

國小三年級課室以數學臆測活動引發學生論證初探

林碧珍

國立新竹教育大學 數理教育研究所

摘要

本研究旨在探討數學臆測活動融入三年級課堂學生所展現的數學論證歷程。本研究的數學臆測是數學課堂中，先由學生造例以建立資料；然後觀察以尋求規律性，並提出猜想；再共同檢驗猜想的正確性，及驗證猜想的一般化之歷程。數學論證是在進行臆測教學活動脈絡下產生的，故它是數學臆測的一部分；它是從建立資料及證據作為形成論述或檢驗論述的依據，以支持結論的過程。本研究採用質性研究法，觀察一位個案教師將臆測融入三年級的數學課堂教學。蒐集資料包括錄影及錄音逐字稿、學生解題紀錄、觀察記錄、任務設計簡案、教師的數學日誌。學生的論證分析以Toulmin (1958)的論證模式為基礎，並修正Reid與Knipping (2010)的論證結構圖而畫出論證結構圖。研究發現：數學臆測活動可以引發三年級學生的數學論證。對數學知識不夠豐富的三年級學生，大都是以例子作為推論依據，以捍衛自己提出的猜想，學生所展現的論證層次是落在Balacheff (1988)的原始試驗層次。臆測活動不僅可以培養學生的論證能力並意義化數學性質，並在論證過程中釐清了學生的迷思概念、修正學生不精確的數學語言。學生的論證結構圖可以顯現出教師在學生論證過程中介入的時機及次數，也可以顯示學生從提出猜想通往結論所發生的反駁、推論依據的論證歷程。

關鍵詞：小學三年級、數學課堂論證結構、數學論證、數學臆測

壹、緒論

我國國民中小學九年一貫課程綱要數學領域「連結」主題能力指標，強調學生能熟悉解題的各種歷程和能運用解題的各種方法的重要；解題歷程包括：觀察、臆測、檢驗、推演、驗證和論證等，而解題方法包括：歸納、演繹、推理、類比、一般化、特殊化、模式化、系統化等(教育部，2000，

2003，2008)。雖然解題歷程與解題方法都是歷年來各波數學課程改革的重點，然而，實施多年下來，其中臆測和論證活動在國小數學課室中仍然極為罕見。

從數學課程改革趨勢的觀點，數學臆測(conjecturing)和論證(argumentation)在數學教學的重要性也顯示在其他國家改革的數學課程中，例如，美國學校數學課程的原則與

*通訊作者：林碧珍

(投稿日期：民國102年11月16日，修訂日期：民國103年3月10日，接受日期：民國103年5月28日)

標準中呼籲教師應當提早在K-12年級提供機會讓學生進行數學臆測或論證等相關數學活動(National Council of Teacher of Mathematics [NCTM], 2000)，標準中強調數學課堂應當提供學生主動思考與建構數學知識的機會。從數學學習的觀點，數學臆測活動不僅是啟動學生主動思考的引擎，也能啟動數學探究和引燃數學論證(Lin, Yang, Lee, Tabach, & Stylianides, 2012; Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001)；數學臆測之後，伴隨著提出猜想，但是猜想不一定都是有效的，為了檢驗猜想是否有效，數學論證隨之發生，所以數學臆測是伴隨著論證發生，兩者關係極為密切。依據Stylianides (2007)提出證明是一種論證，論證包含三個元素：一組敘述(a set of statement)、論證方法(modes of argumentation；如演繹法、數學歸納法、舉反例等)、論證方法的表徵(representation of mode of argumentation)。以此觀之，數學論證需要涉及較高層次的解題歷程，故並非任何一堂數學課學生的論證都會發生，若教師能在課堂製造機會讓學生進行數學臆測活動，則學生的論證歷程較有可能發生，也就是，數學臆測可以引發數學論證，數學臆測是啟動數學論證的動力。

數學論證固然重要，學生這樣的習慣與能力需要在何種場域培養呢？依據陳英娥與林福來(1998)數學論證的研究發現建議：若要培養學生的論證能力，則需要把說理變成是一種習慣，而要養成這樣的習慣，唯有在數學課室中才能充分獲得。這樣的建議在她隨後的研究獲得證實，她發現學生在數學課室中所獲得的經驗比抽離出教室情境進行紙筆作業或測驗所能提供的更為充分且更為完備(陳英娥，2002)。在數學教室中，數學論證會展現在老師與學生互動之間的數學溝通活動中，所以在

數學課堂中，透過論證可以瞭解學生的數學想法。由此可見，若要發展國小學生的數學論證，數學教室是合適的研究場域。

近些年來，數學臆測與論證相關的研究與教學，逐漸受到數學教育學者的重視，例如，數學證明是2009年第19屆國際數學教學協會(International Congress of Mathematics Instruction [ICMI19])的大會主題(Lin, Hsieh, Hanna, & de Villiers, 2009)。又在2012年被列為第12屆國際數學教育協會(International Congress on Mathematics Education [ICME12])的其中一個專題研究群(topic study group 14; ICME12, 2012)。有關臆測與論證相關的研究文獻，至少可以區分為四類：一、從認知觀點探究學生的臆測或論證(Heinze, Cheng, Ufer, Lin, & Reiss, 2008; Reid, 2002)；二、從數學本質觀點，研究論證的形式化及非形式化(Cañadas, Deulofeu, Figueiras, Reid, & Yevdokimov, 2007)；三、數學臆測及證明任務的設計(Lin et al., 2012)；四、及有關教師的證明知識研究(Ko, 2010)。除此之外，最近有更多的研究者關心數學課堂中學生的臆測、證明或論證教學(Knippping, 2008; Knippping & Reid, 2013; Stylianides, 2007)。這些研究的研究對象大多是國、高中以上的學生，而且研究結果一致顯示國高中生甚至於大學生普遍對於數學證明感到困難，理由在於學生在中小學階段學習臆測和證明的經驗太少，於是，許多的研究建議教師應當將臆測、論證、或證明融入於學校數學教學中，以讓國小階段的學生提早學習(Ko; Reid & Knippping, 2010)。

然而，小學教師自己在學生時代時沒有體驗過臆測教學，所以不知課堂中臆測教學的樣貌，也不知學生的數學論證學習特性為何？更遑論有能力去辨認學生的數學論證及結構；所以，數學課堂中，若有學生的論

證發生，教師的教學任務需要特別設計，因此數學臆測和論證的教學對教師而言，都是新的知識，也是新的經驗，需要得到適當的協助與支持。基於此，本研究是在國科會補助三年期的專題研究計畫下，由研究者協助小學教師設計數學臆測任務，將臆測融入小學數學課堂教學中，以發展學生的數學論證能力。本文目的主要在於呈現在該研究計畫下的一位國小教師，如何以教科書的教學目標為依據，設計數學臆測任務，將數學臆測融入於小學數學課堂教學中，學生能展現的數學論證歷程。由於篇幅所限，本文僅呈現三年級教師數學課堂中學生的論證歷程；然而學生的論證歷程，是源自於教師所提供的數學臆測任務與數學臆測教學歷程的脈絡下發生的，因此臆測任務與數學臆測教學歷程也會在本文適當處呈現出來。

貳、數學臆測與數學論證的理論基礎

一、數學臆測的意義及重要性

不同學者之間對數學臆測所提出的定義大同小異，數學臆測(conjecturing)是個體面對不確定的數學問題時，依據已知條件或知識，進行猜測、檢驗、相信、和反駁的遞迴過程(陳英娥、林福來，1998；Mason, Burton, & Stacey, 1985)，數學臆測是一個歷程，而提出猜想或進行猜測(make or pose a conjecture)，是一個動詞，是臆測這個動態過程的一個步驟。猜想(conjecture)是一個名詞，指的是進行猜測所提出的結果。上述的定義是在數學解題過程中進行的數學臆測，所以個體已面臨了數學問題中的已知條件或資料，再依據已知條件進行猜想、檢驗、相信、和反駁的遞迴歷程。然而，數學

臆測在本研究中的意義是在數學課堂中，建立資料是由個別或小組學生自己造出；緊接著是由個體觀察資料以尋求規律性，並提出猜想；再藉由小組或全班共同檢驗猜想的正確性；及以不同的例子驗證猜想的合理性的遞迴歷程。

有關數學臆測的重要性，本節依據文獻探討結果將其整理分析由三個觀點論述其重要性：(一)從數學知識本質的觀點；(二)從數學解題過程的觀點；(三)從數學學習的觀點。從數學臆測在數學知識形成所扮演的重要性，早在Polya (1968)在*Mathematics and Plausible Reasoning*一書中提出數學知識的發展是數學猜想合理化的過程。又於1962年在*Mathematics Discovery*一書提出數學知識是在「臆測—證明—發現」一連串歷程中不斷循環中產生的，並建議教師應以此歷程引導學生的數學學習。隨後，數學哲學家Lakatos (1976)受到Popper探索式思維模式以及Polya啟發式解題的影響，提出「證明分析」理論，主張數學活動是猜測、證明、舉反例、利用反例再次檢驗猜想和證明的循環歷程。Lakatos提出數學知識的產生需要經過猜測—檢驗—反駁—再猜測—再檢驗—證明的遞迴歷程，這是一個數學臆測的歷程，其中證明是運用數學定義、定理、或性質對原猜想加以驗證，而反駁是用反例來推翻原猜想，所以反駁是啟動對原猜想改進的原動力。數學知識在不斷地驗證與反駁的修正過程中，在修改的歷程中數學論證即會產生，因而使得所提出的猜想內容朝向更精煉更穩固的結論。

數學臆測在數學解題過程所扮演的重要性，Mason等(1985)從Polya (1957)解決問題的觀點提出數學臆測的角色，將數學臆測視為數學解題的過程中的一個環節，數學臆測發生在解決問題的前兩個階段(進入階段及進攻階段)之間；他們更進一步提出數學臆測

的歷程分為四個階段：說出猜想(articulate a conjecture)、檢驗猜想(check the conjecture)、不信任猜想(distrust the conjecture)、和獲得感覺(get sense of)；其中不信任猜想是嘗試找反例來推翻原猜想；而獲得感覺是指為何這個猜想是對的，嘗試用不同的例子來修正此原猜想。

數學臆測在數學學習所扮演的重要性，林福來在執行「數學臆測活動的設計、教學與評量」整合型研究計畫的主張是：數學臆測活動位於概念化、有目標的程序運作、問題解決以及論證等活動的中樞(centre & pivot)，並提供通往這些活動的啟動力(driving force)，這個研究計畫是要達成數學臆測活動的目標，包含發展數學的五股素養「概念的瞭解」(conceptual understanding)、「程序的流暢」(procedural fluency)、「策略的運用」(strategic competence)、「適性的推理」(adaptive reasoning)、「建設性的傾向」(productive disposition；林福來，2010)，所以，數學臆測活動不僅能建立數學概念而且是啟動論證的啟動力。

二、數學臆測類型及歷程

數學臆測是一種從提出猜想到證明猜想的循環歷程，而每個個體面對相同的任務所進行臆測歷程不同，即使相同的個體面對不同的任務所進行的臆測歷程也會有所不同。有關形成臆測的歷程，Cañadas等(2007)提出五種類型：從有限例歸納(empirical induction from a finite number of discrete cases)；從動態例歸納(empirical induction from dynamic cases)；類比(analogy)；及溯因推理(abduction)；和知覺為基礎的臆測(perceptually based conjecturing)。Cañadas與Castro (2005)又將每一種類型細分成數個階

