科學教育學刊
2020, 第二十八卷特刊 , 429-455
DOI:10.6173/CJSE.202012/SP_28.0002

Chinese Journal of Science Education
2020, 28(S), 429-455

學生在臆測任務課堂表現的數學創造力評量

林碧珍*
國立清華大學　數理教育研究所

摘要

本研究的目的是建立一個數學臆測任務融入於課堂實踐下，學生表現的數學創造力評量架構，此架構包含任務本身和學生數學創造力的兩個評分規準，透過檢驗兩個研究問題，來瞭解評分規準的可行性。本研究的數學創造力架構增加精緻性元素並修正自Leikin在2009年編製的評量架構。個案教師將分數乘法臆測任務融入於兩屆五年級班級課堂教學中，在10堂課中使用的兩個臆測任務和兩屆學生表現的個人猜想、小組猜想和全班猜想，是本研究蒐集的主要資料。本研究利用兩個評分規準，分析任務本身的教學目標和學生提出的數學猜想。研究發現臆測任務實踐脈絡下的數學創造力評量架構可以從數學創造力觀點評量不同臆測任務的特性，任務中具有概括性的教學目標，能驅動學生的精緻性思考。學生數學創造力的評分規準，是以猜想的數量、類別、新穎性及概括性作為評量學生在臆測任務表現的流暢性、變通性、原創性及精緻性思考的指標。

關鍵詞：國小學生、評量架構、數學創造力、臆測任務

壹、緒論

為了迎接人工智慧時代的來臨，創造力是許多國家列為21世紀最關鍵的能力之一。這些年來，數學創造力研究在國際間已逐漸受到重視，諸如：2013年*ZDM—Mathematics Education* (《國際數學教育期刊》)的專題特刊(Leikin & Pitta-Pantazi, 2013)，以及國際數學教育協會(International Congress on Mathematics Education [ICME])都將數學創造力列為專題研究群(topic study group)，如ICME12、ICME13、ICME14。

我國在2003年公布《創造力教育白皮書》，將創造力列為國家主要的發展策略(教育部，2003)，強調創造力是學習成效之教育指標，學校教育需要營造創造力的學習環境。多年來吸引許多研究者投入於創造力研究，諸如：一、資優生在數學創造力的表現(呂玉琴、吳宣鋒，2015；劉祥通、洪筱柟，2020)；二、數學創造力的相關或影響因素(曾千芝、曾麗錚、黃博聖，2017)；三、常模的數學創造力測驗工具的發展(彭淑玲、陳學志、黃博聖，2015)；以及四、有關提升數學創造力的活動設計與教學策略(吳雅晴、李心儀，2017)。然而，創造力研究較多是以紙筆測驗探討資優生的創造力；普通學生的

*通訊作者：林碧珍，linpj@mx.nthu.edu.tw
(投稿日期：民國109年9月8日，修訂日期：民國109年12月28日，接受日期：民國109年12月30日)

數學創造力教材研發、教學和評量工具研究尚嫌不足。根本原因可能有二：一、誤以為創造力是沒有學科或領域性的區別(Hong & Milgram, 2010)，沒有區分一般創造力和學科創造力的不同。二、誤認為創造力是少數資優生的專利；以為創造力是先天能力，不是後天培養的(Milgram & Hong, 2009)。

針對第一個迷思，Leikin (2009)認為學科創造力不同於一般創造力。一般創造力可以從一個領域轉化到另一個領域上；而學科創造力是學科所具有特定的創造力，例如：數學創造力是利用數學的抽象、邏輯演繹特性所產生的創造力，數學創造力的研究應不同於一般創造力的研究(Jeon, Moon, & French, 2011)。基於此，數學創造力成為本研究探究學生的高層次思考內涵。

針對第二個迷思，Leikin (2009)主張普通學生的創造力應不同於數學家的創造力；否則，學校教育無法對學生數學創造力的培養發揮功能。數學家的創造力是絕對性的，但學生的數學創造力是相對性的(Shriki, 2010; Sriraman, 2005)。絕對創造力是指數學家具有優異的資賦，在數學方面有傲人的傑出表現。相對創造力是指相對於相同教育背景的同儕或與對照自己以前的表現。本研究對數學創造力的兩個基本立場是：數學創造力不同於一般創造力，以及創造力不是數學家和資優生的專利。學校教育課堂中普通學生課堂表現的數學創造力是本研究關注的焦點。

數學創造力應如何培養？教學成效要如何評量？怎樣的任務適合用來評量學生的數學創造力？Leikin與Elgrably (2020)指出任務具有挑戰性是必要的條件。挑戰性是具有難度但需讓學生想要克服此難題的動機，難度不可以達到讓學生想放棄。為何挑戰性數學任務可以啟動數學創造力？若從近側發展區解釋，任務的挑戰性難度落在近側發展區內，學習就會發生(Vygotsky, 1978)。若從認知負荷理論觀點，任務的難度會造成認知失衡，為了達到平衡，調適與同化的作用就會發生，而改變個體的認知基模(Sweller, van Merrienboer, & Paas, 2019)，挑戰性數學任務是高認知需求任務，會啟動學生的高認知歷程，諸如分析、創造、批判或監控等後設認知活動(Silver & Mesa, 2011)。

任務的挑戰程度是決定於其開放程度。而解題與擬題的任務都具有開放性，許多研究從解題或擬題探究學生的數學創造力(Klein & Leikin, 2020; Krutetskii, 1976; Leikin, 2009; Silver, 1997)。Leikin與Lev (2007)從解題切入，以多元解答任務(multiple solutions tasks)評量數學創造力；依據解答的數量、類別和新穎作為流暢性(fluency)、變通性(flexibility)和原創性(originality)的評量指標。多元解答任務的多元是：一、解答的表徵多元；二、解答的數學概念多元；三、解答的策略多元。多元解答任務的開放分為初始開放(open-start)、結果開放(open-end)，以及兼具有初始及結果開放。初始開放任務是解法多元，而結果開放任務是答案多元。如：「繪出面積為15平方公分的多邊形」。由於可繪出很多圖形，是一個結果開放的任務。然而，以解題導向的多元解答任務評量學生數學創造力的研究，有兩個限制：一、數學創造力元素少了Torrance (1974)的精緻性(elaboration)，僅包含流暢性、變通性和原創性，因為多元解答任務是對特定問題的解法或答案，難以應用到所有的數學問題，無法涉及精緻性。二、研究成果對學校教育的影響有限，因為數學創造力的研究大多是以紙筆測驗的個人解題，抽離學校的常態教學，研究結果不易與實務產生連結。

數學臆測任務具有挑戰性，由於它的開

放而能啟動學生多元的數學猜想(林碧珍，2015)，所以具有多元解答的特性。臆測任務亦具高認知需求(Stein, Smith, Henningsen, & Silver, 2000)的特性，由於數學臆測任務需要學生觀察及尋找規律，利用彙整單中的資料，提出個人猜想、互相檢驗猜想是否正確，形成小組猜想及全班猜想；瞭解猜想在什麼條件或範圍下才為恆真，這些臆測認知歷程，是形成數學創造力的歷程。本研究將以數學臆測任務在課堂實踐學生提出的個人猜想、小組猜想、全班猜想連結到數學創造力。

將臆測任務融入於數學教學是培養學生數學創造力的一種教學取向(吳衛東、林碧珍、章勤瓊，2018；林碧珍，2020)。這個教學取向是以學生的臆測認知歷程(Cañadas, Deulofeu, Figueiras, Reid, & Yevdokimov, 2007)為理論基礎，包含從造例、提出猜想、效化、一般化、證實共五個階段的學習歷程(林碧珍，2019)，同構於Mason, Burton與Stacey (2010)的臆測歷程：說出猜想、檢驗猜想、不信任猜想和獲得感覺。然而，在研究脈絡上不同於Mason等或Polya (1973)的研究，本研究是在學校常規教學進度下，融入臆測任務於臆測教學課堂中的個人活動、小組活動及全班活動中表現的數學思考歷程，而不是抽離學校教學脈絡，以紙筆測驗進行個人解題歷程中發生的解題行為。

