆影響了學童關於代數文字題的解題能力(S3-971209學習單、S12-980106卷)。

伍、結論

「代數」一直以來皆是數學教育的重心；代數教導學童數學相關的定義與技巧：能做說明、類化與歸納；也幫助學童對一些基礎數學步驟的理解：對數字、圖表以及符號表徵加以詮釋、創造和解釋數學模式、分析與比較關係、應用公式解決問題等(陳嘉皇，2007)。然而，由於國內過去數學課程的編排，長久以來代數常被視為是進入較高階數學的門檻，也因此在國小的數學裡，除了高年級的課程外，較少被關注，更遑論是有關早期代數的相關探究——如學童對於「加法交換律」與「等號」的認識等。

為因應九二正綱實施後在低年級階段即引入早期代數的教學，本研究以17位低年級學童為對象，探究其在補救教學過程中關於「加法交換律」以及「等號」的相關想法，從而勾勒出這群學童對於「加法交換律」的發展階層圖及其與「等號」的認識二者間的關聯(如圖1所示)；惟因「參與數學學習社團」的學童只有17位，故研究者尚未敢推論於所有一年級學童，希望後續研究能有機會根據圖1有關「加法交換律」的發展階層圖發展一份測驗，然後透過較大樣本的施測後再次檢驗與修訂此階層圖，如此方能更加精準地下定論。而根據研究中的各項發現，本研究將獲致的幾項結論整理如下，期望本研究對於低年級學童代數概念的理解以及早期代數教學的省思，能提供給國內數學教育學者與中小學教師在進行代數概念探究或從事代數教學時之參考：

一、學童關於「加法交換律」的認識，可以經由教學而逐步進階；且這些不同的「加法交換律」認識階段與其對於「等號」的認識息息相關

綜合各項資料分析結果，本研究發現學童關於「加法交換律」的認識可以逐步進階，依序為計算階段、認知階段、等式表徵前階段、等式表徵階段。所謂「計算階段」係指學童知道「甲數 + 乙數」與「乙數 + 甲數」的運算結果相同乃是透過計算得來；「認知階段」是指學童知道「甲數 + 乙數」與「乙數 + 甲數」的運算結果會相同，是透過判斷無須經過計算；至於「等式表徵前階段」則是指學童在說明加法具交換性時，能接受「**3 + 7 = 10 = 7 + 3**」這類等式的表徵；而「等式表徵階段」則是指學童已能接受以「**3 + 7 = 7 + 3**」這類等式來表徵加法的交換性。本研究之主要貢獻乃是勾勒出學童的「加法交換律」發展階層及其與「等號」認識之關聯圖，而此發展階段，不論是與Baroody與Gannon (1984)所提出的三

個層次作比較，或是與Bermejo與Rodriguez (1993)所提出的五步認識模式做比較，都更為細微與精緻——能更細緻地描繪學童在認識「加法交換律」的轉折，同時亦能具體明白地點出及其與「等號」認識間之關聯性；而這種細緻性以及與「等號」認識之關聯性的描述皆有助於引導學習較遲緩的學童慢慢過渡其對於「加法交換律」的認識，例如：有部分學童在補救教學初期對於「等號」的認識仍停留在「代表運算的結果」而不能理解「等號兩邊數量一樣多」的意涵，也因此無法接受「2 + 3 = 3 + 2」這樣的表徵，然而，俟研究者強化了此些學童對於等號的認識後，則促使其對「加法交換律」的認識再進階至符號表徵階段了。

二、在「具體情境」中認識加法交換律以及能以「等式表徵」加法交換律對學童而言是兩個不同的層次

如前所述，由於學童在補救教學過程中關於「加法交換律」的認識大致經歷了四個階段，依序為：計算階段、認知階段、符號表徵前階段，以及符號表徵階段；顯示：在「具體情境中認識加法交換律」(屬於前述的第一與第二階段)與「能以等式表徵加法交換律」(屬於前述的第四階段)對學童而言是兩種不同的層次。而雖然在九二正綱所規範的一年級學習內容只需能在具體情境中認識「加法交換律」，然而透過本研究發現，即使是數學低成就學童，只要經過適當的引導，他們關於「加法交換律」的認識是可以進階的。且不論是從Baroody與Gannon (1984)所提出的三個層次或是Bermejo與Rodriguez (1993)所提出的五步認識模式，亦皆可提供與本結論相似的驗證。