段，例如以學生最常使用的從有限例歸納進行臆測的臆測類型為例，需要經歷七個階段：(1)觀察有限例，(2)組織有限例，(3)尋找規律或樣式，(4)形成猜想，(5)檢驗猜想，(6)將猜想一般化，及(7)證明猜想的一般化。也就是，個體在面對任務時，第(1)階段需要從所給定的一個或兩個有限例子開始進行觀察；第(2)階段用有系統地列舉法或使用表格將這些例子組織起來。第(3)階段從組織的資料中尋找規律性，使所發現的規律也可以適用在其他沒有列出來的例子中。第(4)階段是形成猜想，是依據所發現的規律提出猜想，使得此猜想能適用在所有可能的例子中，但是仍然在存疑或不確定的狀態中。第(5)階段是檢驗猜想，再檢驗更多其他不同例子或不同方法看看是否此猜想正確，但此時所提出的猜想還未推廣到一般化。第(6)階段是將所提出的猜想推廣到一般化，這個階段的猜想是要排除存疑或不確定的情況，使猜想成為可接受的數學性質。第(7)階段是要證明猜想的一般化，這個階段是要用合理的數學知識來解釋或證明此猜想，以取信他人。

由於本研究的目的是要透過數學臆測來引動學生的數學論證發生，所以Cañadas與Castro (2005)所提出的從有限例歸納進行臆測的臆測類型及臆測歷程，將作為本研究用來協助教師設計臆測任務設計的基本要素，並將數學臆測融入於數學課堂教學中，以發展學生的數學論證。並非所有的數學任務都能導向數學臆測，又由於本文數學臆測任務使用的對象是三年級學生，他們是第一次接觸數學臆測教學活動，而且他們的數學知識體發展還不夠豐富，因此教師在設計該任務的考量上，並不考慮納入最後兩個階段：將猜想一般化及證明猜想的一般化。

三、發展數學臆測的任務設計原則

學生的學習會因數學任務的不同而有所不同，數學任務對數學教學品質扮演極為重要的角色(Stein & Lane, 1996)。然而，並非所有任務都能通往數學臆測，又由於本研究的目的是將數學臆測融入於數學課堂教學中，以引動學生的數學論證，因此選擇及設計適當的數學臆測任務在本研究顯得格外重要。

本研究數學臆測活動任務設計的理論基礎，除了基於上一節Cañadas與Castro (2005)從有限例進行歸納的臆測類型之七個臆測歷程之外，也依據Lin等(2012)的數學臆測活動四個設計原則。本研究採用Lin等的四個設計原則，主要是因為這些原則能發展Johnston-Wilder與Mason (2004)在*Fundamental Constructs in Mathematics Education*一書中指出的五種核心數學思維：區辨相似性與差異性、連結概念與定理心像、一般化與抽象化、一般化與特殊化、臆測與取信，而臆測與取信證是本研究的核心概念。原則一是教師需要提供機會讓學生進行目標導向的觀察以促成數學臆測，「觀察」設計原則是教師需要提供機會讓學生進行有目的地或有系統地觀察有限例，以幫助學生能將發現的數學關係推廣到一般化。原則二是教師需要提供機會讓學生進行有意義的建構以促成數學臆測，「建構」設計原則是教師需要鼓勵學生依據能通往臆測的先備知識建構新知識。原則三是教師需要提供機會讓學生進行先備知識的轉換以促成數學臆測，「轉換」設計原則是教師需要提供機會讓學生進行算則或公式的轉換，以產生數學臆測；原則四是教師需要提供機會讓學生進行反思以促成數學臆測，由於學生在轉換的過程中，可能導致不正確或無意義的敘述或猜想，因此「反思」的設計原則是必要的。

從以上分析，Lin等(2012)的第一「觀察」設計原則相當於對應到Cañadas與Castro (2005)的前三個階段：觀察有限例、組織有限例、及尋找規律或樣式，他們都共同指出任務本身需要提供機會讓學生觀察、組織有限例及發現數學關係。Lin等的第二「建構」設計原則，沒有在Cañadas與Castro的臆測歷程階段被強調，但它是在臆測歷程中必然發生的，因為在觀察資料到發現數學關係之過程中，學生所發現的數學關係將成為新知識的建立，它必須建立在先備知識的基礎之上，因此第二「建構」設計原則也是本研究設計臆測任務依據的原則之一。Lin等的第三「轉換」和第四「反思」設計原則分別相當於對應到Cañadas與Castro的第(4)和第(5)階段：形成猜想及檢驗猜想。學生可能從前一階段觀察的有限例中所發現的關係，在轉換過程中可能會形成錯誤的猜想，因此數學臆測任務本身需要提供機會讓學生檢驗猜想的正確性。Cañadas與Castro提出的最後兩個階段強調將猜想一般化及證明猜想的一般化，但沒有包含在Lin等的四個設計原則中；猜想一般化及證明猜想的一般化的功能在於效化猜想的一般性及嚴謹性，由於本研究的目的是要發展學生的數學論證，論證需要效化及一般化，因此Cañadas與Castro提出的最後兩個階段「將猜想一般化」及「證明猜想的一般化」也是本研究協助教師設計數學臆測任務考量的原則。然而，證明猜想的一般化學生需要較豐富較完備的數學知識來判斷該猜想是否可接受，因此需要考量學生的背景與經驗，最後兩個階段是否納入於數學臆測任務設計的考量中，完全是由參與於本研究的教師來決定。

四、數學論證的意義及內涵

依偉氏字典定義，論證(argumentation)是一些邏輯相關的論述(argument)。Toulmin (1958)將論證解釋為從已知資料推演到結論的過程中，是用來支持結論的證據，這些證據可能是一些推理規則或數學原理或定理，但不一定是演繹的。有些學者將數學論證分為兩個層面：論證的過程及論證的成果(Douek, 1999; Krummheuer, 2007)。論證的過程是產生一個邏輯相關的對話過程，而論證的成果是討論過程所產生的論述，而說出或寫下的敘述，此處邏輯相關可能是歸納，也可能是演繹、類比、或溯因(abduction)或其他推理。雖然數學論證的定義各學者之間有不同的說法，但其共通點是：論證是支持或反對一個命題或意見的理由，它可以是語言文字、數字資料或圖畫的形式。數學論證活動涉及到證明與反駁的過程，對發展學生的數學思維具有重要意義。本研究所界定的數學論證是在課堂中進行數學臆測教學活動脈絡下產生的，故它是數學臆測的一部分，數學論證在本研究定義為從建立資料、建立證據作為形成論述或檢驗論述的證據或依據，以支持結論的過程。

在數學教育的研究經常將論證和證明連結在一起，Douek (1999)將證明視為是論證的一種。Krummheuer (2007)認為證明通常是屬於個人的數學活動，但數學論證是一種社會化的過程，所以論證不被視為是用來促成或阻礙證明的學習，而是被視為數學學習的本質。有關論證活動的發展，Douek和其同事將其分為六個階段：進行猜測、形成敘述、效化(validating)猜想、將前後連貫具有理論性的論述串成一個演繹鍊(chain)、將這些論述鍊組織成一個可接受的證明、最後是朝向形式化的證明(Boero, Douek, & Grauti, 2003)。

依據Boero等提出論證活動發展的階段，論證的產生也是始於臆測活動，似乎也將論證視為是社會化的過程，是數學活動的一部分，包含形式化的證明。基於此，本研究將數學論證視為是一種社會化過程，若要發展學生的數學論證，需要教師在課堂中製造讓學生和教師的互動機會，而且藉著課堂中的論證分析來瞭解學生的論證歷程，來協助教師進行證明或推理的教學(Reid & Knipping, 2010)。

依據上述Cañadas與Castro (2005)所提出的從有限例歸納的數學臆測類型中的七個階段，數學臆測與數學論證存在著密切的關係，數學論證發生在數學臆測的歷程中，故數學論證成為是數學臆測歷程的產物。數學臆測與數學論證兩者所存在的關係為：(一)數學臆測的第(1)、(2)階段分別是在建立數學論證的基本元素——「建立資料」及「建立證據」，這兩個元素是為形成論述及檢驗論述而作準備的。(二)數學臆測的第(3)、(4)階段分別是發現關係及形成猜想，引動了數學論證中「形成論述」的元素。(三)數學臆測的第(5)、(6)、(7)階段牽引出數學論證的「提出論證依據」及「提出結論」兩個元素。數學臆測第(5)、(6)、(7)階段分別是檢驗猜想、驗證猜想、證明猜想都牽動了數學論證，影響數學論證的品質，因為檢驗猜想是依據建立的資料說服他人相信自己的論述，而驗證猜想是找其他例子來支持自己提出的論述，此時反駁可能在這當中發生；反之，若是提出的論述得到更多例子的支持，則增加了此論述的可信度。數學臆測的最後階段是要證明猜想的一般化，引動了數學論證元素中的「提出結論」，證明是再進一步效化剛驗證過的論述，因此經過證明後的結論不僅成為是公共的而且是嚴謹的數學知識或數學性質。

五、數學論證的品質

既然學生的數學論證需要培養，使其發展，究竟數學論證在不同發展階段的學習內涵為何？數學臆測從提出猜想到驗證猜想的歷程中，帶動數學論證發生，數學論證是為了取信他人，所以數學論證是數學臆測的一部分。若依據Mason等(1985)將論證依取信程度分成三個層次：取信自己(視覺、直觀)、取信朋友(舉例說明、操作)、取信敵人(解析、形式論述)；也就是論證內涵或方式會有不同層次的區別，舉例說明或以操作來證明的嚴謹性程度不如用解析或形式化論述的證明方式，但仍然是一種證明。這樣的論點也同樣和其他學者的主張一樣(如Balacheff, 1988; Stylianides, 2007)。

Balacheff (1988)對論證提出四個層次(hierarchy)以做為判斷學生在論證發展上的差異。層次1為原始試驗(naive empiricism)，學生可以在試驗幾個例子之後，說服他人自己所提出的猜想是對的；層次2是關鍵實驗(the crucial experiment)，學生能用特殊或極端例子來描述結論，也就是將層次1所形成的一般化進行檢驗；層次3是通用例子(the generic example)，利用例子處理所有性質相似的概念；層次4思考實驗(the thought experiment)是利用性質來證明，而不僅是概念操作的結果。今以一個例子來說明學生的數學論證在這四個層次的不同意涵，若要論證「若一個數每位數字和是9的倍數，則這個數是9的倍數」敘述為真，層次1的學生，是利用一、二個例子試驗看看，如1,987的四個數字和是 $1 + 9 + 8 + 7 = 25$ ，這個數不能被9整除，所以這個數不是9的倍數。2,007的四個數字和是 $2 + 0 + 0 + 7 = 9$ ，可以被9整除，所以這個數是9的倍數。在層次2的學生，論證方式是利用特殊或極端的例子試驗，如

200,000,000,007的數字和是 $2 + 7 = 9$ ，可以被9整除，所以這個數是9的倍數。在層次3的學生，是利用通例來說明，如 $1,987 = 1 \times 1,000 + 9 \times 100 + 8 \times 10 + 7 \times 1 = 1 \times (999 + 1) + 9 \times (99 + 1) + 8 \times (9 + 1) + 7 \times 1 = 1 \times 999 + 9 \times 99 + 8 \times 9 + (1 + 9 + 8 + 7)$ ，只要這個數的所有數字和 $(1 + 9 + 8 + 7)$ 能被9整除，該數就是9的倍數。在層次4的學生，是利用代數式來證明，如一個四位數 $abcd = a \times 1,000 + b \times 100 + c \times 10 + d \times 1 = a \times (999 + 1) + b \times (99 + 1) + c \times (9 + 1) + d \times 1 = a \times 999 + b \times 99 + c \times 9 + (a + b + c + d)$ ，只要這個數的所有數字和 $(a + b + c + d)$ 能被9整除，該數就是9的倍數。

Stylianides (2007)提出證明就是一種論證，論證包含三個元素：一組敘述、論證方法(演繹法、數學歸納法、舉反例等)、及論證的表徵。他特別從數學本質觀點和學生學習觀點對數學證明的意義提出不同的要求：若從數學本質觀點，講求的是數學嚴謹性，因此認為數學敘述必須是真確的(true)，數學嚴密的證明所採用的論證方法必須是有效的(valid)、數學論證的表徵必須是適當的(appropriate)；若從學生學習觀點，他認為數學敘述是可接受的(accepted)，數學論證是社群下的論證方法是可接受的，數學論證的表徵是可利用的(accessible)，所以採用比較寬鬆的標準來詮釋數學論證。