數學臆測教學包含五個階段：一、造例階段：學生以發散性思考進行造例，再以聚斂性思考將資料組織整理有規律的排序。二、提出猜想階段：學生以發散性思考從資料彙整單尋找規律性，提出個人猜想，透過檢驗彼此的猜想，再以聚斂性思考進行歸類與修正，彙整成小組猜想。三、效化階段：以發散性思考提出更多例子擴大檢驗小組猜想是否仍然有效，從小組再到全班，以聚斂性思考進行比較、歸類與整合，而形成全班猜想。四、一般化階段：以聚斂性思考限制條件或範圍作為猜想的前提，再以發散性思考讓猜想成為恆真命題。五、證實階段：以發散性思考使用各種有效方法證實猜想的合理性，以取信他人。所以，發散性思考及聚斂性思考在臆測任務融入於臆測教學課堂中不斷更迭發生，這些高層次思考是數學創造性思考的特性(吳衛東等，2018)。

高層次思考是每一波數學教育改革的課程目標，但在數學課堂進行高層次思考的學習活動仍然不多，目前正在實施十二年國民基本教育課程綱要的核心素養(國家教育研究院，2014)，需要更多的課堂提供機會讓學生進行高層次思考的學習活動，數學創造力是一種高層次思考，是素養的內涵之一。然而，在數學課堂中學生所展現的數學創造思考如何評量，是教師與研究者面臨的挑戰與困難。除了數學知識的評量外，在課堂中表現的高層次思考歷程的評量研究，是屬於多元評量研究中評量目的的多元。本研究的目的是建立臆測任務脈絡下數學創造力的評量架構，利用此架構的評分規準回答兩個研究問題，以瞭解此架構的可行性，可行性是指評分規準的個人猜想、小組猜想及全班猜想是否都能清楚界定及評分。本研究待答的兩個研究問題是：一、以任務的數學創造力評分規準檢驗兩個臆測任務的數學創造力有何不同？二、以學生的數學創造力評分規準檢驗學生表現的數學創造力有何不同？

貳、數學創造力的內涵

創造力的概念複雜且分歧，雖然創造力並不完全和發散性思考同義，但是發散性思考卻被證實是創造性思考的最佳估計(Runco & Jaeger, 2012)。有些學者主張創造力的創

造過程是聚斂性思考和發散性思考互相結合(Cropley, 2006; Guilford, 1967)。Cropley認為創造是透過發散性思考產生多個和新奇的想法，而新奇需透過聚斂思考進行評估。Guilford、Torrance (1974)都提出流暢性、變通性、新穎性和精緻性是創造力的構成要素；流暢性是想法的連續性；變通性是指各種不同的解決方法，與想法的改變有關；新穎性是指獨特的思維方式；精緻性是指描述、頓悟和想法概括化的能力。其中流暢性、變通性、新穎性三個指標是許多學者用來發展數學創造力量表的核心架構(Leikin & Lev, 2007)。

既然數學創造力的定義都沒有取得共識，為何能夠產出許多的創造力研究(Sriraman, 2017)？因為許多對創造力的研究是以縮小研究範圍，將研究範圍限縮為普通生創造力與資優生創造力、學科創造力與一般學科創造力、非凡創造力與日常創造力。非凡創造力是大C (big creativity)，創造的成果足以改變全人類的生活，例如發明電腦。日常創造力是小c (little creativity)，創造的成果可以解決日常生活中的問題(Kaufman & Beghetto, 2009)。創造力研究可區分為兩個研究取向(Sternberg & Lubart, 1996)：一、心理計量取向(psychometric approach)，以發散性思考為根據，強調創造的流暢、變通與原創，並建立標準化的創造力量表來評量創造力，如陶倫斯創造思考測驗(Torrance Tests of Creative Thinking, TTCT)和威廉斯創造思考測驗(Williams Creative Thinking Tests, WCTT)等。發散性思考量表能否評量出學生真正的創造力，仍未有定論(侯雅齡，2009；Sternberg & Lubart)。這類研究是以不同的心理計量模型找出影響資優生數學創造力的因素，如自我效能、數學成就、後設認知等(Akgül & Kahveci, 2017; Haavold, 2018)。二、認知取向(cognitive approach)，將創造力視為在條件限制下如何根據已知、產生假設以解決問題的過程(Finke, Ward, & Smith, 1992)，多以解決洞見問題(insight problem)來評量創造力(Weisberg, 2015)，是目標導向的研究取向。

創造力在數學學科也沒有普遍接受的定義(Sriraman, 2005)。Ervynck (1991)將數學創造力視為是高層次數學思考的特徵，創造力與數學洞察力和直觀能力息息相關。既然數學創造力沒有共同的定義，在評量上也就難以取得共識。評量的對象是創造的「結果」或「過程」。Haylock (1997)主張數學創造力可以從創造歷程和創造結果來評量；從歷程評量創造力，是從認知歷程看個體在解數學問題時，是否能「克服固著」(overcome of fixation)，打破習性或突破傳統刻板的解題方法，採用不同心智運作尋求不同的解題策略。從結果評量創造力，是使用一般發散性思考量表，從流暢性、變通性、原創性來評量學生在測驗上的表現。若將數學解題視為創造歷程，則解題歷程和解題結果是評量學生創造歷程的指標。

為了避免使用創造力量表測量數學創造力可能造成的偏誤，數學教育學者從擬題或解題的路徑出發(Krutetskii, 1976; Silver, 1997)。近幾年有研究團隊以認知取向，從解題觀點發展數學創造力的評量架構，此架構的數學創造力是以流暢性、變通性、原創性為評量指標(Leikin, 2009, 2013; Leikin & Lev, 2007)。

本研究目的是要建立數學臆測任務脈絡下，普通學生在常規課堂表現數學創造力的評量架構，這是一個目標導向的創造力研究，適合採用認知取向。要建立的評量架構指標是以Leikin (2009)、Leikin與Lev (2007)的數學創造力評量架構為基礎，進行調整修

正，增加納入Torrance (1974)的精緻性元素。本研究的數學創造力定義是指學生在數學課堂中探究臆測任務表現的流暢性、變通性、原創性和精緻性思考，以學生提出猜想的數量、類別、新穎性及概括性作為評量指標。

參、數學創造力的評量架構

一、解題導向任務的數學創造力評量架構

Leikin與Lev (2007)依據Guilford (1967)和Torrance (1974)提出創造力的流暢性、變通性和原創性，發展出多元解答任務的數學創造力評量架構，提出2-4-6評量架構，此評量架構是在沒有任何提示下學生個人不同解答得到的分數，分別為2、4和6分，由於這個架構僅能從創造力總分反映出個人的解題結果，但無法從變通性和原創性的總分反映出個人的解題過程，到了2009年修正為10-1-0.1評量架構(Leikin, 2009)，以兼顧解題過程和結果。Leikin評量架構有兩個基本假設：(一)多元解答任務的數學創造力包含流暢性、變通性和原創性三元素；(二)數學創造力與多元解答任務相依，也就是不同的任務會評量出學生不同的數學創造力(Leikin & Lev)。

(一)學生在多元解答任務的數學創造力評量架構

Leikin (2009)的10-1-0.1評量架構包含兩種評分規準，不僅可以用來評量學生的數學創造力，也可以用來評量任務本身的數學創造力。Leikin分別以專家解答空間(expert solution spaces)和個人解答空間(individual solution spaces)中的解答數量、多元及新穎性，來評量任務及個別學生的流暢性、變通性和原創性。專家解答空間的解答是來自於教科書中的解答或專家提供，而個人解答空間的解答是來自於個人。除此之外，Leikin提出了多數人的解答空間所形成的集體解答空間(collective solution spaces)，來促進個人數學創造力的發展。集體解答空間的解答數量及種類通常比個人解答空間多，是擴大個人解答空間元素的主要來源。不論是個人解答空間或是集體解答空間都是專家解答空間的部分集合。

多元解答任務和學生表現的數學創造力在流暢性、變通性及原創性的評分規準說明如下。

1. 流暢性(*Fl*)

任務或學生的流暢性是決定於解答的數量。任務的流暢性是指專家解答空間中所有解答的數量。每一個解答得1分，學生的流暢性是個人所有解答的總分；流暢性在乎的是思考方法，不在乎是否正確(Leikin, 2009; Levav-Waynberg & Leikin, 2012)。

2. 變通性(*Fx*)

任務或學生的變通性是決定於解答的類別。任務的變通性是指專家解答空間中解答的類別，而學生的變通性是個人解答空間中解答的類別。Leikin (2009)採用十進制來區分解答的類別差異。若不同類別的解答，變通性得10分；同一類別但有差異的解答，變通性得1分；同一類別但解答有些微的差異，則變通性得0.1分。任務的變通性是由專家解答空間中所有解答的變通性得分之總和，即$Fx = \sum_{i=1}^{n} Fxi$，其中n是專家解答空間所有解答的數量。學生的變通性是個人解答的變通性得分總和，為$Fx = \sum_{i=1}^{n} Fxi$，其中n為個人解答空間所有解答的數量。