三、只要佈置合宜的代數學習情境，國小低年級學童是有可能學習抽象的代數概念的

整體而言，根據本研究代數補救教學過程中學童關於代數的各項學習進展，研究者認為只要佈置合宜的代數學習情境，例如：與學童生活經驗相關的具體情境、或是植基於學童關於量的連結概念，來引導學童了解及使用代數的語法規則等等，國小低年級學童是有可能學習抽象的代數概念的。此結果與國內外許多研究發現是相呼應的(陳嘉皇，2006；陳維民，1998；Carraher et al., 2001; Davis, 1989; Kaput, 2009)：若代數引入教材的方式正確且時機適當，或是設計合宜的情境將代數的學習與學童的生活經驗連結，而非僅是格式化的數學操弄，則即使幼童亦能學習與文字符號相關的代數內容，或是在低年級的數學課堂便能引入早期代數。

陸、省思

綜合上述有關學童在補救教學期間的代數學習表現，研究者針對本研究中代數補救教學活動的發展與實踐提出省思如下：

一、「加法交換律」教學活動的發展應與其認識層次相呼應，同時亦須擴展學童對於等號的認識，才能使教學實踐更落實

由於部分學童關於「加法交換律」的認識需要逐步進階，包括：計算階段、認知階段、等式表徵前階段、等式表徵階段，因此，可循著學童關於「加法交換律」的認識層次來逐步發展「加法交換律」的教學活動。不過，如前所述，由於學童關於「加法交換律」的認識同時涉及了學童對於等號的理解，因此在發展「加法交換律」的教學活

動時，亦應同時擴展學童對於等號以及等式的認識，如此方能使「加法交換律」的教學實踐更加落實。

二、具體情境的鋪陳與文字題佈題二者間宜取得平衡

為了檢視學童是否能在具體情境中認識加法的交換性，研究者於是嘗試以文字題的形式佈題，結果發現部分學童有讀題上的困難，因而也影響了學童的解題能力。因此，在透過文字題情境來引導學童建構某項數學概念時，應同時注意學童的閱讀理解能力，以確保此情境的教學對學童而言是一項助力而非阻力。

三、教學內容的制約性需考量並跳脫

補救教學期間研究者還發現：補救教學的內容有可能會制約了學童的答題反應，例如：在「加法交換律」的教學中，由於研究者所佈的每一個問題其答案幾乎都是「一樣多」，導致許多學童在解題時常不加思索就勾選「一樣多」，甚至有學童直指：「每一題答案一定都是『一樣多』」(S9-971230觀)；於是，爲了跳脫教學內容對學童的制約性，研究者在一次複習活動中，故意穿插一些答案不再是「一樣多」的問題，例如：「洋洋給阿公4顆橘子、阿嬤5顆橘子；阿寶給阿公6顆橘子，阿嬤3顆橘子，請問阿公跟阿嬤誰拿到的橘子比較多呢？為什麼？」(980305教案)，以引導學童跳脫教學內容的制約性。

四、在發展學童代數解題能力時，宜同時關照學童的加法運算能力以及文字閱讀與理解能力

如前所述，研究者發現部分學童即使已具備代數相關的概念(如：已認識加法的交換律)，但是由於計算能力太弱，以致於仍然無法成功解題；此外，研究者亦發現部分學童在理解題意上的困難以及閱讀上的障礙皆影響了學童關於代數文字題的解題能力(S3-971209學習單、S12-980106卷)。為因應這兩種狀況，研究者除在讀題上予以個案學童協助，以確認是概念不通或只是因為題意不懂；另外亦加派關於加法運算的回家作業，增加學童的演算機會，以增進學童的運算能力。

誌謝

本研究承蒙國科會經費補助(計畫編號：NSC97-2511-S-415-002-MY2與計畫編號：NSC96-2628-S-415-002-MY2)、以及楊德清教授與「發展提升低年級弱勢學習者數學能力之教與學模式」、「數學教／學案例在數學師資培育之應用」兩方研究團隊的鼎力支援、還有「數學學習社團」全體學童的熱情參與，使研究得以順利完成，特此致謝。

參考文獻

1. 李美蓮、劉祥通(2003)。開啟國中代數教學的新視窗。**科學教育月刊**，**265**，2-15。
2. 林光賢、郭汾派、林福來(1989)。**國中生文字符號概念的發展**(NSC77-0111-S004-001-A)。臺北市：行政院國家科學委員會。
3. 林清山、張景媛(1994)。國中生代數應用題教學策略效果之評估。**教育心理學報**，**27**，35-62。
4. 姚如芬(2007)。「新臺灣之子」數學學習初探。**臺灣數學教師(電子)期刊**，**9**，36-56。
5. 洪有情(2006)。**青少年代數運算概**