基於以上的分析，論證依據嚴謹程度而有不同品質的區分，這樣的論點作為本研究提出主張「國小階段培養學生數學論證的可能性」的依據，本研究是從學習者的觀點，來探討學生所展現的數學論證內涵及數學論證特性：否則，若採取數學本質的觀點，國小階段學生學習的數學知識不夠複雜，也尚未發展健全完整，無法達到如數學家只接受形式化的演繹邏輯證明，即會認為國小階段無法進行有關論證的教學。

六、數學論證的分析架構

數學課堂中的論證分析最近逐漸引起數學教育研究者的關注(Knipping, 2003; Krummheuer, 2007; Pedemonte, 2007)。Knipping與Reid (2013) 認為數學課堂中的論證不能用形式化邏輯來分析，因為教師在教證明時並不是遵循形式化證明教給學生，而是讓學生用自然的語言取代形式化語言來溝通想法，用學生社群間可接受的證明方法，在此情況下，會出現一些不甚嚴謹的論證，若用形式化邏輯來分析，課堂中學生的論證常會被數學家認為是不合乎邏輯的；然而，學生使用這些不甚嚴謹的論證，將有助於學生發展日後的數學思維。總而言之，他們的主張是若用形式化證明來分析課堂中學生的論證，反而阻礙了學生論證的發展(Knipping & Reid, 2013)。

是故，許多研究者分析課堂中的論證，大都採用Toulmin (1958)的「D-W-C」論證模式當作分析架構，如圖1 (陳英娥，2002；Knipping, 2003; Krummheuer, 1995; Pedemonte, 2007)。D-W-C表示資料數據(data)、推論依據或證據(warrant)、及結論(conclusion)是論證的三個基本元素，除此之外，有時論證會包含理論支柱(backing)、反駁(refutation)、合格者(qualifier)。合格者是指在什麼特別的條件下結論為成立。這個模式是說明學生會提出許

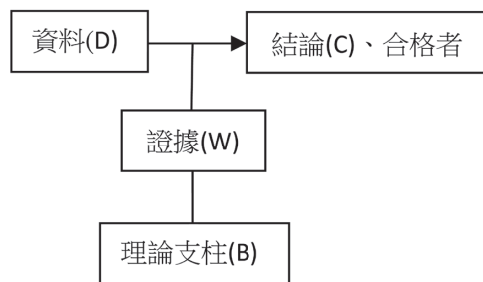


圖1：Toulmin的論證模式

多證據來捍衛結論，而當證據被質疑時，就會利用理論支柱來做解釋。

Toulmin (1958)對推論依據和理論支柱做了區別，理論支柱是獨立於該論述之外，早就存在的，是大家都接受的知識，它是不證自明的，是用來佐證證據的；而推論依據是從已知資料得到結論的證據。Toulmin也承認資料和推論依據有時也難以區分，但兩者的角色確是不同的，資料是在傳達一筆資訊，而推論依據是在論述中的一個步驟；假如資料需要支持，那麼結論的一個論述可能因而得以發展；假如推論依據還不確定時，則需要藉由理論支柱來支持。依據Toulmin的說法，一個論證若不具備所有這些元素，即被視為是不完備的。

不同學科經常用Toulmin (1958)的論證架構來分析學生的論證，如在數學教育，陳英娥(2002)以這個模式作為國二學生乘法公式數學論證的分析架構，她以這個架構來判準國中學生論證是否完備，所以將分析的焦點放在作業單上及在課堂教學上的比較，分析學生分別出現了多少論證元素，她認為這個分析架構不見得適合用來分析學生的論證過程，特別聲明難以用來捕捉學生集體發展的動態過程。隨後，陳英娥的建議被德國數學教育研究者推翻，Knipping與她的同事在最近幾年來也以Toulmin的論證模式為基礎，他們觀察德國、法國、加拿大國中課堂有關畢氏定理的教學(Knipping, 2003, 2008; Knipping & Reid, 2013; Reid & Knipping, 2010)，分析並繪製出不同數學課堂中師生交互論證的局部(local)或整體(global)的論證結構圖。他們分析在數學課堂中逐步從資料到結論的論證歷程，分析集體學生每一個交互論證的推理歷程，而一個歷程中產生的結論能成為下一個歷程的資料，將所形成的不同局部論證互

相串聯後，成為論證流(Argumentation Stream, AS)，當這些論證流以複雜交織的方式呈現時，便形成了課堂中的集體論證結構。

Reid與Knipping (2010)依據國中生在不同數學課堂中展現的不同數學論證，而繪出四種不同的結構圖：泉源結構(source-structure)、水壩結構(reservoir-structure)、螺旋結構(spiral-structure)及聚集結構(gathering-structure)。泉源結構的特徵是在一開始學生提出有多個平行的論述但在結尾處收斂為一個結論，這些平行論述都是用來支持相同的結論。水壩結構與泉源結構最明顯的區別在於水壩結構中的一個邏輯論證推理有時後會出現折回，然後再前進，它異於泉源結構是一串連的演繹論述。螺旋結構和泉源結構最大的不同在於多個平行論述所在的位置，螺旋結構的多個平行論述是出現在論證結構的末端，而泉源結構是出現在論證結構的開端。聚集結構不同於水壩結構，在於聚集結構圖包含了反駁元素，但推理不會發生折回的情形。

今以泉源結構圖作說明，Knipping和她的同事觀察德國國中一個有關畢氏定理的教學課堂，圖2是教師呈現在黑板上的圖形。Reid與Knipping (2010)將課堂中學生的論證以結構圖呈現，如圖3。

AS-1與AS-2是同一結論的平行論述，得到的暫時性結論是外面正方形的邊長為 c 。AS-1是國中生根據內部的四邊形為正方形進行論述所畫出來的局部論證流；AS-2是根據外面的四個三角形所畫出來的局部論證流；AS-3是一位學生假設內部正方形的面積是 b^2 ，因此提出外部正方形的面積是 c^2 的暫時性結論之局部論證流，教師隨即用圖2的直觀，反駁了該學生的猜想。隨後教師開始帶領全班論述內部正方形的邊長是 $b - a$ ，所以

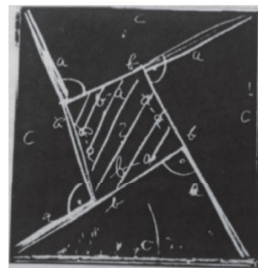


圖2：畢氏定理證明的圖形

資料來源：Proof in mathematics education: Research, learning, and teaching (p. 184), by D. A. Reid & C. Knipping, 2010, Rotterdam, The Netherlands: Sense.

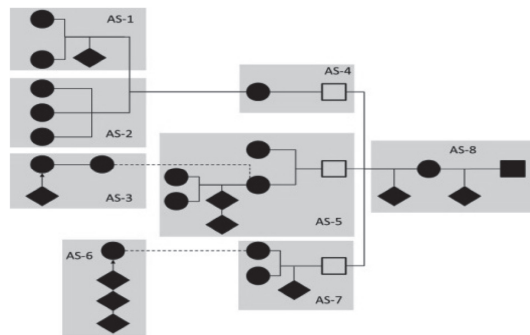


圖3：泉源結構之範例

資料來源：Proof in mathematics education: Research, learning, and teaching. (p. 184), by D. A. Reid & C. Knipping, 2010, Rotterdam, The Netherlands: Sense.

內部正方形的面積為 $(b - a)^2$ ，而為接下來的論述提供了資料， c^2 包含了一個邊長為 $b-a$ 的正方形及四個全等直角三角形的面積，教師將算式寫在黑板上： $C^2 = (b - a)^2 + b^2$ 在AS-5局部論證流。接著另一位學生提出了另一個猜想：其中的兩個三角形能形成正方形；教師藉由讓全班拼三角形來反駁她，但教師也鼓勵該學生，這個反駁提供了情境來討論兩個三角形應該是形成長方形，而形成論證流AS-7。在泉源結構的論證過程中，論述和想法源自於多個源頭，就像泉水從多個源頭湧

出一樣，討論不同的猜想與論述，錯誤的猜想雖然最終被反駁，但是對論證亦有貢獻。從圖3的論證結構圖顯示出，泉源結構具有四個特徵：(一)有脫勾的論證流；(二)有多個平行論述通往同一結論；(三)有多個暫時性結論；(四)論證歷程出現反駁。

這些論證結構圖不僅顯示出學生論證內涵及論證歷程(林碧珍、馮博凱, 2013)，瞭解學生如何瞭解證明，而且能當成是教師教證明的一種工具，以讓教師瞭解有不同的方法來教證明(Reid & Knipping, 2010)。所以本研究將以Toulmin的論證模式為基礎，並參考Reid與Knipping的論證結構圖來分析一個數學課室中融入數學臆測活動於教學中學生所展現的集體論證歷程。

七、有關數學臆測與論證的相關研究

有關學生的論證研究，早期用來分析論證的資料大都來自於抽離出數學課堂外由研究者設計任務訪談學生(林福來, 2003；陳英娥、林福來, 1998；Healy & Hoyles, 1998)；近些年來，有一部分論證分析的資料是來自於數學教學課堂中的教學(陳英娥, 2002；Knipping, 2008；Pedemonte, 2007)。陳英娥研究國二學生有關乘法公式在紙筆測驗上的論證情形及然後在教室中數學論證活動兩種不同情境比較學生的論證表現，她以Toulmin (1958)的「D-W-C」論證模式分析學生出現資料數據、推論依據、理論支柱、及結論四個論證元素的使用，發現學生在數學課堂中所得到的論證經驗比紙筆測驗所提供的較為多元、充分、及完備。她更進一步提醒教師在論證活動的概念化過程中要發揮功效，教師需要介入，而且要在不同時機點發揮不同的角色，諸如：為了能聚焦在概念化過程的關鍵點，教師需要提供適當的任務。

林福來(2003)進行全國性調查，瞭解我國中學生的在幾何單元的論證表現，結果發現論證在證明(論證命題為真)及反駁(論證命題為偽)的過程中學生的論證表現，依品質分為四類：(一)直觀反應：此類學生僅對問題作直觀反應，還未進入到論證；(二)不當的論述：此類學生的論述不適當，是因為引用錯誤知識或論證方式不夠嚴密或一般化，諸如：測量、切割拼湊、舉單一特例、舉多例歸納；(三)不完備的論證：此類學生論述沒有知識或邏輯上的錯誤，但不完整；不完備的論證僅包含關鍵元素的論述，但缺乏推得結論的步驟；(四)可接受的論證：此類的學生，每個推論步驟都能正確地引用性質，在反駁論證中包含了舉例反駁，及動態解析的反駁。他們更進一步發現國中學生在證明和反駁兩方面論證品質表現不同。

Healy與Hoyles (1998)以考試可以得最高分以及自己作此題論證的想法的不同情境需求，研究發現：英國學生採用的論證方式包含五種：形式化的(formal)、說明式的(narrative)、舉例的(enactive)、視覺的(visual)、經驗式的(empirical)。林福來(2003)採用類似的研究工具在臺灣施測國中學生，發現臺灣學生也使用五種論證方式：嚴密的形式演繹、擬形式化(循環論證)、說明式、直觀式(用特例檢驗)、操作式(測量、截補)等五種形式。以上這些研究有關學生的論證品質不是使用較具結構性的分析架構來分析。

近幾年來，數學臆測的研究在國中階段研究相當多，諸如林福來的整合型計畫「數學臆測活動的設計、教學與評量」研究群(林福來, 2010)。秦爾聰指導研究生將數學臆測活動融入國、高中不同單元的教學，但這些臆測任務不是常態性的融入於正常教學中(秦爾聰、劉致演、楊讚文, 2010；秦爾聰、