3. 原創性(*Or*)

任務或學生的原創性是決定於解答的

新穎性。Leikin (2009)將原創性結合了「相對性」與「絕對性」觀點。絕對性是解答具有獨特性，不受群體學生的影響(Ervynck, 1991)；而相對性是參照群體學生提出的解答。相對性是個人解答占集體解答空間的百分比。Leikin對於原創性採用相對群體學生的計分，以15%和40%作為決斷數值。

任務的原創性是指專家解答空間解答的新穎性。非例行性的解答，原創性得10分；部分解答是非例行性，則原創性得1分；若為例行性解答，則原創性得0.1分。任務的原創性是專家解答空間中所有解答的原創性得分之總和，即$Or = \sum_{i=1}^{n} Ori$，其中n是專家解答空間中解答的數量。

學生的原創性是個人解答空間的獨創性。若獨特且為前15%的學生提出的解答，原創性得10分；非例行性的部分解答且有15% ~ 40%的學生提出，則原創性得1分；例行性且該超過40%的學生提出的解答，原創性得0.1分。學生的原創性總分是個人解答空間中所有解答的原創性總分，為$Or = \sum_{i=1}^{n} Ori$，其中n為個人解答空間解答的數量。

4. 創造力(Cr)

多元解答任務的數學創造力是專家解答空間解答的流暢性、變通性、原創性得分的乘積之總和，即$\sum_{i=1}^{n} Cri = \sum_{i=1}^{n} (Fli \times Fxi \times Ori) = \sum_{i=1}^{n} 1 \times Fxi \times Ori$，其中$n$是專家解答空間的數量。學生的創造力是流暢性、變通性、原創性的乘積得分之總和，即$\sum_{i=1}^{n} Cri = \sum_{i=1}^{n} (Fli \times Fxi \times Ori) = \sum_{i=1}^{n} 1 \times Fxi \times Ori = \sum_{i=1}^{n} Fxi \times Ori$，其中$n$是個人解答空間解答的數量。多元解答任務的數學創造力的評分架構包含任務與學生的數學創造力兩種規準，描述於表1。

表1：多元解答任務的數學創造力評量架構

解答空間	流暢性(Fl)	變通性(Fx)	原創性(Or)	創造力(Cr)
臆測任務的數學創造力評分規準				
專家解答空間	每個解答1分	$Fxi = 10$，不同類型的解答。 $Fxi = 1$，同類型的解答。 $Fxi = 0.1$，同類型相似的解答。	$Ori = 10$，有洞見或非例行性的解答。 $Ori = 1$，部分非例行性的解答。 $Ori = 0.1$，例行性的解答。	$Fxi \times Ori$
總分	n	$\sum_{i=1}^{n} Fxi$	$\sum_{i=1}^{n} Ori$	$\sum_{i=1}^{n} Fxi \times Ori$
學生在臆測任務表現的數學創造力評分規準				
個別解答空間	每個解答1分	$Fxi = 10$，不同類型的解答。 $Fxi = 1$，同類型的解答。 $Fxi = 0.1$，同類型相似的解答。	$Ori = 10$，非例行性解答且在全部人數的15%以內。 $Ori = 1$，非例行性解答且在全部人數的15% ~ 40%。 $Ori = 0.1$，例行性解答且超過全部人數的40%以上。	$Fxi \times Ori$
總分	n	$\sum_{i=1}^{n} Fxi$	$\sum_{i=1}^{n} Ori$	$\sum_{i=1}^{n} Fxi \times Ori$

註：n為解答空間解答的數量。

(二)多元解答任務的創造力分數是以變通性和原創性得分的乘積之總和

為何Leikin (2009)的10-1-0.1評量架構中創造力分數是變通性和原創性得分的乘積之總和？以變通性和原創性得分的乘積作為創造力分數，具有以下特性。

1. 可以從創造力觀點評量出相同學生不同解答的品質

假如A生解出一個數學任務，用了兩個獨特但卻很相似的解法，分別為解法k和解法m。解法k是獨特解法，則變通性得10分，原創性得10分，$Cr = 10 \times 10 = 100$分。解法m的變通性得0.1分，原創性得10分，$Cr = 0.1 \times 10 = 1$分。同樣都是A生的兩個獨特解法，得到的數學創造力的分數卻不相等。所以此評分規準可以從創造力觀點來評量相同學生解出不同解答的品質。

2. 可以評量出不同學生的創造力一樣但變通性和原創性卻不同

若A、B兩生都解相同的數學任務，B生用了解法n是課本的解法，B生解法的變通性得10分，原創性得0.1分，$Cr = 10 \times 0.1 = 1$分。而A生解法m很獨特但與其他解法類似，而B生的解法n是不同類別但例行性解法，兩人創造力分數都得到1分，其解法背後的意義不同，A生的解法m是原創性高但變通性低，B生的解法n個是原創性低但變通性高。

3. 評量規準評量的創造力不因解答出現順序不同而不同

若A生和B生的解法都相同，創造力總分應該相等。以求解聯立方程式$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$為例，A生的解法1是先消去$x$，解法2是先消去$y$；B生解法1是先消去$y$，解法2是先消去$x$。全班有超過40%的學生使用先消去$x$解法，全班有15% ~ 40%的學生使用先消去$y$解法。A生兩個解法得到的變通性分數分別為$Fx_1 = 10$分、$Fx_2 = 1$分，原創性得$Or_1 = 0.1$分、$Or_2 = 1$分，數學創造力得分是$10 \times 0.1 + 1 \times 1 = 2$分。B生的變通性分數分別為$Fx_1 = 1$分、$Fx_2 = 10$分，原創性得到$Or_1 = 1$分、$Or_2 = 0.1$分。B生的數學創造力得分是$1 \times 1 + 10 \times 0.1 = 2$分。兩人提出的解答順序不同，數學創造力總分都相等。

二、數學臆測任務的數學創造力評量架構

(一)為何修正自Leikin (2009)的多元解答任務的評量架構？

臆測任務的數學創造力評量架構，是修正自Leikin (2009)多元解答任務的10-1-0.1評量架構。為何本研究採用Leikin的評量架構作為修正的基礎？

1. 此架構有理論基礎及實證研究的驗證

Leikin (2009)提出此架構後，於不同研究對象、不同數學內容及不同研究場域，進行檢核及修正(Guberman & Leikin, 2013; Leikin, 2018; Leikin & Lev, 2013; Levav-Waynberg & Leikin, 2012)。諸如：以15%和40%作為不同原創性的決斷值，是基於透過相同的受試學生以筆試與訪談不同的資料蒐集方法的比較結果。他們從統計分析的實證研究證實該評量架構中的數學創造力包含多重元素，這些元素都是發散性思考的特徵。Leikin (2013)利用此評量架構對16 ~ 17歲的191位中學生探討資優(intelligence quotient > 130)與學優(數學成就優秀)因素對數學創造力的影響，結果發現同時具有資優與學優的學生在流暢性、變通性和原創性都顯著優於其他三群學生。

2. 此架構採用十進制計分法可反映出解題結果及解題過程

十進制計分不僅能反映個人的解題結果，且能回溯個人解題過程，有利於瞭解組內個別學生數學思考的特性，且有利於回溯個別學生在變通性或原創性表現的特質，作為後續的輔導與協助。變通性總分可以回溯該生提出有多少個是屬於不同類、同類相似或不相似的解答，例如：若某生的變通性總分31.2分，代表了該生一共提出6 = (3 + 1 + 2)個解答，且可分為三類、其中有三個解答屬於不同類別，一個解答和其他同類但不相似，二個解答是和其他相同類的解法非常類似。Leikin (2013)透過統計分析得到創造力和原創性的高度相關，證實原創性是決定創造力的關鍵元素，也發現學生具有一般資優特質，但不確保在數學一定資優。若要鑑定一般資優生是否為數學資優，可以從解答的創新性來決定，也就是，原創性是數學資優生的一項特質。

(二)為何不能直接採用Leikin (2009)的評量架構？

1. 數學臆測任務取代解題導向任務

多元解答任務是評量學生數學創造力的一個有效工具。數學臆測任務具有多元解答任務的兩個特點：(1)開放性：臆測任務能啟動學生提出多元的數學猜想。(2)高認知需求：依據Stein等(2000)的任務分析指引架構，數學臆測任務需要學生自己造例、觀察資料、尋找規律、提出發現的數學關係，而不是套用公式或記憶性數學知識來解答；臆測任務需要自我監控學習歷程，利用彙整單中的資料，互相檢驗猜想是否有憑有據。數學臆測任務可作為評量學生數學創造力的工具。