念的「學習與教學」研究(NSC95-2521-S-003-010)。臺北市：行政院國家科學委員會。

6. 教育部(2003)。**92年國民中小學九年一貫課程綱要：數學學習領域**。臺北市：作者。
7. 莊松潔(2004)。**不同年級學童在具體情境中未知數概念及解題歷程之研究**。未出版之碩士論文，國立中山大學教育研究所，高雄市。
8. 郭生玉(1990)。**心理與教育研究法**。新北市：精華書局。
9. 陳嘉皇(2006)。國小五年級學童代數推理策略應用之研究：以「圖卡覆蓋」解題情境歸納算式關係為例。**屏東教育大學學報，25**，381-412。
10. 陳嘉皇(2007)。**兒童代數融入國小數學教育之研究**(NSC96-2521-S-168-001)。臺北市：行政院國家科學委員會。
11. 陳維民(1998)。**兒童的未知數概念研究：一個國小六年級兒童的個案研究**。未出版之碩士論文，國立高雄師範大學數學系，高雄市。
12. 黃瑞琴(1994)。**質的教育研究方法**。臺北市：心理。
13. 黃寶彰(2003)。**六、七年級學童數學學習困難部分之研究**。未出版之碩士論文，國立屏東師範學院數理教育研究所，屏東縣。
14. 熊召弟(1996)。科學童話在自然科學教學的意義。**國民教育，36**(3)，26-31。
15. 戴文賓、邱守榕(2000)。國一學生由算術領域轉入代數領域呈現的學習現象與特徵。**科學教育，10**，148-175。
16. 謝和秀、謝哲仁(2002，10月)。**國一學生文字符號概念及代數文字題之解題研究**。發表於九十一學年度師範院校教育學術論文發表會。嘉義市：國立嘉義大學。
17. Baroody, A. J. (1982). Are discovering commutativity and more economical addition strategies related? *Problem Solving*, *12*, 1-2.
18. Baroody, A. J., & Gannon, K. E. (1984). The development of the commutativity principle and economical addition strategies. *Cognition and Instruction*, *1*(3), 321-339.
19. Baroody, A. J., Ginsburg, H. P., & Waxman, B. (1983). Children's use of mathematical structure. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14*(3), 156-168.
20. Behr, M., Erlwanger, S., & Nichols, E. (1980). How children view the equals sign. *Mathematics Teaching*, *92*, 13-15.
21. Bermejo, V., & Rodriguez, P. (1993). Children's understanding of the commutative law of addition. *Learning and Instruction*, *3*(1), 55-72.
22. Bodanskii, F. (1991). The formation of an algebraic method of problem solving in primary school children. In V. Davydov (Ed.), *Soviet studies in mathematics education. Psychological abilities of primary school children in learning mathematics* (Vol. 6, pp. 275-338). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
23. Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors: A report of the strategies and errors in secondary mathematics project*. Windsor, UK: NFER-Nelson.
24. Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The ideals of Algebra,*

K-12 (pp. 20-32). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

25. Brito-Lima, A. P., & da Rocha Falcão, J. T. (1997). Early development of algebraic representation among 6-13 year old children: The importance of didactic contract. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vo1. 2, pp. 201-208). Lahti, Finland: University of Helsinki.
26. Brizuela, B.M., & Schliemann, A. D. (2003). Fourth graders solving equations. In N. Pateman, B. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th international conference psychology of mathematics education* (Vol. 2, pp. 137-144). Honolulu, HI: University of Hawaii.
27. Cai, J., & Moyer, J. C. (2008). Developing algebraic thinking in earlier grades: Some insights from international comparative studies. In C. E. Greens & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics: 70th yearbook of National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 169-182). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
28. Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.
29. Carraher, D., Schliemann, A. D., & Brizuela, B. M. (2001). Can young students operate on unknowns. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1, pp. 130-140). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.
30. Collins, R., & Cooper, P. J. (1997). *The power of story: Teaching through storytelling*. Scottsdale, AZ: Gorsuch Scarisbrick.
31. Davis, R. (1989). Theoretical considerations: Research studies in how human think about algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (Vol. 4, pp. 266-274). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics/NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
32. Davydov, V. V. (Ed.). (1991). *Soviet studies in mathematics education, Vol. 6: Psychological abilities of primary school children in learning mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
33. Erlwanger, S., & Berlanger, M. (1983, April). *Interpretations of the equal sign among elementary school children*. Paper presented at the North American Chapter of the International Group for Psychology of Mathematics Education. Montreal, Canada.
34. Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (1999). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics*, *6*(4), 232-236.
35. Friedlander, A., & Taizi, N. (1987). Early algebra games. *Mathematics in School*, *16*(1), 2-6.
36. Ginsburg, H. P. (1982). *Children's arithmetic: How they learn it and how you teach it*. Austin, TX: PRO-ED.
37. Kaput, J. (2009). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that*