賴紀寧，2010；秦爾聰、簡大維、李立凱，2010；蔡永林、秦爾聰，2009)；而在小學階段，蔡文煥研究數學課室內數學推理規範的形成(蔡文煥，2010)，但是他們並非從數學臆測任務設計的鋪陳，來探究國小學生的數學論證。

基於以上探討，國內在小學階段有關數學臆測融入常態性的數學課堂中，以發展學生的數學論證的研究，相對於國外及國中階段的研究，顯得甚為不足。因此，本研究的研究問題為：將數學臆測活動融入三年級數學教學，探討學生所展現的集體數學論證歷程為何？

參、研究方法

數學課堂中發生的事件是一個不斷改變的複雜歷程，本研究目的在數學臆測教學中觀察個別學生、小組學生、或全班師生互動中展開論證內容及變化歷程，而質的研究法，是可以瞭解教室中師生不斷地討論互動產生的變化，所以本研究採用質性研究法，觀察一個數學課室。

一、研究對象及研究情境

菁菁老師教學年資23年，是參與「國小在職教師設計數學臆測活動的專業成長研究」數學國科會研究計畫中的一位教師，菁菁老師及班上24位三年級學生是主要研究對象；學生的家長社經水準不高。菁菁老師將數學臆測融入數學教學中已有二年的經驗，她嘗試將數學臆測活動配合教科書的教學目標常態性地融入到教學單元，以發展學生的數學論證；在過去兩年設計的臆測任務大都屬於由學生判斷錯誤命題的類型，第三年菁菁老師嘗試配合教學單元內容設計不同以往

的任務類型——臆測未知結果，融入於數學教學中。

菁菁老師為了達成這個目標，將數學教室經營為學生對話的討論社群，課堂中學生接受的想法是經過學生間的相互辯證、論述、推理達成的共識，而不是決定於教師的權威。為了創造出數學課堂中充滿著學生的臆測和論證聲音，菁菁老師將全班學生先依據身高分成每4人為一組，再考量每組中必須要有能發表想法的學生，而作適當地調配，故調配後的分組傾向於異質性分組，全班共分為6組。該校學生從二年級進入三年級時全年級重新依據成績的S型編班，因此該班學生的程度與其他班級學生一樣是常態性分布。雖然該班學生從未經驗數學臆測活動，但是菁菁老師對數學臆測教學不陌生。

菁菁老師融入數學臆測活動於教學中的一節課堂教學流程，通常是先採個人解題，是為了讓學生造個別例子、從觀察例子中提出個人猜想；接著，進行組內成員分享，組內分享的目的是互相檢驗個別例子和個別猜想正確與否，並提出小組公認的猜想。最後階段是全班討論，目的是製造相互驗證各組公認猜想的機會，並提出全班公認的猜想。當出現了全班公認猜想後，老師繼續將猜想推廣到一般化，再透過個人、小組、或全班遞迴的方式由學生進行論證。

參與本研究計畫的其他五位教師的數學課堂也都嘗試經營為充滿學生的臆測和論證，但本研究立意選取菁菁老師為樣本，是因為她的數學課堂是最適合來說明本研究目標的教學情境，理由有二：(一)因為至今小學數學教室中進行數學臆測和證明仍然罕見，本研究是為了探討小學生的臆測和論證如何培養，以提供其他教師發展臆測與論證未來教學的參考，所以我們在乎的是要呈現一個

成功融入臆測於教學的數學課室的樣貌而非一個典型的教學。(二)菁菁老師為發展學生論證所設計的臆測任務，常成為團隊中其他教師的參考範例，因為並非所有數學任務都能導向臆測，引發論證，而本研究是要探究數學臆測任務需具備哪些元素，始能引動三年級學生在課堂中展現數學臆測及數學論證的樣貌。

二、數學臆測任務

並非所有任務都能啟動數學臆測，不同的問題也會導向不同的臆測(Cañadas et al., 2007)，臆測任務類型及內容影響學生的論證品質(林碧珍、周欣怡，2013；林碧珍、馮博凱，2013；林碧珍、鍾雅芳，2013；陳英娥、林福來，1998)。所以本研究協助教師設計為能引發學生論證的數學臆測任務，是依循Lin等提出的四個臆測任務設計原則：(一)

觀察、(二)建構、(三)轉換、(四)反思的機會(Lin et al., 2012)。

本研究協助教師設計數學臆測任務的歷程為：首先教學者需要分析教材、提出教材中可融入臆測活動來建立數學概念或性質、教學者試擬臆測任務、提報試擬的任務到專業對話團體討論會進行討論並修正、實踐臆測任務於教學中、再修正。我們嘗試依據Cañadas與Castro (2005)的臆測七個階段來協助教師創造出具有數學臆測本質的任務，但這七個階段對有些任務並非一次可以到位，例如表1，是該班三年級學生第一次從事的數學臆測活動，菁菁老師考量三年級學生的經驗缺乏又數學知識不夠豐富，菁菁老師設計的臆測任務僅涉及前面五個階段，不涉及第六和第七個階段的猜想一般化及一般化猜想的證明。今以菁菁老師的三年級乘法單元七節課中的第五節課之一活動目標「使學生能

表1：菁菁老師設計「有關的0的乘法意義及性質」臆測任務

任務內容	Cañadas與Castro (2005) 臆測的七個階段	Lin等(2012)的臆測設計 四個原則
1.每組發下一個標示0 ~ 5的骰子(小白方塊)和一張記錄表(發下解題紙1)，每人丟兩次骰子，記錄並統計分數。		
2.小組進行擲骰子活動，並做紀錄。 (發下個人解題紙2)	<u>組織例子</u> 小組造例子並組織例子	<u>觀察</u> 提供機會讓學生造例子並觀察規律性
3.觀察小組的記錄表，你發現什麼數學想法？把你的發現寫下來，寫在個人解題紙上；並舉例說明你的發現。	<u>觀察例子、尋找規律、形成個人猜想</u> 觀察個別例子 尋找規律 形成個人猜想	<u>轉換和建構</u> 提供機會讓學生從觀察中利用先備經驗「乘法算式紀錄」並主動建構「任何數 $\times 0 = 0$ 」、「 $0 \times$ 任何數 $= 0$ 」的數學性質及0的乘法意義。
4.組內分享個人提出的猜想，並提出組內都認為合理的猜想	<u>效化小組猜想</u> 形成小組猜想 形成小組公認的猜想	<u>反思</u> 提供機會讓學生論證為什麼自己所提出的猜想是合理的
5.全班討論各組提出的猜想 (1)比較各組的想法並做分類。 (2)全班修正猜想。	<u>效化全班猜想</u> 形成全班公認的猜想	<u>建構</u> 提供機會讓學生從比較中學習不同的數學想法 <u>反思</u> 提供機會讓學生集體論辯合理的猜想

瞭解0的乘法意義及性質」為例，如表1，來說明任務內容對應到Cañadas與Castro的臆測階段及Lin等(2012)的臆測任務設計的四個原則之實際作法。

三、資料蒐集及資料分析

本研究蒐集資料的主要方法是教學觀察法，每次課堂教室都架設四部攝影機及四支錄音筆，一部是放在教室後面主拍全景，另外三部是當小組運作時隨時架設在三個小組旁。每支錄音筆主要是收錄各小組的聲音。錄影和錄音全由研究生和研究助理協助幫忙。當小組討論時，除了教學者之外，研究者和其他五位核心參與教師每人各分配坐在一組，詳實記錄學生如何說理、論辯，因為設備及人力限制因素，另外兩組的學生討論無法架設攝影機，但由兩位觀察者協助記錄詳實的討論。本研究蒐集的資料包括課堂中全班和小組的錄影及錄音的逐字稿、個別或各組學生解題紀錄的掃描、所有觀察者的詳實觀察記錄、教師的任務設計簡案、教師的數學日誌。本文僅利用部分資料來回答本研究問題。

本研究的資料分析主要依據Toulmin (1958)的論證結構為基礎，並參考Knipping的論證結構分析方法(Knipping, 2013; Reid & Knipping, 2010)。採用敘事(narrative)分析，將課堂中師生或生生對話的語料分析成許多小而完整的段落敘事，再結合起來成為一個集體的論證歷程的敘事，以呈現三年級數學課堂中建立「0的乘法性質」的論證歷程原貌。本研究為提高資料分析的效度，課堂中師生的原案語料分析經過三個階段而繪製出論證歷程結構圖。此三個資料分析階段為：

(1)重構課堂中對話的順序與意義：以這節課中第二組學生(7, 8, 14, 19號)的論證歷程意義化舉例如下：

>所有的被乘數只要是1就不會增加[以論述 S_1 表示]，舉例 $1 \times 1 = 1$ ； $1 \times 2 = 2$ ； $1 \times 3 = 3$ (7號提出) [以證據 W_1, W_2, W_3 表示]

>老師問哪裡有被乘數？[教師第1次介入以 T_1 表示]

>7號說 1×1 ，積就是1

>老師說：「乘數和被乘數應該寫反了」，7號修正為 $1 \times 1 = 1$ 、 $2 \times 1 = 2$ 、 $3 \times 1 = 3$ ，[教師反駁以 R_1 表示，而維持7號學生的原猜想或論述 S_1]

>再給兩個例子： $4 \times 1 = 4$ ， $8 \times 1 = 8$ (14號) [以證據 W_4, W_5 表示]

>老師問學生：不會增加，那是跟什麼一樣？[教師第2次介入以 T_2 表示]

>學生：被乘數

>只要被乘數是1就會是本來的數字(19號的想法)

>老師：任何數乘以1，都會跟被乘數一樣。(教學觀察，第二組)

(2)分析論述與論證結構：先建構各局部的論證以形成論證流，再建構出整體的論證結構。將上述第二組的論述意義化後，組織成局部的論證流(AS1)，如圖4。

由於學生提出的原始猜想或論述(S_1 ；所有的被乘數只要是1就不會增加)透過老師兩次的介入(T_1, T_2)，將此論述「所有的被乘數只要是1就不會增加」修改為更精確的語言「只要被乘數是1就會是本來的數字」，因為其數學性質是一樣，所以此論述是學生提出的一個暫時性結論。特別注意的是 S_i 表示學生提出論述(statements)類別而非學生別的代碼(students)。

(3)比較各局部的論證想法的不同：以第二組所形成的局部論證背後的想法為例說明如下：

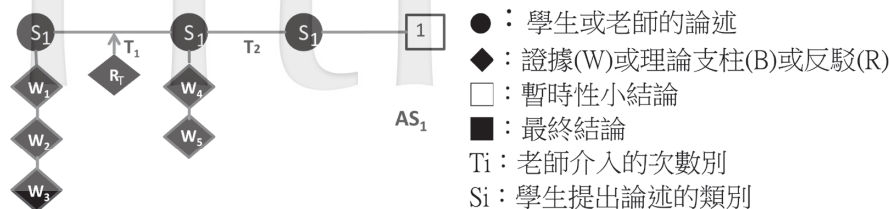


圖4：局部論證流AS1

課堂中第二學生的論證歷程形成一個局部的論證流，該組一位學生先提出一個論述(S_1)：「所有乘數只要是1，都不會增加。」並提出三個證據(W)： $1 \times 1 = 1$ 、 $1 \times 2 = 2$ 、 $1 \times 3 = 3$ 來支持想法，遭到老師反駁(R_T)：「乘數和被乘數應該寫反了」。因此該組學生將提供的證據修正為 $1 \times 1 = 1$ 、 $2 \times 1 = 2$ 、 $3 \times 1 = 3$ ，並補充兩個證據(W)： $4 \times 1 = 4$ 、 $8 \times 1 = 8$ ，維持原論述(S_1)。接著，老師第二次介入(T_2)問學生：不會增加，那是跟什麼一樣。學生回答被乘數(S_1)後，得到暫時結論1：「所有乘數只要是1，就會和本來的數字一樣。」