2. 分析對象以數學猜想取代數學解答

數學臆測任務分析的對象是數學猜想，而解題導向任務分析的對象是解答。一個數學臆測任務包含多個教學目標，由學生觀察及比較數據或算式，找到資料間的共通性及相異性，以發現數學關係，從不同角度提出多元的猜想。而Leikin (2009)的解題導向任務是關注在解決特定問題的特定解答，所以在數學臆測任務的脈絡下，數學創造力的分析對象需要以數學猜想取代數學解答。

3. 小組猜想空間和全班猜想空間比集體解答空間明確

多元解答任務以紙筆測驗讓學生個別解題，分類解答是由研究者或專家完成。數學臆測任務是將課本的教學目標融入於臆測任務設計並實踐於課堂中。在個別活動中提出個人猜想，在小組互動中彙整個人猜想為小組猜想，形成小組猜想空間；在全班討論中，彙整小組猜想為全班猜想，形成全班猜想空間(林碧珍，2019)。個人猜想是否屬於小組猜想空間，是變通性得分的依據；是否屬於全班猜想空間，是原創性和精緻性得分的依據；全班猜想空間組成元素都是課堂中師生共同的決定，再經由臆測教學研究團隊在會議討論中逐一檢核，降低全班猜想空間分類的錯誤。

4. 比解題導向任務多納入創造力的精緻性元素

Leikin (2009)評量架構沒有納入Torrance (1974)創造力的精緻性元素，因為數學問題的解答不具有概括性。精緻性是將想法描述清楚並將想法推論到一般情形。數學臆測任務分析的對象是數學猜想，具有概括性，概括性是可以一般化，恆真猜想可以一般化，比非恆真猜想較具概括性；非恆真猜想有些可修改使其為恆真猜想，有些則否。個人猜想是否為恆真或非恆真猜想，決定精緻性得分。

(三)臆測任務的數學創造力評量架構的評分規準

本研究的數學創造力評量架構包含臆測任務和學生的數學創造力兩種評分規準。1.任務的評分規準：是決定於專家猜想空間，專家猜想空間是由任務設計者預期的教學目標和非預期的教學目標組成。2.學生的數學創造力評分規準：是決定於個人猜想空間、小組猜想空間和全班猜想空間，這些都包含於專家猜想空間。

1.流暢性

臆測任務的流暢性是指專家猜想空間所有教學目標的數量，每一個教學目標各得1分，臆測任務的流暢性是專家猜想空間中所有教學目標的流暢性得分之總和。學生表現的流暢性是個人猜想空間猜想的數量，學生提出每一個有憑有據的正確猜想各得1分，流暢性是該生個人猜想空間中所有有憑有據猜想得分之總和。

2.變通性

臆測任務的變通性是指專家猜想空間所有教學目標的類別。每一個教學目標的變通性得10分、1分或0.1分，是決定於教學目標是不同類型、同一類型但不相似、同一類型又相似。臆測任務的變通性是專家猜想空間中所有教學目標的變通性得分之總和，即$Fx = \sum_{i=1}^{n} Fxi$，其中n是專家猜想空間教學目標的數量。

學生的變通性是指個人猜想空間中所有猜想的類別。每一猜想的變通性得10分、1分或0.1分，是決定於個人猜想是否為不同類、同類但不相似、同類且相似，且能成為小組猜想。學生的變通性是該生個人猜想空間中所有猜想的變通性之總分，為$Fx = \sum_{i=1}^{n} Fxi$，其中n為個人猜想空間猜想的數量。

3.原創性

臆測任務的原創性是指專家猜想空間所有教學目標的新穎性。每一個教學目標的原創性得10分、1分或0.1分，是決定於該教學目標是非預期、預期的不同類型、預期的同類型。臆測任務的原創性是專家猜想空間中所有教學目標的原創性得分之總和，即$Or = \sum_{i=1}^{n} Ori$，其中n是專家猜想空間教學目標的數量。

學生的原創性是指個人猜想空間中所有猜想的新穎性。所謂猜想的新穎性是決定於絕對性和相對性觀點，絕對性觀點是猜想必須新穎。相對性觀點是參照群體中其他學生的表現。學生的猜想若是獨特的且落在全班猜想人次的15%以內，則原創性得10分；若是非例行且落在全班猜想人次的15%～40%，則原創性得1分；若是例行性且超過全班猜想人次的40%，原創性得0.1分。學生的原創性是該生個人猜想空間中所有猜想的原創性得分之總和，即$Or = \sum_{i=1}^{n} Ori$，其中n是個人猜想空間的猜想數量。

4.精緻性(El)

臆測任務的精緻性是指專家猜想空間所有教學目標的概括性，教學目標的精緻性得10分、1分或0.1分，是決定於該教學目標是恆真猜想、非恆真但可成為恆真、非恆真但不可成為恆真。臆測任務的精緻性是所有教學目標的精緻性得分之總和，即$El = \sum_{i=1}^{n} Eli$，其中n是專家猜想空間教學目標的數量。

學生的精緻性是指個人猜想空間中所有猜想的概括性。學生提出的每一猜想的精緻性得10分、1分或0.1分，是決定於個人猜想成為全班猜想的恆真猜想、成為全班非恆真但可成為恆真的猜想、成為全班非恆真但

不可成為恆真的猜想。學生的精緻性是該生個人猜想空間中所有猜想的精緻性得分之總和，即$El = \sum_{i=1}^{n} Eli$，n是個人猜想空間的猜想數量。

5. 創造力

臆測任務的數學創造力是所有教學目標的流暢性、變通性、原創性和精緻性的得分乘積之總和，即$\sum_{i=1}^{n} Cri = \sum_{i=1}^{n} (Fli \times Fxi \times Ori \times Eli) = \sum_{i=1}^{n} (1 \times Fxi \times Ori \times Eli) = \sum_{i=1}^{n} (Fxi \times Ori \times Eli)$，其中$n$是專家猜想空間中所有教學目標的數量。學生的數學創造力是個人猜想空間中所有猜想的流暢性、變通性、原創性和精緻性得分的乘積之總和，即$\sum_{i=1}^{n} Cri = \sum_{i=1}^{n} (1 \times Fxi \times Ori \times Eli) = \sum_{i=1}^{n} (Fxi \times Ori \times Eli)$，其中$n$是個人猜想空間的所有猜想數量。

(四)學生在臆測任務表現的數學創造力評分規準的合理性

1. 為何原創性評分規準需要同時考慮絕對性和相對性觀點？

假設A生在數學程度稍微遜色的一個班級，提出一個以前學過的猜想，不具新穎性，且該猜想只有前3%學生提出。此時若只採用相對性觀點，原創性得10分，似乎不太合理。所以原創性除了參照全班學生的表現外，還必須考慮是否新穎，因此原創性需同時採用絕對性和相對性觀點。

2. 為何該評量架構的創造力四個構成要素彼此互相關連？

本研究評量架構的評分規準決定於個人猜想的數量與品質，而個人猜想的品質是決定於小組猜想空間及全班猜想空間。除了個人猜想空間外，變通性是決定於小組猜想空間，原創性和精緻性決定於全班猜想空間，理論上，創造力四個構成要素(流暢性、變通性、原創性及精緻性)彼此相關連，這些關連諸如：(1)流暢性高，變通性才會高；變通性高，原創性才會高；變通性高，精緻性才會高。(2)當A生的流暢性思考優於B生，不確保A生的變通性一定優於B生。(3)當C生的變通性思考優於D生，不確保C生的原創性一定會優於D生，例如：假若C生提出兩個不同類別都是全班60%學生也提出的、D生提出兩個類似猜想但全班只有5%學生提出，C生的變通性得20分，原創性得0.2分，而D生的變通性得10.1分，原創性得20分，得到C生的變通性分數比D生高，但原創性分數卻比D生低。

3. 可能存在某一個猜想得10分，但在流暢性、變通性或精緻性得0分嗎？

臆測任務的評量架構，是否存在某一個猜想的原創性得10分，但流暢性、變通性或精緻性得0分？這個情況在臆測任務脈絡下不可能發生。理由是：一個猜想的原創性若在全班的前15%而得10分，流暢性、變通性都不可能得0分，因為若流暢性得0分表示該猜想不存在，就不可能成為小組猜想及全班猜想，則變通性和原創性都得0分；若變通性得0分，表示個人猜想不能成為小組猜想，就不可能成為全班猜想，精緻性就得0分。也就是，流暢性得0分，則變通性、原創性和精緻性一定都得0分。但是若流暢性得1分，變通性、原創性和精緻性都可能得0分。例如：有憑有據描述表象但不能判斷真偽的猜想，不會成為小組猜想，變通性和精緻性都得0分。