promote understanding (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

38. Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(3), 317-326.
39. Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: MacMillan/Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
40. Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139-151.
41. Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*(4), 297-312.
42. Knuth, E. J., Alibali, M. W., Hattikudur, S., McNeil, N. M., & Stephens, A. C. (2008). The importance of equal sign understanding in the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(9), 514-519.
43. Lodholz, R. D. (1999). The transition from arithmetic to algebra. In B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, grades K-12: Readings from NCTM's school-based journals and other publications* (pp. 52-58). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
44. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
45. Oksuz, C. (2007). *Children's understanding of equality and the equal symbol*. Retrieved December 1, 2007, from http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/oksuz.pdf
46. Patton, M. Q. (1990). *Qualitative evaluation and research methods*. Thousand Oaks, CA: Sage.
47. Sáenz-Ludlow, A., & Walgamuth, C. (1998). Third Graders' interpretations of equality and the equal symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *35*(2), 153-187.
48. Schliemann, A. D., Carraher, D. W., & Brizuela, B. M. (2007). *Bringing out the algebraic character of arithmetic: From children's ideas to classroom practice*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
49. Warren, E. (2004). Generalising arithmetic: Supporting the process in the early years. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 4, pp. 417-424). Bergen, Norway: Bergen University College.

附錄一、980226隨堂測驗

二年______班　座號：______　姓名：______________

洋洋跟阿寶最近發明了新遊戲——數字拳。要出跟對方一樣多就贏了。下面是他們玩數字拳的紀錄，但是他們都漏掉了一些，請幫他們補上去。

阿寶出拳記錄
(1)　2 + 3 = 3 + ( )
(2)　( ) + 7 = 7 + 3
(3)　4 + 5 = 5 + ( )
(4)　( ) + 3 = 3 + 2
(5)　( ) + 7 = 7 + 3
(6)　4 + 5 = ( ) + 4
(7)　4 + ( ) = 8 + 4
(8)　6 + ( ) = 9 + 6
(9)　( ) + 9 = 9 + 6
(10) ( ) + 8 = 8 + 4
(11) 1 + 7 = ( ) + 3
(12) 10 + 8 = 9 + ( )
(13) 1 + ( ) = 5 + 3
(14) 8 + 6 = 9 + ( )
(15) ( ) + 8 = 9 + 9
(16) 10 + ( ) = 9 + 9

洋洋出拳記錄
(1)　3 + 7 = ( ) + 3
(2)　2 + ( ) = 3 + 2
(3)　3 + ( ) = 7 + 3
(4)　4 + ( ) = 5 + 4
(5)　2 + 3 = ( ) + 2
(6)　( ) + 5 = 5 + 4
(7)　6 + 9 = 9 + ( )
(8)　4 + 8 = ( ) + 4
(9)　6 + ( ) = 9 + 6
(10) 4 + 8 = 8 + ( )
(11) ( ) + 6 = 9 + 5
(12) ( ) + 7 = 5 + 3
(13) 8 + 6 = ( ) + 5
(14) 1 + 7 = 5 + ( )
(15) 10 + 8 = ( ) + 9
(16) 8 + ( ) = 9 + 5

附錄二、代數補救教學後測

大家來找碴！注意看～裡面哪裏有錯呢？請在□中打✓或×。

1. □ $2 + 3 = (3) + 2$
2. □ $9 + 7 = (7) + 9$
3. □ $5 + 4 = 4 + (13)$
4. □ $4 + (7) = 3 + 4$
5. □ $8 + (1) = 9 + 3$
6. □ $6 + (8) = 8 + 8$
7. □ $(13) + 1 = 7 + 7$
8. □ $5 + 11 = (12) + 4$

阿公跟阿嬤去市場買東西。只知道他們花了一樣多的錢，阿嬤買了青菜10元、吳郭魚25元；阿公買了蛋15元和碗糕？元。請你算算碗糕多少錢。

科學教育學刊
2011, 第十九卷第三期, 211-235

Chinese Journal of Science Education
2011, 19(3), 211-235

Children's Understanding of the Additive Commutative Law and the Equal Sign

Ru-Fen Yao

Graduate Institute of Mathematics and Science Education, National Chia-Yi University

Abstract

The main purpose of this case study was to investigate 17 children's understanding of the commutative law of addition and the equal sign. Various data was obtained through observation, interview and the collection of relevant documents. From analyses of the data it was noticed that prior to any instruction most students could recognize 50 + 25 = 25 + 50 through counting but not through the application of the additive commutative law. After instruction, students' understanding of the additive commutative law improved, and this understanding was related to their understanding about the equal sign in equation. According to these findings, the researcher developed a model to show the progress of students' understanding of the additive commutative law in addition to their understanding of equal sign. Reflections and suggestions are also presented in this article.

Key words: Additive Commutative Law, Children, Case Study, Equal Sign