本研究為提升資料分析的信度，由兩位研究生一起針對一個課堂的語料先進行前述第一和第二階段共同討論協商分析，再由研究者依據語料對照結構圖檢視，並進行第三階段的分析。諸如：在Knipping與Reid (2013)的論證結構圖沒有呈現教師的介入，但我們認為三年級學生的論證並非都是有效，論述的數學語言並非都是精確的，常需要教師的介入，為了能瞭解教師介入的時機及介入內容，是詢問或追問或反駁，因此，在本研究的論證結構中將增加教師的介入，以符號(T_i)表示，若只是單純的教師提問或追問則以(T_i)表示，若教師的介入是直接反駁學生的說法，則影響學生論證，那麼此時教師的介入，則以實心圓形Ⓢ表示。

肆、研究結果與討論

本節結果將依據學生在臆測活動中每個階段進行的論證來呈現，來說明三年級學生在該任務下形成數學論證的歷程。本節依循菁菁老師在課堂中為學生鋪陳的臆測活動歷程來呈現，菁菁老師為學生鋪陳的數學臆測活動的五個歷程為：個別學生造例子、彙整組內例子、提出個人猜想、提出小組公認猜想、提出全班公認的猜想。第一步驟是個別學生造例子，旨在提供學生製造從單一個別例(形成論證的第一步——建立資料)；第二步驟是彙整組內例子，是在提供學生彙整從單一個別例到多個例子的機會(形成論證的第二步——建立證據)，以作為後面三個步驟學生提出論述及進行論證時需要的推論依據；第三步驟是觀察資料、尋求規律性，並將發現的關係(形成論證的第三步——形成個人猜想或論述)，但因為個人依據第二步驟所建立的多個例子所觀察的關係，所提出的猜想可能是不正確或不合理的，因此需要透過組內成員的相互檢驗，此時需要利用第一、二階段所建立的資料作為立論依據來說服同組的他人相信自己的猜想，透過小組討論，提出小組成員都認同的猜想，因而形成論證的第四步驟——提出論證依據；第五步驟是從小組提出公認猜想進展到全班公認猜想，利用其他組造的例子來驗證是否各小組公認的猜想仍然合理，此時學生進行提出立論依據來效化各小組提出的原猜想的論證活動(形成論證

的第五步——提出結論)。後面三個步驟都有學生的論證發生，因為個人、或小組、或全班都要說服別人相信提出的猜想。有關數學臆測引發學生的數學論證的研究結果，以下將詳細說明。

一、形成論證第一步(建立資料)——個別學生造例子

學生造個別例子是為協助學生隨後形成論證而準備，是提出猜想的重要依據，學生製造出什麼樣的例子，將會引導至提出什麼樣的猜想。在這個臆測任務中，菁菁老師首先發給每組一個骰子(標示0~5)和一張記錄表，每人丟兩次骰子，請組內將結果記錄並統計分數。這是提供給學生自己造例子的機會，這個任務第一步驟使每位學生從投骰子的遊戲中都能夠造出例子，如圖5。

二、形成論證第二步(建立證據)——學生彙整並組織組內所有的有限例子

第二步是學生從小組中彙整更多的有限例子，也是為協助學生隨後形成論證而準備，這時學生所提出的猜想，因為受到同組其他人的檢驗，正確性會比第一步驟更高。

在整個任務中，菁菁老師提供機會讓組內每位學生將自己造出的例子填入每組一張的表格中，所以表格內的資料彙整組內學生造出的8個例子，圖5是全班六組學生彙整出的有限例。

學生從造例子到彙整整理成統計表，顯然這個任務提供了學生提取先備知識的機會，這些先備知識包括蒐集、紀錄、並整理骰子出現點數及次數的資料，學生使用了★、「正」、「○」、和數字等符號來記錄並整理資料；這個任務也提供了學生需要提取整數乘法算式記錄的先備知識，將每個點數及出現次數轉換為乘法算式，並算出結果。

從學生造例子的研究結果襯托出這個數學臆測任務的四個特色：(一)每一組的統計表中都出現了菁菁老師的意圖目標：「乘數是0的乘法算式」「被乘數是0的乘法算式」；而且出現「乘數是0的乘法算式」的次數比「被乘數是0的乘法算式」多。由此可見這個任務請每位學生投擲的次數為2次似乎是適當的；(二)投骰子情境很自然地引出了被乘數是0或

102年10月7日第1題三乙第(1)組(1,3,12,16)

點數	1點	2點	3點	4點	5點	6點
次數		1	1	2	2	2
用乘法算式記錄	$1 \times 0 = 0$	$2 \times 2 = 4$	$3 \times 1 = 3$	$4 \times 5 = 20$	$5 \times 0 = 0$	$6 \times 0 = 0$
總分	0	4	3	20	0	0

第1組

102年10月7日第1題三乙第(2)組(14,8,7,19)

點數	1點	2點	3點	4點	5點	6點
次數	★	★★	★	★★★★	★	★
用乘法算式記錄	$1 \times 1 = 1$	$2 \times 2 = 4$	$3 \times 3 = 9$	$4 \times 4 = 16$	$5 \times 5 = 25$	$6 \times 6 = 36$
總分	1	4	9	16	25	36

第2組

102年10月7日第1題三乙第(3)組(11,2,20,17)

點數	1點	2點	3點	4點	5點	6點
次數	1	2	1	1	1	1
用乘法算式記錄	$1 \times 1 = 1$	$2 \times 2 = 4$	$3 \times 3 = 9$	$4 \times 4 = 16$	$5 \times 5 = 25$	$6 \times 6 = 36$
總分	1	4	9	16	25	36

第3組

102年10月7日第1題三乙第(4)組(2,24,9,)

點數	1點	2點	3點	4點	5點	6點
次數	1	0	0	1	1	1
用乘法算式記錄	$1 \times 2 = 2$	$2 \times 0 = 0$	$3 \times 0 = 0$	$4 \times 2 = 8$	$5 \times 1 = 5$	$6 \times 1 = 6$
總分	2	0	0	8	5	6

第4組

102年10月7日第1題三乙第(5)組(6,4,22,21)

點數	1點	2點	3點	4點	5點	6點
次數	0	0	0	0	0	0
用乘法算式記錄	$1 \times 0 = 0$	$2 \times 2 = 4$	$3 \times 2 = 6$	$4 \times 2 = 8$	$5 \times 1 = 5$	$6 \times 1 = 6$
總分	0	4	6	8	5	6

第5組

102年10月7日第1題三乙第(6)組(5,15,12,18)

點數	1點	2點	3點	4點	5點	6點
次數	2	2	2	0	0	1
用乘法算式記錄	$1 \times 2 = 2$	$2 \times 2 = 4$	$3 \times 2 = 6$	$4 \times 0 = 0$	$5 \times 0 = 0$	$6 \times 1 = 6$
總分	2	4	6	0	0	6

第6組

圖5：各組投骰子出現的點數彙整的統計表

乘數是0的乘法算式，似乎比教科書出現或課堂中教師給的布題情境更為自然些許。(三)往昔在三年級的教科書一般沒有特別處理 $0 \times 0 = 0$ ，因為不容易解釋說明，但在這個任務中第一、二組學生的記錄中很自然產生了 $0 \times 0 = 0$ 的算式；(四)學生在執行這個任務的過程中，我們發現學生的錯誤紀錄沒有發生，學生對乘法記錄中單位量 \times 單位數的位置非常清楚，不會混用。

三、形成論證第三步(形成論述)——觀察更多例子、尋求規律、提出個人猜想、檢驗個人猜想

在臆測活動的探索中，進入形成論證的第三步，學生開始利用第二個步驟的資料提出猜想。在這個任務中，小組彙整了組內學生的有限例子，並呈現在統計表後，菁菁老師在任務中以「你發現什麼數學想法？把你的發現寫下來，寫在個人解題紙上」，來提供給學生**觀察**有限例的規律性並提出個人猜想的機會；並在任務中以「舉例說明你的發現」來提供給學生**檢驗**自己的猜想是否正確的機會。

此時菁菁老師為了讓學生尋求的規律性能將焦點與數學本質相關，但又考慮三年級學生所能瞭解的語言，因此在任務中以「你發現什麼數學想法？」來取代「你發現了什麼？」的問話，這個任務是菁菁老師提供給學生建構新知識的機會，研究發現：學生所**建構**的新知識是有關「0的乘法性質」和「1的乘法性質」，有關**建構**新知識詳細說明如表2。

將全班24位學生所提出的個人猜想類別，分成兩類：11位學生提出有關「0的乘法性質」和2位有關「1的乘法性質」，及11位提出其他不完整或非相關的猜想，整理如表2。學生提出的個別猜想，有下列的發現：

1. 三年級學生在提出猜想時，要表達一個數學性質所用的數學語言不夠精確也不夠完整，例如，23號只觀察到被乘數是0，而5、18號提出的猜想為「只要是0算出來也是0」並沒有說清楚到底是被乘數或乘數為0。7號提出的猜想為「所有的乘數只要是1，就不會增加。」沒有說清楚什麼不會增加，其實要表達的是「所有的乘數只要是1，結果會一樣。」
2. 學生有時面對臆測活動任務時所提出的猜想會超乎我們的預期，例如有2位學生提出猜想以「只要乘數是1就會是本來的數字」來說明「1的乘法性質」，雖然這不是菁菁老師的意圖目標，但其重要性也和0的乘法性質一樣重要。
3. 這個臆測任務讓三年級學生以適當的生活語言來意義化數學概念。例如11號提出的猜想為「只要是沒甩到的都是0，或是甩到0的，都是0。」前者是在說明 $a \times 0 = 0$ 中，=左邊的0表示乘數是0，其意義是指有點數沒有被擲到，而後者是在說明 $0 \times a = 0$ 中，=左邊的0表示被乘數是0，其意義是有擲到0的點數。

四、形成論證的第四步(提出論證依據)——從分享個人猜想到提出小組公認猜想

在臆測活動的探索中，進入形成論證的第四步，學生開始學習用第三步驟所提出的猜想並利用前面第一、二步驟的資料或其他證據來檢驗其合理性，學生的論證歷程在此階段發生了。菁菁老師考量學生所提出的個人猜想，有時無法確保都是合理的，所以提供機會讓學生進行組內個人猜想的分享，進行小組討論，而且要提出組內公認的猜想，這個任務提供了讓學反思的機會。由於篇幅

表2：學生提出的個人猜想類別

猜想類別／學生的論述			
0的乘法性質			
<p>只要是沒甩到的都是0，或 只要是0算出來也是0。</p> <p>是甩到0的都是0。</p> <p>102年10月7日第2題三乙(11)號(張廷緯)</p> <p>(1) 請問小明的說法，你覺得對嗎？請說明理由。</p> <p>我「所有」的「自然」、「整數」...等數相乘都是0。</p> <p>只要是沒甩到0者，就是是甩到0的者，是</p> <p>而0</p> <p>(2) 舉例說明你的論述</p> <p>如：5x0=0 0x1=0</p>		<p>只要是被乘數或乘數是0。 只要被乘數是0的積數也會是0。</p> <p>102年10月7日第2題三乙(5)號(羅志木)</p> <p>(1) 請問小明的說法，你覺得對嗎？請說明理由。</p> <p>我「所有」的「自然」、「整數」...等數相乘都是0。</p> <p>只要是被乘數或乘數是0，積數都是0。</p> <p>只要是被乘數或乘數是0，積數都是0。</p> <p>(2) 舉例說明你的論述</p> <p>如：0x1=0 1x0=0</p>	
1/1, 11/3, 4/5		5/6, 18/6, 8/2	
24/4, 14/2		23/4, 16/1, 12/6	
1的乘法性質			
<p>只要乘數是1就會是本來的數字</p> <p>102年10月7日第2題三乙(14)號(吳俊豪)</p> <p>(1) 請問小明的說法，你覺得對嗎？請說明理由。</p> <p>我「所有」的「自然」、「整數」...等數相乘都是1。</p> <p>只要乘數是1就會是本來的數字</p> <p>例如：5x1=5 1x1=1 答案都是本來的數字</p> <p>乘數</p>		<p>只要乘數是1就不會增加</p> <p>102年10月7日第2題三乙(7)號(楊博程)</p> <p>(1) 請問小明的說法，你覺得對嗎？請說明理由。</p> <p>我「所有」的「自然」、「整數」...等數相乘都是1。</p> <p>只要乘數是1就不會增加</p> <p>例如：5x1=5 1x1=1 答案都是本來的數字</p> <p>乘數</p>	
19/2		7/2	