肆、研究方法

一、研究架構

本研究將以數學創造力評量架構包含臆測任務和學生的數學創造力兩個評分規準檢驗兩個研究問題：(一)以任務的評分規準檢驗兩

個臆測任務的數學創造力有何不同？(二)以學生的評分規準檢驗學生表現的數學創造力有何不同？以瞭解評分規準項目的可行性。每個研究問題標示在圖1研究架構圖中的陰影區域。

同一位個案教師在106和108年度依據課本相同單元內容的教學目標設計臆測任務，108年度的任務是依據106年度的任務實踐於課堂後做了微調修改，分別融入於兩屆班級課堂實施教學，分別利用兩個評分規準評量任務和學生的數學創造力。控制變項包含相同的教材內容、相同的任務設計者且是相同的教學者。以相同教材內容為控制變項，是為了降低影響臆測任務的數學創造力的干擾因素；教學者為同一位教師為控制變項，是為了降低個人特質因素而影響數學創造力的不同。然而，在這兩年期間個案教師仍然持續參加臆測教學研究團隊，教學品質不斷力求精進，個案教師在兩屆班級的教學可能會影響兩屆學生的數學創造力表現，是本研究在研究設計上的限制。

二、研究樣本

(一)菁老師

本研究採立意取樣，以確保教師能設計臆測任務和學生能提出猜想。選取菁老師的兩屆五年甲班學生為樣本，是基於菁老師在106和108年度相隔兩年都是教五年級，分數乘法單元在這兩個年度都將臆測融入教學中。菁老師服務於新竹市一所中型小學，教學年資25年，具數學教育碩士學位。自2011年起加入數學臆測教學團隊，期間菁老師每學期都要進行一至二個不同單元的數學臆測任務設計與教學模組，是團隊中最熟稔於臆測任務的設計和實踐的一位教師。

(二)菁老師的兩屆學生

學生樣本是菁老師在106和108年度兩屆各23位學生。在五年級下學期的分數乘法教學前，菁老師對兩屆學生實施相同的分數乘法概念前測，兩屆學生的前測分數和五年級上學期數學學期分數的平均分數，分別為79.87和81.66分，經t考驗，t = -0.42，沒有顯著差異。兩屆學生都是進入五年級才開始接觸數學臆測

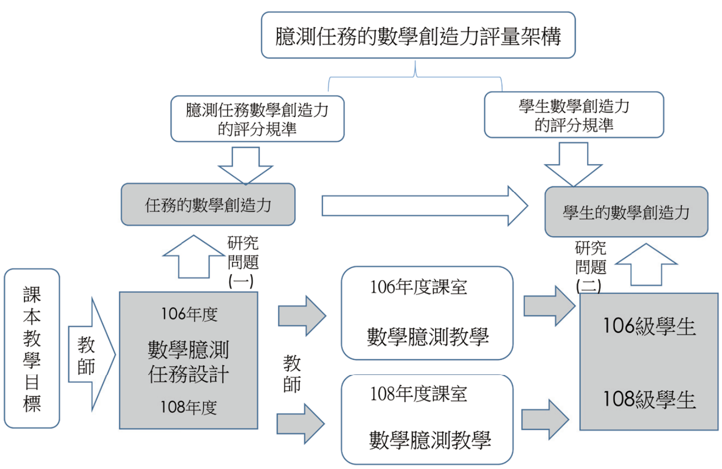


圖1：本研究的研究架構

教學，五年級下學期學習分數乘法之前，都僅有一個學期的臆測教學學習經驗。

三、兩屆的分數乘法臆測任務

菁老師將臆測任務以同構數據但數字不同的三套造例素材分配給全班六組學生，每套的造例任務都由兩組學生完成。106年度菁老師設計任務的考量是：(一)個人造例單的文字題包含「分數 × 整數」、「整數 × 分數」和「分數 × 分數」三種類型，其中分數包含真分數、假分數和帶分數。(二)每組有12個乘法問題，每組四人，每人解三題。(三)全班三套不同的造例素材，12題文字題的情境和數字組合都不同。108年度任務設計是依據106年度的任務設計實踐後而修改。主要修改兩個部分：(一)僅考慮「分數 × 分數」，因為「整數 × 分數」已引入分數倍語言；「分數 × 整數」是四年級的概念。(二)造例工作單，以畫圖表徵解題切入，如圖2。

四、臆測任務融入於數學課堂的實踐

將全班23位學生分為六組，異質性分組是兩屆課堂的座位安排方式，兩個任務各進行五堂課。臆測任務設計時都需緊扣臆測教學的每一個階段。第一是造例階段，先個人造例，再彙整為小組資料單，以便於觀察和發現穩定的數學規律。造例階段每組的例子數量與類型必須足夠，且數據必須預先考量第二階段的提出個人猜想，經由小組檢驗及歸類並彙整為小組猜想。第三是效化猜想階段，將小組猜想，利用全班他組或全班的更多例子，是否仍然支持小組猜想成立，並彙整為全班猜想，所以為了效化猜想，反駁例和支持例都必須納入任務設計的造例素材中。第四階段是一般化，將全班猜想推論到所有的例子都成立。將非恆真猜想加入限定範圍或條件，讓全班猜想放諸四海皆準。第五是證實階段，說服他人相信且接受自己的猜想(林碧珍，2019)。

五、資料蒐集與分析

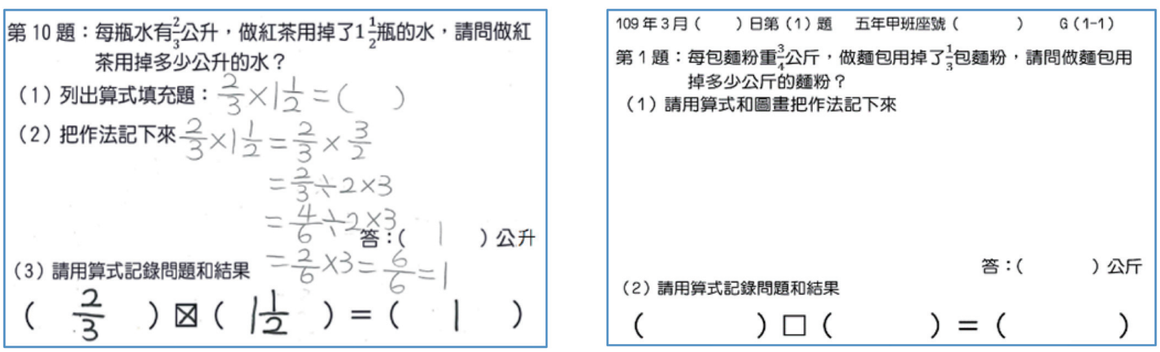
本研究蒐集的資料包含兩屆分數乘法臆測任務教案和兩屆各23位學生在課堂中完成的個人猜想、小組猜想和全班猜想。

(一)臆測任務的數學創造力分析

本研究利用表2的臆測任務的數學創造力評分規準分析兩個任務。

1. 臆測任務的變通性

不同類別的教學目標變通性分數得10



(a) (b)

圖2：(a) 106和(b) 108年度個人造例單

表2：臆測任務的數學創造力評量架構

猜想空間	流暢性(Fl)	變通性(Fx)	原創性(Or)	精緻性(El)	創造力(Cr)
臆測任務的數學創造力評分規準					
專家猜想空間	每個教學目標1分	$Fxi = 10$，不同類型的教學目標。 $Fxi = 1$，同類型不相似的教學目標。 $Fxi = 0.1$，同類型又相似的教學目標。	$Ori = 10$，非教師預期教學目標。 $Ori = 1$，教師預期的不同類教學目標。 $Ori = 0.1$，教師預期的同類型教學目標。	$Eli = 10$，成為恆真的教學目標。 $Eli = 1$，成為非恆真的教學目標但可成為恆真。 $Eli = 0.1$，非恆真的教學目標但不可成為恆真。	$Fxi \times Ori \times Eli$
總分	n	$\sum_{i=1}^{n} Fxi$	$\sum_{i=1}^{n} Ori$	$\sum_{i=1}^{n} Eli$	$\sum_{i=1}^{n} Fxi \times Ori \times Eli$
學生在臆測任務表現的數學創造力評分規準					
個人猜想空間	每個有憑有據猜想1分	$Fxi = 10$，成為小組猜想不同類的個人猜想。 $Fxi = 1$，成為小組猜想同類但不相似的個人猜想。 $Fxi = 0.1$，可成為小組猜想同類但相似的個人猜想。	$Ori = 10$，個人猜想落在全班猜想人次的15%以內。 $Ori = 1$，個人猜想落在全班猜想人次的15%～40%。 $Ori = 0.1$，個人猜想超過全班猜想人次的40%。	$Eli = 10$，成為全班恆真的猜想。 $Eli = 1$，成為全班非恆真的猜想但可成為恆真。 $Eli = 0.1$，成為全班非恆真的猜想但不可成為恆真。	$Fxi \times Ori \times Eli$
總分	n	$\sum_{i=1}^{n} Fxi$	$\sum_{i=1}^{n} Ori$	$\sum_{i=1}^{n} Eli$	$\sum_{i=1}^{n} Fxi \times Ori \times Eli$

註：n是所有有憑有據的正確猜想次數。

分、同類型不相似的教學目標得1分、同類型又相似的教學目標得0.1分。如「只要被乘數和乘數的分母和分子顛倒時，積就會等於1」及「在被乘數相同下，乘數是幾倍，積也會是幾倍」，在變通性各得10分。「分數乘法的關係中，被乘數相同時，乘數由大到小，積也會由大到小」，在變通性得1分。

2. 臆測任務的原創性

「分數乘法時，當乘數 < 1時，積會比被乘數小；乘數 = 1時，積會等於被乘數；乘數 > 1時，積會比被乘數大」是教師預期的教學目標，在原創性得1分；非課本的教學目標，原創性得10分，如「當分數乘法的被乘數相同時，乘數是幾倍，積也會是幾倍」及「只要被乘數和乘數的分母和分子顛倒時，積就會等於1」，在原創性各得10分。

3. 臆測任務的精緻性

專家猜想空間中的每個教學目標，若是描述性質或關係的教學目標，具概括性，精緻性得10分。若描述關係的非恆真可修改成為恆真的教學目標，精緻性得1分。若描述解題策略或運算策略的教學目標不能修改為恆真，則精緻性得0.1分。

4. 臆測任務的數學創造力

專家猜想空間中每個教學目標的創造力是變通性、原創性、精緻性得分的乘積($Cri = 1 \times Fxi \times Ori \times Eli$)，如表2。臆測任務的數學創造力分數是專家猜想空間中所有教學目標創造力的總和$Cr = \sum_{i=1}^{n} Cri = \sum_{i=1}^{n} (1 \times Fxi \times Ori \times Eli) = \sum_{i=1}^{n} (Fxi \times Ori \times Eli)$，$n$是教學目標的數量。

(二)學生表現的數學創造力分析

學生在臆測任務表現的數學創造力的資料經過六個步驟分析完成，分述如下。

1. 步驟1：整理個人猜想、小組猜想及全班猜想

表3第三欄位「第五組個人猜想」是組內四位學生共提出11個個人猜想，彙整成六個小組猜想(第二欄位「第五組小組猜想」)，以及全班猜想(第一欄位)。

2. 步驟2：建立猜想編碼系統

將兩屆學生的全班猜想分成四類：分數乘法的關係、算則、性質及運算策略。每類包含2 ~ 3個猜想，合計15個猜想，形成編碼系統表，如表3第四欄位「猜想編碼」。表中兩個猜想「S1-2每一張的積都一樣」及「S1-3乘數的分母都是4」，都是描述資料的表面現象，編碼為P。

3. 步驟3：計算每一個全班猜想的人次百分比

108級學生超過全班猜想人次15%的猜想是「被乘數的分母 × 乘數的分母 = 積的分母。分子 × 乘數的分子 = 積的分子」和「當乘數等於1時，積會等於被乘數」。106級學生超過15%的猜想是「整數 × 分數時只有積的分子變，分母不變。積的分子是整數 × 分子」。

4. 步驟4：依據評分規準對每位學生個人猜想在變通性、原創性、精緻性評分

以第五組的四位學生分別提出2、3、3、3個，共11個個人猜想。在原創性得分，除了座號1描述現象的兩個猜想外，其他九個個人猜想都彙整成六個小組猜想，並成為全班猜想，而C2和C5的人次百分比均超過15%，所以原創性得1分；而其餘猜想的人次均小於15%，原創性都得10分，如表3的*Or*欄位。

5. 步驟5：計算每位學生及各組的流暢性、變通性、原創性、精緻性及創造力的總分

如第五組學生的流暢性為11分、變通性為90分、原創性為54分、精緻性為72分，數學創造力總分為4,410分。

表3：資料分析的六個步驟：108級第五組為例

全班猜想	第五組小組猜想	第五組個人猜想	猜想編碼	流暢性	變通性	原創性	精緻性	創造力
C1當乘數小於1時，積會小於被乘數。	5-1乘數是真分數時，就是積 < 被乘數。	S16-1乘數是真分數時，就是積 < 被乘數。	R-M0.1P	1	10	10	10	1,000
		S20-2每個被乘數和乘數分子相乘就 = 積的分子。	A-FF0n	1	10	10	10	1,000
C5被乘數的分母 × 乘數的分母 = 積的分母。被乘數的分子 × 乘數的分子 = 積的分子。	5-2每一個被乘數和乘數分母相乘就是積的分母。	S20-1每個被乘數和乘數分母相乘就 = 積分母。	A-FF0d	1	10	1	10	100
		S8-1每一個被乘數和乘數分母相乘就是積的分母。	A-FF0d	1	10	1	10	100
C2當乘數等於1時，積會等於被乘數。	5-3當乘數是$\frac{4}{4}$，積都是 = 被乘數。	S8-2乘數是$\frac{4}{4}$，所以積都是 = 被。	R-M1P	1	10	1	1	10
		S16-2乘數是$\frac{4}{4}$ = 1是積 = 被乘數。	R-M1P	1	10	1	10	100
C6當被乘數和乘數的分母和分子顛倒時，積就會等於1。	5-4被乘數、乘數的分子、分母相反積就 = 1。	S20-3被乘數、乘數的分子、分母互換積就 = 1。	N1	1	10	10	10	1,000
C4當乘數一樣時，積和被乘數的大小關係也一樣。	5-5每一張的乘數都一樣，積和被乘數關係也一樣。	S1-1乘數都一樣時，積和被乘數的大小也一樣。	R-MP	1	10	10	10	1,000
		S1-2 每一張的積都一樣。	P	1	0	0	0	0
		S1-3 乘數的分母都是4。	P	1	0	0	0	0
C8假分數乘假分數等於假分數。	5-6當乘數$\frac{4}{4}$，假分數 × 假分數等於假分數。	S8-3乘數是$\frac{4}{4}$的那一類，假分數 × 假分數等於假分數。	Ni	1	10	10	1	100
總和				11	90	54	72	4,410

註：1. C*i*表示全班猜想序號；5-6表示第五組的第六個小組猜想；S8-3表示座號8學生的第三個個人猜想。

2. 猜想編碼說明：P：分數乘法的現象；Ni：假分數乘以假分數 = 假分數；N1：被乘數和乘數的分子與分母顛倒時，積就會等於1；R-MP：固定乘數，被乘數和積的關係；R-M1P：當乘數等於1時，積會等於被乘數；R-M0.1P：當乘數小於1時，積會小於被乘數；A-FF0d：被乘數的分母 × 乘數的分母 = 積的分母；A-FF0n：被乘數的分子 × 乘數的分子 = 積的分子。

6. 步驟6：統計兩屆學生個人及各組的流暢性、變通性、原創性、精緻性及創造力的總分

依據研究問題製作統計表，並以t考驗檢定是否達雙尾的.05的顯著性差異。

六、資料的信效度

本研究在資料分析的三角校正，是由研究團隊共同檢核：(一)臆測任務的教學目標分類是否適當，是在提升專家猜想空間的內容效度；(二)個人猜想是否正確歸類為小組猜想，是在提升小組猜想空間的內容效度；(三)小組猜想是否正確歸類為全班猜想，是在提升全班猜想空間的內容效度。

資料分析者的信度是由研究者和一位研究生專業教師，依據分數乘法的猜想編碼架構，各自先對106級學生個人猜想進行編碼。分析資料需要討論取得共識，包含：(一)精緻性的給分：若猜想內容中是以特定例子描述，該猜想為非恆真猜想，精緻性得1分，例如：「S6-2在等於1的乘數都是$\frac{3}{3}$，積都和被乘數一樣」。(二)描述表象的判定：若猜想內容只是描述小組彙整單上的數據所呈現的事實，例如：「S1-3乘數的分母都是4」。針對以上所述的問題溝通後，兩位資料分析者再針對106級學生的100個個人猜想分別編碼，全部出現兩個編碼不同，得到的相關一致性 = 兩人相同編碼次數／總編碼次數 × 100%，一致性達到100%。接著，108級學生提出91個個人猜想，由作者獨自編碼完成。