註：座號／組別。

所限，今以作者所觀察的第三組為例，來說明該組學生從個人猜想如何形成小組公認的猜想。下面是第三組學生(2, 11, 17, 20)互動的原案(表3)。

(一)從個人猜想到形成小組公認猜想之論證歷程

從觀察發現，四位學生在分享自己的猜想時，都是將自己寫在解題紙上的文字照唸一次解題記錄，第三組學生提出的猜想分為三類：「只要是沒甩到的都是0，或是甩到0的都是0 (S_1)」、「所有的算式都是用乘法 (S_2)」、「所有的被乘數都是1、2、3、4、

5、0 (S_3)」但最後小組公認的猜想是採用11號學生的「只要是沒甩到的都是0，或是甩到0的都是0」。從三個個人猜想形成公認的猜想的歷程分析如下：

該組學生每人先輪流分享自己的想法，然後再逐一反駁不是很合理的個人猜想。當2號和17號都提出猜想是「所有的算式都是用乘法 (S_2)」(行106, 107)，隨即，被20號學生「以題目本來就用乘法阿 (W_2)」反駁(行108) (R_5)，同樣地，當20號提出猜想「所有的被乘數都是1、2、3、4、5、0 (S_3)」(行109)，也馬上被11號學生以「如果不是這個骰子的話，也有可能骰子是別的數阿 (W_3)」反駁(行

112, 113) (R_S)。到了這時候，只有11號學生的「只要是沒甩到的都是0，或是甩到0的都是0」沒有被反駁，而且17號學生用「因為不管什麼東西乘以0都是0(W_1)」來支持這個猜想(行114)。因為學生提出三個不相關聯的猜想，而只有 S_1 可以通往暫時性的結論，而 S_2 和 S_3 在過程中被學生互相反駁，故在結構圖中成為兩個孤立的局部論證流。今將學生論證的歷程以論證結構圖呈現，如圖6。

(二)小組形成公認猜想的局部論證結構

從結構圖發現，第三組四位學生產生了三類的個別猜想，經過小組論證後，只留下一個小組公認的猜想 S_1 「只要是沒甩到的都是0，或是甩到0的都是0」，並得到一個證據來支持(W)。其他兩個猜想 S_2 ， S_3 「所有的算式都是用乘法」和「所有的被乘數都是1、2、3、4、5、0」學生分別各提供了一個證據

表3：第三組學生(2, 11, 17, 20)互動的原案

行號	座號	原案
105	11號	我看到的是只要是沒有甩到的都是0，因為我們5點都沒有人甩到，這也是0阿。大家同意嗎？
106	17號	我看到的是所有的算式都是用乘法。
107	2號	我的是所有的算式都是用乘法。
108	20號	本來就用乘法阿。
109	20號	我看到所有的被乘數都是1、2、3、4、5、0。
110	2號	這個是1點就從這邊開始。[指從統計表左欄]
111	11號	如果不是這個骰子的話，也有可能骰子是別的數阿。
112	11號	有一點，因為如果不是用這顆骰子的話，說不定有6阿，就有超過阿。
113	11號	就是我的如果沒有甩到的，都是0，是沒錯。0乘以1也是0阿。
114	17號	因為不管什麼東西乘以0都是0。
115	11號	那些把那個[11號的解題]抄上來。
116	20號	老師本來就有規定所有的算式都要用乘法阿。
117	20號	我把xx[11號]的想法抄在這張上。[小組公認的猜想是11號的](教學觀察資料，第三組)

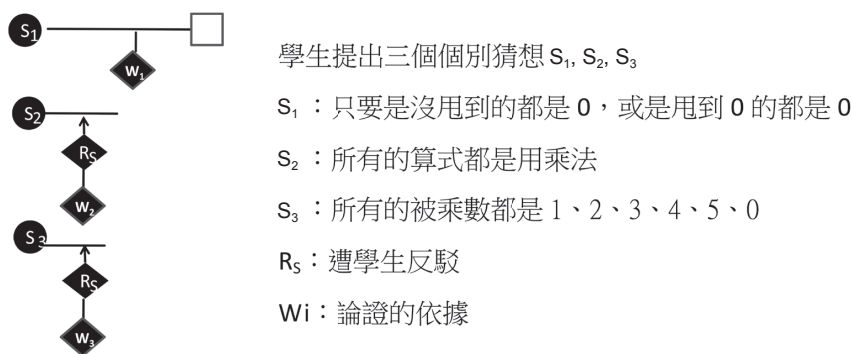


圖6：第三組學生從個別猜想形成小組公認猜想的歷程結構圖

(W)來反駁(Rs)，所以成為孤立的論證，無法與 S_1 並聯成論證流。

五、形成論證的第五步(提出結論) ——從小組公認的猜想到形成 全班公認的猜想

當學生完成第四步驟後，有時小組公認的猜想，並不能保證都是合理的或正確的，故還需要經過驗證，驗證猜想的意義是該猜想是否仍然適用在其他的例子。菁菁老師設計的任務中，提供以「全班討論各組提出的猜想(一)比較各組的想法並做分類及(二)全班修正猜想。」讓全班討論，互相檢驗的機會，並提出全班公認的猜想。圖7是各小組公認的猜想類別。

在全班討論一開始，菁菁老師和學生一起將六組公認的猜想一次全部貼在黑板上，如圖7，分成三類：(一)第1、3、6、4組提出同時觀察到被乘數和乘數都是0或被乘數是0的猜想；(二)第2組提出乘數是1的猜想；(三)第5組所提出的猜想與菁菁老師的意圖目標無關。

(一)論證流 AS_1 ：從「所有的被乘數只要是1就不會增加」修正為「任何數乘以1，都會跟被乘數一樣。」的論證歷程

菁菁老師在巡視時，發現第2組提出的猜想：「所有的被乘數只要是1就不會增加」，提出7號學生的作品但非第2組組員公認的猜想來討論。7號學生舉了3個例子 $1 \times 1 = 1$ ； $1 \times 2 = 2$ ； $1 \times 3 = 3$ 作為論證依據。接著，菁菁老師提出：「乘數和被乘數應該寫反了。」來反駁7號的說法，並加以釐清被乘數的意義。因此7號學生的例子被修正為 $1 \times 1 = 1$ 、 $2 \times 1 = 2$ 、 $3 \times 1 = 3$ ，其他學生又補充了 $4 \times 1 = 4$ 、 $8 \times 1 = 8$ 的兩個證據，而維持了7號學生的原來想法。菁菁老師問全班學生：「不會增加，那是跟什麼一樣」。全班學生回答：被乘數。最後7號的猜想由菁菁老師修正為完整的敘述而得到一個暫時結論：「任何數乘以1，都會跟被乘數一樣。」今將這些師生的原案意義化後，將其繪製成論證流 AS_1 ，如圖8。

第一類猜想: 被乘數或乘數都是0的乘法結果都是0

102年10月7日第2題三乙(1)號(曹錦)

(1) 觀察小組的記錄表，你發現什麼數學想法？把你的發現寫下來，並運用「所有」、「任意」、「只要是」……等語詞做說明。

所有被乘數都是0或乘數都是0
如 $10 \times 0 = 0$ 或 $0 \times 10 = 0$
任何數乘以0都是0
只要乘數或乘數是0就會=0

第1組

102年10月7日第2題三乙(11)號(張廷緯)

(1) 觀察小組的記錄表，你發現什麼數學想法？把你的發現寫下來，並運用「所有」、「任意」、「只要是」……等語詞做說明。

只要被乘數或乘數是0
就是沒算到白者
定是等於0
而
0

第3組

102年10月7日第2題三乙(23)號(王瑞)

(1) 觀察小組的記錄表，你發現什麼數學想法？把你的發現寫下來，並運用「所有」、「任意」、「只要是」……等語詞做說明。

只要被乘數是0或乘數是0
就是0

第4組

102年10月7日第2題三乙(5)號(羅志杰)

(1) 觀察小組的記錄表，你發現什麼數學想法？把你的發現寫下來，並運用「所有」、「任意」、「只要是」……等語詞做說明。

只要乘數或乘數是0
就是0

第6組

第二類猜想: 乘數是1的乘法結果都是本身

102年10月7日第2題三乙(19)號(吳岳容)

(1) 觀察小組的記錄表，你發現什麼數學想法？把你的發現寫下來，並運用「所有」、「任意」、「只要是」……等語詞做說明。

只要乘數是1
就會是本來的數字

第2組

第三類猜想: 與教師的意圖目標無關

102年10月7日第2題三乙(2)號(陳曉暉)

(1) 觀察小組的記錄表，你發現什麼數學想法？把你的發現寫下來，並運用「所有」、「任意」、「只要是」……等語詞做說明。

不是所有數字都可以任意交換乘法
如 $50 \times 3 = 150$

第5組

圖7：各小組公認的猜想類別

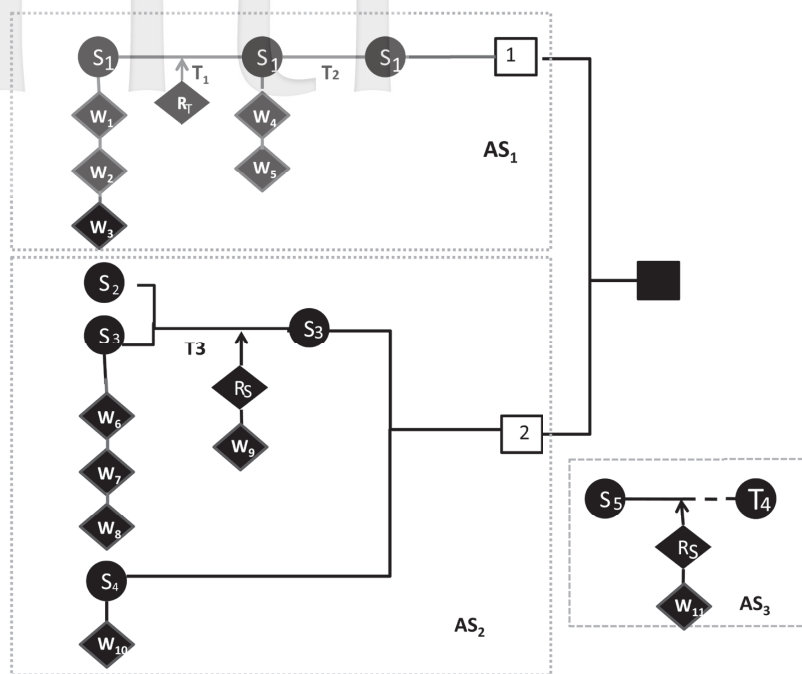


圖8：0的乘法性質論證結構圖

從圖8的論證流 AS_1 中，學生首先提出 S_1 敘述「所有乘數只要是1，都不會增加」但因學生所提供的三個佐證例子誤將被乘數視為乘數，老師提問：「哪裡有被乘數？」(第一次介入， T_1)並遭到老師的反駁 R_1 「乘數和被乘數應該寫反了」，菁菁老師又提問：「不會增加，那是跟什麼一樣」(第二次介入， T_2)。學生隨即再提出兩個正確的例子來支持原先的敘述，最後老師用精準的語言「所有乘數只要是1，都會跟被乘數一樣」來取代「所有乘數只要是1都不會增加」，並修正為完整的敘述「任何數乘以1，都會跟被乘數一樣。」簡而言之，學生出現了一個論述 S_1 和教師兩次的介入(T_1 、 T_2)，和老師的一次反駁 R_1 。學生在這個論證流中，一共提出了5個推論依據(W_i)，在這個任務中我們發現三年級該班學生的推論依據都是提供例子來支持自己的猜想。