伍、研究結果

一、以臆測任務的數學創造力評分規準檢驗兩個任務的數學創造力

表4是分數乘法臆測任務的專家猜想空間，包含15個教學目標。前七項是兩個任務共同的教學目標，第4項、第9 ~ 15項兩個任務沒有共同的教學目標。教學目標可分成四類：(一)分數乘法的關係，如分數乘法，乘數 < 1時，積 < 被乘數；乘數 > 1時，積 > 被乘數；乘數 = 1時，積 = 被乘數。(二)分數乘法的算則，如分數 × 分數，被乘數和乘數的分子 × 分子 = 積的分子，被乘數和乘數的分母 × 分母 = 積的分母。(三)分數乘法的性質，如真分數 × 真分數 = 真分數。(四)分數乘法的運算策略，如假分數約分後得到另外的等值分數。

針對106和108年度兩個常態母群體進行變異數F檢定後，未達顯著性水準，因此以兩個常態母群體假設變異數相等，以t考驗進行兩個任務的數學創造力各項元素的平均數考驗，結果發現：

(一)兩個任務的數學創造力沒有顯著差異。兩個平均分數380.00和203.50分，經t考驗，結果未達顯著水準，t = -0.87，p = .39。有三項教學目標的創造力分數最高(皆為1,000分)，是最適合啟動學生的創造力。這些目標是C6「當分數乘法的被乘數相同時，乘數是幾倍，積也會是幾倍」、C8「只要被乘數和乘數的分母和分子顛倒時，積就會等於1」，以及C11「真分數乘以真分數等於真分數」。

(二)兩個任務的變通性、原創性及精緻性均沒有顯著差異。106和108年度任務變通性平均數分別為9.18和8.00分，經t考驗未達顯著水準，t = 0.79，p = .44；在原創性平均數分別為3.00和5.00分，經t考驗未達顯著水準，t = -1.26，p = .22；在精緻性平均數分別為5.75和9.00分，經t考驗未達顯著水準，t = -1.81，p = .09。

表4：106和108年度的分數乘法臆測任務專家猜想空間比較

專家猜想空間	流暢性	變通性	原創性	精緻性	創造力	106年度	108年度
分數乘法的關係	6	51	15	60	1,410	1,310	1,410
C1分數乘法時，乘數 > 1時，積會比被乘數大	1	10	1	10	100	✓	✓
C2分數乘法時，乘數 = 1時，積會等於被乘數	1	10	1	10	100	✓	✓
C3分數乘法時，當乘數 < 1時，積會比被乘數小	1	10	1	10	100	✓	✓
C4當分數乘法的乘數相同時，被乘數越大／小，積也會越大／小	1	10	1	10	100	–	✓
C5當分數乘法的被乘數相同時，乘數由大到小，積也會由大到小	1	1	1	10	10	✓	✓
C6當分數乘法的被乘數相同時，乘數是幾倍，積也會是幾倍	1	10	10	10	1,000	✓	✓
分數乘法的算則	4	40	13	13	1,030	1,030	1,010
C7只要是分數 × 分數(包含真分數和假分數)，被乘數和乘數的分母 × 分母 = 積的分母，被乘數和乘數的分子 × 分子 = 積的分子	1	10	1	1	10	✓	✓
C8只要被乘數和乘數的分母和分子顛倒時，積就會等於1	1	10	10	10	1,000	✓	✓
C9只要是整數 × 分數，積只有分子變、分母不變。積的分子是被乘數和乘數分子的倍數，也就是整數乘以乘數的分子	1	10	1	1	10	✓	–
C10只要是分數 × 整數，積只有分子變、分母不變。積的分子是被乘數分子和乘數的倍數，也就是被乘數的分子 × 整數 = 積的分子	1	10	1	1	10	✓	–
分數乘法的性質	3	21	21	30	1,200	100	1,100
C11真分數乘以真分數等於真分數	1	10	10	10	1,000	–	✓
C12假分數乘假分數等於假分數	1	1	10	10	100	–	✓
C13整數 × 分數和分數 × 整數的積是分數或整數	1	10	1	10	100	✓	–
分數乘法的運算策略	2	20	2	0.2	2	2	0
C14只要分數乘法的假分數和帶分數大小一樣，答案也會一樣	1	10	1	0.1	1	✓	–
C15假分數約分後，會跟另一個答案一樣	1	10	1	0.1	1	✓	–
106年度臆測任務總分	12	111	30	73	2,442		
108年度臆測任務總分	10	82	46	91	3,520		

註：✓代表改年度臆測任務出現的預期教學目標。

(三)108年度的任務在流暢性和變通性都比106年度略低，但在原創性和精緻性卻略高於106年度。進一步分析表4的資料發現：教學目標若考量分數乘法的關係或性質，較有利於啟動學生的原創性和精緻性思考；若教學目標考量分數乘法的運算策略和算則，較有利於啟動學生的流暢性和變通性思考。

二、以學生的數學創造力評分規準檢驗兩屆學生表現的數學創造力

表5是在沒有顯著性差異的兩個任務下，數學程度差不多的兩屆學生在數學創造力各項元素表現的之平均數、標準差和*t*值。106和108級學生表現的數學創造力平均分數分別為613.71和921.94分，經過*t*考驗後，$t = -1.28$，$p = .21$，沒有達到顯著性水準。進一步考驗兩屆學生在數學創造力各元素表現的平均分數，發現除了精緻性達到極顯著性差異外，其他均沒有達到顯著差異。

(一)兩屆學生表現的精緻性

表5的資料顯示106和108級學生的精緻性平均分數分別為13.15和22.97，經過*t*考驗後達到極顯著性水準，$t = -2.71$，$p < .01$，108級學生在精緻性表現顯著優於106級學生。進一步分析兩屆學生在精緻性表現的差異，如表6。

雖然106級學生能提出的猜想平均數量比108級學生多，但106級有35%提出非恆真猜想(*El*得10分的106級學生的猜想數量為0)多於108級的9%學生。也就是此評分規準可以瞭解106級學生的流暢性優於108級學生，但不確保在精緻性一定優於108級學生。

恆真猜想中，108級有34%的學生提出至少3個恆真猜想(*El*得10分，對應的猜想數量≥

表5：兩屆學生在創創造力各項元素表現的數學創造力之平均數和標準差

學生表現的數學創造力元素	平均數		標準差			
	106年度	108年度	106年度	108年度	*t*	*p* (雙尾)
數學成績分數	79.87	81.66	14.42	14.63	-0.42	.68
流暢性	4.07	3.55	1.75	1.33	0.83	.41
變通性	22.65	26.81	9.18	11.06	-1.19	.24
原創性	16.55	14.47	11.24	12.16	-1.51	.14
精緻性	13.15	22.97	9.99	13.45	-2.71	< .01
創造力	613.71	921.94	785.80	843.05	-1.28	.21

表6：兩屆學生表現的數學創造力各項元素的猜想數量人數百分比之比較

		106級學生提出猜想數量				108級學生提出猜想數量			
猜想項目	創造力元素	0	1～2	3～4	5以上	0	1～2	3～4	5以上
猜想數量	流暢性(*Fl*)	0 (0%)	4 (17%)	10 (43%)	9 (39%)	0 (0%)	5 (22%)	13 (56%)	5 (22%)
猜想類別	變通性(*Fx*)	0 (0%)	14 (61%)	9 (39%)	0 (0%)	0 (0%)	12 (52%)	11 (48%)	0 (0%)
得10分數量	原創性(*Or*)	3 (13%)	17 (74%)	3 (13%)	0 (0%)	5 (26%)	13 (57%)	5 (17%)	0 (0%)
得10分數量	精緻性(*El*)	8 (35%)	12 (52%)	3 (13%)	0 (0%)	2 (9%)	13 (57%)	7 (30%)	1 (4%)

3)，多於106級的13%的學生；也就是此評分規準可以瞭解108級學生的精緻性優於106級學生。

(二)兩屆學生表現的流暢性

表5發現兩屆學生表現的流暢性在統計上沒有顯著性差異，106和108級學生在流暢性的平均數分別為4.07和3.55分，經t考驗，得到t = 0.83，p = .41，未達顯著水準。再進一步分析兩屆學生在流暢性卻有些微差異，如表6的資料顯示，兩屆每位學生都至少能提出一個猜想，如表6中流暢性(*Fl*對應的猜想數量為0)的百分比，兩屆學生均為0。由表5及表6資料綜合得到，106和108年度流暢性的平均分數分別為4.07和3.55分，每人平均可以提出4.07和3.55個猜想，且每位至少都能提出一個猜想，含無效和有效猜想。