(二)論證流 AS_2 ：從多個平行猜想到結論「只要被乘數或乘數是0，積也是0」的論證歷程

在全班討論中，接下來，菁菁老師討論第1、3、4、6組同時提出「被乘數和乘數都是0或被乘數是0」和相關的猜想。這四組共提出了三個不同的小組公認猜想 S_2 ， S_3 ， S_4 ，猜想 S_2 「只要是0算出來也是0」、猜想 S_3 「只要被乘數或乘數是0，積也是0」，並提出三個證據： $0 \times 1 = 0$ 、 $2 \times 0 = 0$ 、 $0 \times 2 = 0$ (W_6 , W_7 , W_8)。猜想 S_4 是「所有沒甩到的都是幾 $\times 0 = 0$ 、任意甩到0都是等於0；只要是乘數都是幾 $\times 0$ ，就會等於0」，並提出證據： 0 甩100次還是0 (W_{10})。當學生提出了猜想 S_3 為「只要被乘數或乘數是0，積也是0」之後，老師詢問是不是一定成立(T_3)，有一學生提出了一個無效的反駁例 $6 \times 6 \neq 0$ (W_9 , R_5)，而無法推翻原來的猜想 S_3 ，而保留猜想 S_3 。最後得到

的結論為：「只要被乘數或乘數是0，積也是0」，而形成論證流 AS_2 ，如圖6。

簡而言之，從圖6的論證流 AS_2 中，學生一共提出了三個雖然敘述不同但都是有效的猜想 S_2, S_3, S_4 ，都可以通往暫時結論2：「只要被乘數或乘數是0，積也是0」。在論證的歷程中，老師只介入了一次(T_3)，介入的理由是幫助學生將猜想 S_4 「所有沒甩到的都是幾 $\times 0 = 0$ 、任意甩到0都是等於0」推廣到一般化。學生對猜想 S_3 提出了一個錯誤例子來佐證(W_9)但為無效的反駁(R_5)，而維持了原猜想 S_3 。學生在這個論證流中，提出了5個推論依據($W_i, i = 6, \dots, 10$)，學生的推論依據都是提供乘法例子來支持自己的猜想。在這過程中老師介入了一次(T_3)，是為了幫學生推廣到一般化，其目的和 AS_1 論證流中的 T_1, T_2 的介入以提問或追問方式是為了幫助學生釐清概念，有所不同，但這都是屬於學生論證過程中的一種介入。

(三)論證流 AS_3 ：小組公認的猜想是無法通往結論的論證歷程

在全班討論中，菁菁老師並非只討論學生的正確論述，第五組學生提出的小組公認猜想 S_5 「不管是什麼數字都可以搭配乘法」，馬上被一位學生反駁，理由是：「 105×100 怎麼乘？」。但是這個反駁不被全班同學接受，後來老師直接提出 T_4 ：「三位數的乘法雖然您們還沒學，但是可以乘」(W_{11})；間接反駁了猜想 S_5 ，而無法通往結論。因此成為被孤立的論證流 AS_3 ，如圖6。

從結構圖論證流 AS_3 中，小組的公認猜想 S_5 與活動目標相遠，一位學生提出了一個超乎三年級學生的程度的三位數 \times 二位數的例子來反駁(R_5)，但是無法被全班學生檢驗，因而菁菁老師結束了第五組學生所提的論證(T_4)。

(四)通往結論的論證結構圖

在論證流 AS_1 和 AS_2 中，分別得到兩個暫時性結論①「任何數乘以1，都會跟被乘數一樣。」及暫時性結論②「只要被乘數或乘數是0，積也是0」，是菁菁老師幫學生做最後的歸納，如圖9。

伍、結論與建議

一、論證結構圖的意涵及功能

在進行全班討論時，整體論證結構可以將學生與老師互動的複雜歷程，萃取並精煉成為具有數學意義的話語，而使得結構圖具有能揭露師生互動內涵及討論流向之功能。因為繪製它時先從局部結構圖開始，做了非常細微的分析，再到整體結構圖。從圖6的結構圖透露出，全班六小組中提出了五種不同的猜想(S_1 到 S_5)，其中有效的猜想，經過全班論證後，剩下四個有效猜想，這四個有效猜想中，其中三個猜想是學生以不同的數學語言來描述相同的數學性質，這三個敘述分別是「只要是0算出來也是0」、「只要被乘數或乘數是0，積也是0」、「所有沒甩到的都是幾 $\times 0 = 0$ 、任意甩到0，都是等於0」，師生論辯之後通往暫時性結論。

本研究在結構圖中增加了教師在論證過程中的介入符號(T)而修正了Reid與Knipping (2010)論證結構圖，可以很清楚地看到教師介

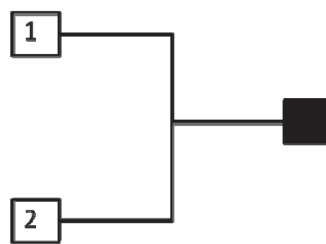


圖9：通往結論的論證結構圖

入的時機、品質、與適當性。在整個結構圖中，顯示出在全班論證的歷程中，菁菁老師介入了四次，其中三次是有效介入(T_2 , T_3 , T_4)，一次是不當介入(T_1)。菁菁老師的介入 T_2 是協助學生以較精準的數學語言修飾原猜想但保留原意；而菁菁老師的介入 T_4 ，是為了停止學生進行超過該班學生程度有關三位數 \times 二位數的討論；菁菁老師的介入 T_3 是以詢問方式能將猜想推論到一般化，這三個介入都是菁菁老師協助學生進行論證的有效介入。在學生論證過程中，菁菁老師出現了一次不當介入(T_1)，是7號學生將被乘數和乘數的位置搞反了，菁菁老師直接以告知的方式「乘數和被乘數應該寫反了」，此時教師介入是需要的，但若改用提問方式如「什麼是乘數？什麼是被乘數？」然後由其他學生來協助糾正，可能更為適當，所以菁菁老師一次不當介入(T_1)是介入方式不當，而非介入時機不當。

從論證流 AS_1 的結構圖中，師生的論證歷程都是針對小組提出公認的猜想，進行論證，而這個猜想能通往一個暫時性結論，所以局部論證結構呈現的圖像電流串聯一樣，是一連串直接通往結論。但是，在論證流 AS_2 的結構圖，是針對不同小組提出三個公認的猜想，進行論證，最後這三個猜想經過師生論辯之後，都能通往一個暫時性的結論，在繪製的局部論證結構圖像電流的並聯一樣，最後串起來都通往同一個結論，如圖6。從結構圖論證流 AS_3 中，小組的公認猜想與活動目標相遠，最後無法通往結論，故成為孤立的局部論證圖。因此，在該任務下，學生從各組公認的猜想到全班公認的猜想之論證，所得到的兩個結論的論證歷程繪製出的整體結構圖具有Reid與Knipping (2010)所提出的泉源結構圖的特性。

論證結構圖約略可以透露出論證的特

性，例如：結構圖的開端是學生提出的猜想，若有多個平行猜想，可以反映出該臆測任務是夠開放的，足以讓學生依據先備知識進行猜測；若一開始提出的猜想需要經歷較長的論證歷程通往結論，象徵著該數學性質對學生而言較為複雜。若有孤立的論證表示教師不處理無效猜想的論證。

二、數學臆測活動引動了學生論證

(一)臆測活動引發的學生論證具有五個特質

在該任務的臆測活動中，三年級學生經歷了五個臆測歷程：造例子及組織例子、觀察例子並尋求規律性、形成並提出猜想、驗證猜想。菁菁老師設計的數學臆測任務嘗試提供給學生進行的臆測歷程的每個階段，都是先由個別學生、再到小組、最後到全班的檢驗。因在每個環節的檢驗，都需要學生說服他人，論證因而產生，因而有個人的論證、小組的論證和全班集體的論證。我們發現透臆測過活動引發的論證具有五個特質：

1. 透過臆測活動產生的每個結論(數學性質)是經過個人、小組、再到全班三個層級不斷論辯，經萃煉後而得到健全穩固的數學性質。
2. 人數越少論證結構越簡單，因為小組內人數只有4位，小組內的論證結構較為簡短；而全班的論證因全班學生及老師共有25位，所以人數較多，論證歷程較長也較複雜，這裡並不意味著越長或越複雜的論證品質越好，但可以顯示師生互動的參與者較多。
3. 該任務下有關0和1的乘法性質的論證歷程，三年級該班學生第一次接受數學臆測教活動，所展現的臆測都是落在Cañadas等(2007)從有限個例子歸納來提出猜想的臆測類型。

4. 該班三年級學生展現了Cañadas與Castro (2005)七個階段的臆測認知歷程的前五個階段，但沒有展現出後面兩個階段：將猜想推廣到一般化及證明猜想一般化，其理由為：菁菁老師考慮三年級學生第一次體驗臆測融入教學，又因為三年級學生的數學知識不夠豐富。我們期望往後菁菁老師的三年級課數學課堂能繼續進行將猜想推廣到一般化及證明猜想一般化的活動。

5. 若以Toulmin (1958)的論證模式而言，該班三年級學生先自己製造資料(D)、提出猜想，再經過個人、小組、全班集體論證，將提出的猜想通向結論(C)。猜想到結論的論證中，三年級學生都是以舉一到三個例子來支撐作為推論的依據(W)；若以Balacheff (1988)的論證層次是落在最低層次的原始試驗層次，亦是Stylianides (2007)論證方法的列舉法找例子。該班三年級學生也許對不同的任務會展現出更高的層次；或許他們未來的論證經驗越多，數學知識越豐富，推論依據的類型也會有不同；三年級學生的推論依據是否會跳脫實例作為推論依據的論證方法，需要未來的研究繼續探討。

(二)透過臆測活動引發學生論證，在論證過程中能促進數學學習

數學臆測活動不僅能引發學生的數學論證，並可以促成學生下面的數學學習：

1. 透過數學臆測活動能建立學生的數學性質：如「只要被乘數或乘數是0，積也是0」及「任何數乘以1，都會跟被乘數一樣。」並概念化乘法算式中被乘數是0和乘數是0的意義。
2. 數學臆測活動能釐清學生的迷思概念並協助學生發展更精確的數學語言：學生提出以三種不同的數學語言描述「只要是0算

出來也是0」、「只要被乘數或乘數是0，積也是0」、「所有沒甩到的都是幾 $\times 0 = 0$ 、任意甩到0，都是等於0」來描述相同的數學性質，經過全班論證而得到「任何數乘以0，積都是0」。學生混淆「被乘數和乘數」也被釐清，學生不精準的數學語言「所有乘數只要是1，都不會增加」也被修飾為精準的語言「任何數乘以1，都會跟被乘數一樣。」

3. 本研究發現透過數學臆測活動，提供了機會讓學生探究並同時發展出一叢相關的數學性質或概念，如「任何數乘以1，都會跟被乘數一樣。」是出乎老師的預期的目標，但1的乘法性質卻是重要概念一，不需要如課本分別以不同的布題活動獨立來建立學生學習不同的數學概念或性質。

4. 當學生提出猜想後，若要檢驗是否正確，該論證所需要的先備知識是否足夠，是影響論證成功的重要因素之一。例如，在論證流AS₃中，有一組學生發現的關係「不管是什麼數字都可以搭配乘法」，教師依然提出來讓學生驗證是否能將此猜想一般化，學生舉了一個三位數 \times 三位數(105×100)例子想要反駁，但卻超乎學生的數學知識，因此該論證活動被老師終止。

如文獻所言，並非所有任務都能啟動數學臆測，不同的任務也會導向不同的數學臆測活動，臆測任務類型及內容都會影響學生的論證品質(林碧珍、周欣怡，2013；陳英娥、林福來，1998；Cañadas et al., 2007)。本研究僅初探在數學臆測任務設計的專業發展研究計畫下協助一位老師設計數學臆測活動融入於數學教學課堂，三年級學生所展現的數學論證樣貌，研究結果發現數學臆測活動確實能引燃學生的數學論證發生，但無法回答有關數學臆測任務對學生論證品質有多大

影響的問題；也就是本研究可以回答若是要培養學生的數學論證，從融入數學臆測活動於教學中，是一個值得考慮的切入點。

三、數學論證引發數學論證關係圖

本研究發現學生的數學論證，確實在菁菁老師進行數學臆測任務下的數學課堂中發生了。數學臆測引發學生數學論證發生，兩者的關係圖如圖10。

圖10包含兩個圓和一個長方形，長方形在圖形的最內部，外圍緊接著一個內圓和一個外圓。圓形表示數學臆測元素和數學論證元素，長方形表示促進數學臆測活動進行的關鍵性角色。最內部的長方形表示在數學課堂內促進臆測活動引動數學論證發生的重要關鍵性角色，包含任務本身、數學臆測活動內容、學生的數學先備知識、及教師的介入。內圓陰影是數學臆測歷程的五個歷程：造例子、組織例子、觀察及尋求規律性、形成並提出猜想、檢驗猜想。箭頭向外，象徵著數學臆測活動啟動了在外圓的數學論證，

數學論證的基本元素包含建立資料、建立證據、提出或形成論述、提出論證依據、及結論，分別以方形表示。數學臆測活動的前兩個歷程：造例子和組織例子，是為了建立資料，作為提出論述的準備；臆測活動的第三和第四個歷程：觀察尋求規律及提出猜想，是為了形成論證活動中似真但還不確定的論述；臆測活動第五個歷程是啟動了個別學生、或小組、或全班需要提出論證依據來捍衛自己的所提出的論述，其他學生也可能提出反駁例子來反駁似真的論述，最後經過全班學生來共同檢驗論述，最後得到一個或多個結論。

誌謝

首先要感謝科技部科教發展及國際合作司提供經費補助專題研究計畫「國小在職教師設計數學臆測活動的專業成長研究(NSC 100-2511-S-134-006-MY3)」。感謝菁菁老師和參與研究計畫的所有教師支持、兩位研究生幫忙資料分析和助理協助資料蒐集。

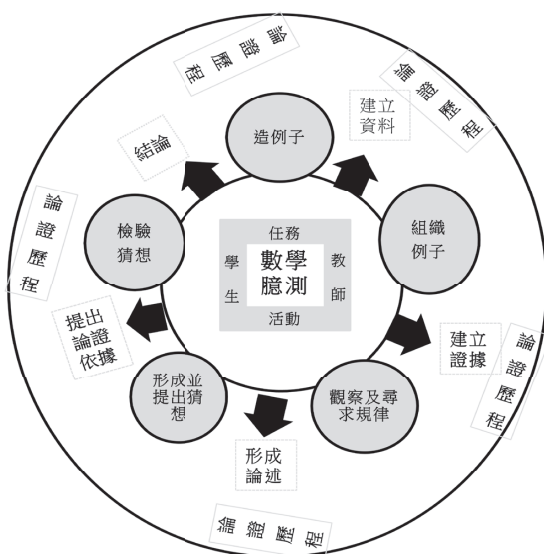


圖10：數學臆測活動引動數學論證的關係圖

參考文獻

1. 林碧珍、周欣怡(2013, 12月)。國小學生臆測未知結果之論證結構：以四邊形沿一對角線剪開為例。發表於第29屆科學教育國際研討會。彰化市：國立彰化師大科學教育研究所。
2. 林碧珍、馮博凱(2013, 12月)。國小學生反駁錯誤命題的論證結構——以速率單元為例。發表於第29屆科學教育國際研討會。彰化市：國立彰化師大科學教育研究所。
3. 林碧珍、鍾雅芳(2013, 6月)。六年級學生解決數字規律性問題的數學臆測思維歷程。發表於第5屆科技與數學教育國際學術研討會暨數學教學工作坊。臺中市：國立臺中教育大學數學教育系。
4. 林福來(2003)。青少年數學論證學習與教學的理論之研究(NSC92-2521-S-003-001)。臺北市：行政院國家科學委員會。
5. 林福來(2010)。數學臆測活動的設計、教學與評量：總計畫(NSC96-2521-S-003-001-MY3)。臺北市：行政院國家科學委員會。
6. 秦爾聰、劉致演、楊讚文(2010, 12月)。以臆測為中心的探究教學對高中學生數學素養影響之研究。發表於全球華人科學教育會議2010。香港：香港教育學院。
7. 秦爾聰、賴紀寧(2010, 12月)。以臆測為中心的數學寫作活動對學生數學素養影響歷程之研究。發表於全球華人科學教育會議2010。香港：香港教育學院。
8. 秦爾聰、簡大維、李立凱(2010, 12月)。臆測為中心之數學教學活動設計——以數列與級數為例。發表於全球華人科學教育會議2010。香港：香港教育學院。
9. 教育部(2000)。國民中小學九年一貫課程暫行綱要。臺北市：作者。
10. 教育部(2003)。國民中小學九年一貫課程正式綱要。臺北市：作者。
11. 教育部(2008)。國民中小學九年一貫課程綱要。臺北市：作者。
12. 陳英娥(2002)。教室中的數學論證之研究。教育研究資訊, 10(6), 111-132。
13. 陳英娥、林福來(1998)。數學臆測的思維模式。科學教育學刊, 6(2), 191-218。
14. 蔡文煥(2010)。發展課室推理規範以促進國小學童推理歷程之研究(NSC99-2511-S-134-006)。臺北市：行政院國家科學委員會。
15. 蔡永林、秦爾聰(2009, 5月)。發展以臆測為中心的「一元一次方程式」教學模組。發表於2009數理教師PCK應用與實務研討會。桃園：中原大學。
16. Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers, and children* (pp. 216-235). London: Hodder and Stoughton.
17. Boero, P., Douek, N., & Grauti, R. (2003). Children's conceptions of infinity of numbers in a fifth grade classroom discussion context. In N. Pateman, B. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th annual conference of the international group for the psychology of mathematics Education* (Vol. 2, pp. 121-128). Honolulu, HI: University of Hawaii.
18. Cañadas, M. C., & Castro, E. (2005). A proposal of categorization for analyzing inductive rea-

- soning. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the CERME 4 international conference* (pp. 401-408). Catalonia, Spain: SantFeliu de Guíxols.
19. Cañadas, M. C., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D., & Yevdokimov, O. (2007). The conjecturing process: Perspectives in theory and implications in practice. *Journal of Teaching and Learning*, 5(1), 55-72.
 20. Douek, N. (1999). Argumentative aspects of proving: Analysis of some undergraduate mathematics students' performance. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 2, pp. 273-280). Haifa, Israel: Haifa University.
 21. Healy, L., & Hoyles, C. (1998). *Justifying and proving in school mathematics: Technical report on the nationwide survey*. London: Institute of Education, University of London.
 22. Heinze, A., Cheng, Y.-H., Ufer, S., Lin, F.-L., & Reiss, M. K. (2008). Strategies to foster students' competencies in constructing multi-steps geometric proofs: Teaching experiments in Taiwan and Germany. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 40(3), 443-453.
 23. International Congress on Mathematics Education. (2012). *Topic study groups*. Retrieved November 5, 2013, from http://www.icme12.org/sub/sub02_05.asp
 24. Johnston-Wilder, S., & Mason, J. (2004). *Fundamental constructs in mathematics education*. New York: RoutledgeFalmer.
 25. Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
 26. Knipping, C. (2003). *Argumentation structures in classroom proving situations*. Retrieved May 6, 2013, from http://ermeweb.free.fr/CERME3/Groups/TG4/TG4_Knipping_cerme3.pdf
 27. Knipping, C. (2008). A method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 40(3), 427-441.
 28. Knipping, C., & Reid, D. (2013). Revealing structures of argumentations in classroom proving processes. In A. Aberdein & I. J. Dove (Eds.), *The argument of mathematics* (pp. 119-146). New York: Springer Dordrecht.
 29. Ko, Y. Y. (2010). Mathematics teachers' conceptions of proof: Implications for educational research. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 8, 1109-1129.
 30. Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematics meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-270). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
 31. Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom: Two episodes and related theoretical abduction. *Journal of Mathematical Behavior*, 26(1), 60-82.

32. Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. New York: Cambridge University Press.
33. Lin, F.-L., Hsieh, F.-J., Hanna, G., & de Villiers, M. (Eds.). (2009). *Proceedings of the ICMI study 19 conference: Proof and proving in mathematics education*. Taipei, Taiwan: National Taiwan Normal University.
34. Lin, F.-L., Yang, K.-L., Lee, K.-H., Tabach, M., & Stylianides, G. (2012). Principles of task design for conjecturing and proving. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI study* (pp. 305-326). New York: Springer.
35. Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1985). *Thinking mathematically*. Menlo Park, CA: Addison-Wesley.
36. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
37. Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analyzed? *Educational Studies in Mathematics*, 66, 23-41.
38. Polya, G. (1957). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
39. Polya, G. (1968). *Mathematics and plausible reasoning* (2nd ed.). Princeton, NJ: Princeton University Press.
40. Reid, D. A. (2002). Conjecturing and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(1), 5-29.
41. Reid, D. A., & Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education: Research, learning, and teaching*. Rotterdam, The Netherlands: Sense.
42. Stein, M. K., & Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research and Evaluation*, 2, 50-80.
43. Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289-321.
44. Toulmin, S. E. (1958). *The uses of argument*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

The Exploration of Conjecturing Provoking Argumentation of Mathematics in a Third Grade Classroom

Pi-Jen Lin

Graduate Institute of Mathematics and Science Education, National Hsinchu University of Education

Abstract

The purpose of the study was to explore how third-graders engaged in mathematical argumentation where conjecturing was integrated into mathematics instruction in a classroom. Conjecturing involving in the study is defined as a reciprocal process while facing an uncertain mathematical task in classroom, students via individual or small group construct data, observe and look for the pattern of the discrete cases, propose a plausible conjecture in accordance with given conditions, test, justify and verify the conjectures proposed. Argumentation defined in the study is the product of the conjecturing, so that it becomes the part of the conjecturing. Argumentation is a process from data to conclusion by using warrants or backings as arguments. The study adopted a qualitative research method to observe a third-grader teacher who was participating in the “Designing Conjecturing Tasks for Enhancing Teachers Professional Development” project that is designed to support in-service teachers in designing conjecturing tasks and integrate conjecturing into classrooms. The data collected for the study included videotapes and audio-tapes transcription verbatim, students’ work scanned, researcher’s note, and teacher’s brief lesson plan. The analysis of argumentation was based on Toulmin’s model (1958) and modified from Reid & Knipping (2010) argumentation structures. The results indicated that conjecturing was able to initiate students’ argumentation. Third-graders mostly utilized empirical examples as warrants for supporting their conjectures. The quality of argumentation for the task used in the study was staying in Balacheff’s (1988) level of naive empiricism. Conjecturing was not only to promote students’ argumentation but also conceptualize the meaning of mathematical concepts or mathematics relationships, clarify students’ misconception, and modify students’ unprecise mathematical language. The structure of argumentation revealed the timing and frequencies of teacher’s innervations. The argumentation structure displayed the frequencies of warrants and where the warrants occurred after students gave a conjecture approaching to conclusion.

Key words: Third Grade, Structure of Argumentation in Classroom, Argumentation, Conjecture