(三)兩屆學生表現的變通性

表5發現兩屆學生的變通性在統計上沒有顯著性差異，106和108級學生在變通性的平均數分別為22.65和26.81分，經t考驗，得到t = -1.19，p = .24，未達顯著水準。再進一步分析兩屆學生的變通性在品質上卻有些微差異，如表6。

兩屆學生提出的猜想中，都包含了無效猜想及有效猜想。106級有74%的學生和108級有93%的學生提出有效猜想。有效猜想的四類包含分數乘法的關係、算則、性質、運算策略。這四類中，106級學生以提出「整數 × 分數」算則的人數(36%)最多，而108級學生以提出「被乘數、乘數與積」三者的關係的人數(43%)最多。

108級學生有48%提出3 ~ 4種的猜想類型(如表6之*Fx*)，比106級39%的學生多。

(四)兩屆學生表現的原創性

兩屆學生的原創性在統計上沒有顯著性差異。表5資料顯示106和108級學生在原創性的平均數分別為16.55和14.47分，經t檢定未達顯著水準，t = -1.51，p = .14。再進一步分析發現兩屆學生在原創性的品質有些微差異，如表6。

108級有26%的學生提出例行性猜想(*Or* = 10對應數量0)比106級(13%)多(約2倍)，但提出創新猜想的人數比106級的學生數少。兩屆學生中，以提出一至二個創新猜想的人數最多(*Or* = 10對應數量1 ~ 2)，106和108級分別為74%和57%。這兩屆學生提出的四個原創性猜想為：1.當被乘數和乘數的分母和分子顛倒時，得到的積 = 1；2.被乘數相同時，乘數變為幾倍，積就會變為幾倍；3.真分數 × 真分數 = 真分數；4.假分數 × 假分數 = 假分數。

(五)臆測任務中具有高品質數學創造力的教學目標學生表現的數學創造力

前述研究結果得到三項教學目標最有潛力提升學生的數學創造力：C6「當分數乘法的被乘數相同時，乘數是幾倍，積也會是幾倍」；C8「只要被乘數和乘數的分母和分子顛倒時，積就會等於1」；以及C11「真分數乘以真分數等於真分數」。這些在臆測任務中具有驅動數學創造力的教學目標，經過數學臆測教學後，是否能確保學生使用後的表現仍維持數學創造力最高分數1,000分？

表7的資料發現，108級學生分別有六位、五位及三位學生提出這三個教學目標，他們的數學創造力分數都得到1,000分。同樣地，在106級分別有一位及七位學生提出兩個教學目標C6和C8，數學創造力平均分數是最高分數1,000分。本研究證實臆測任務中最具

表7：學生在臆測任務中具有驅動高數學創造力三個教學目標(創造力等於1,000分)表現的數學創造力

教學目標類別及代碼	分數乘法關係教學目標(C6)		分數乘法算則教學目標(C8)		分數乘法性質教學目標(C11)	
	106級	108級	106級	108級	106級	108級
提出教學目標的學生代碼	S4-12-7	S2-4-2, S2-17-2, S4-10-2, S4-21-4, S5-20-3, S6-9-2	S2-1-3, S2-6-2, S3-16-3, S3-7-3, S3-17-1, S5-18-4, S6-23-3	S2-17-1, S4-14-4, S4-10-4, S4-21-4, S5-8-3	–	S1-24-4, S3-7-6, S4-10-2
數學創造力平均分數(分)	1,000	1,000	–	1,000	1,000	1,000

註：S4-10-2表示第四組學生座號10提出的第二個猜想。

有驅動數學創造力的教學目標，經過臆測教學實踐後，能確保學生維持最高品質的數學創造力。

陸、結論與討論

本研究建立臆測任務的數學創造力評量架構，利用兩個評分規準，以檢驗兩個分數乘法臆測任務的數學創造力及兩屆學生表現的數學創造力。依據兩個研究問題得到的結論如下。

一、評量架構能從數學創造力觀點評量臆測任務的品質

從數學創造力觀點，臆測任務的評量架構可以用來評量臆測任務的特性。如本研究發現106年度的分數乘法臆測任務有利於啟動學生的流暢性和變通性思考，而108年度的任務有利於啟動學生的原創性和精緻性思考。這些特性決定於教師在設計臆測任務時預期的教學目標，若任務的教學目標與算則或運算策略有關，則有利於啟動學生的流暢性和變通性，若任務的教學目標是與分數的乘法性質或關係，則有利於啟動學生的原創性和精緻性。換言之，若要培養五年級學生的原創性及精緻性思考，設計臆測任務時的預期教學目標，可以考慮包含(一)當乘數小於／等於／大於1時，積會小於／等於／大於被乘數；(二)當被乘數和乘數的分母和分子顛倒時，得到的積 = 1；(三)被乘數相同時，乘數變為幾倍，積就會變為幾倍；(四)真分數 × 真分數 = 真分數；假分數 × 假分數 = 假分數。以這三項教學目標最具有驅動學生的數學創造力。一個任務的品質可以從不同面向來評價，除了從任務是否具有挑戰性(Leikin & Elgrably, 2020)，或者是否具有高認知的需求(Stein et al., 2000)之外，本研究發現數學創造力也可以作為評量臆測任務品質的一個面向。

二、評量架構能評量學生表現的流暢性、變通性、原創性和精緻性思考

本研究建立的臆測脈絡下學生的數學創造力評量架構能評量學生表現的流暢性、變通性、原創性及精緻性。流暢性決定於猜想的數量；變通性決定於猜想的類別；原創性決定猜想的新穎性；精緻性是決定於猜想的概括性。本評量架構可以分別評量出個人、小組及全班的流暢性、變通性、原創性和精緻性；不僅能瞭解各成員對小組數學創造力

貢獻度；而且能瞭解各組學生對全班數學創造力貢獻度。本評量架構的評分規準，能凸顯個人在小組或全班活動扮演的認知角色和功能，評量分數不僅是數學創造的結果也是創造的歷程，這些都是構成臆測任務評量架構的集體解答空間，這是本研究的臆測任務的評量架構不同於Leikin (2009)解題導向任務的評量架構之處。本研究將集體解答空間細分為小組猜想空間和全班猜想空間，小組活動形成的小組猜想空間和全班活動形成的全班猜想空間，都可提升個人猜想品質，因而提升數學創造力，也就是小組活動和全班活動會影響學生的數學創造力品質。如何透過小組活動或全班活動有效提升個人數學創造力，是未來建議探究的主題。本評量架構適用於臆測任務融入於數學課堂的脈絡，需要教學中涉及個人活動、小組活動和全班活動，是臆測任務的數學創造力評量架構的特色，但也是本評量架構的局限性。

三、評量架構納入數學創造力精緻性元素的可行性

本評量架構納入精緻性為數學創造力第四個組成元素。臆測任務的數學創造力評量架構能用來評量任務的教學目標特性，不同的教學目標具有不同潛能來驅動學生的數學創造力。本研究證實臆測任務中最具有驅動數學創造力的教學目標，經過臆測教學實踐後，能確保學生維持最高品質的數學創造力。本研究得到此結果，可以提供說明Stein等(2000)提出高認知需求的任務實踐於課堂教學，能保證學生習得高認知思考(Stein et al.)的一個研究案例。

本評量架構納入精緻性指標，比Leikin (2009)評量架構更適合用來評量數學任務的數學創造力。諸如：本研究得到任務中具有概括性的教學目標，能驅動學生的精緻性思考。108年度的臆測任務設計關注於分數乘法的性質或關係的教學目標，確實有利於學生的精緻性思考，表現優於106年度的學生。精緻性是決定學生數學創造力的一項重要指標。相對於Leikin (2013)提出原創性是數學創造力的關鍵性指標，本研究發現精緻性也是數學創造力的決定性指標。至於臆測任務脈絡下的數學創造力評量架構的流暢性、變通性、原創性、精緻性四個元素之間的相關性或相互影響，是未來可以探討的主題。

誌謝

感謝科技部科教發展及國際合作司提供經費補助專題研究計畫「以課堂教學導向促進學生數學學習的教師專業發展：學生+教師+培育者——(總計畫含子計畫一)發展學生論證的在職教師專業發展：以臆測教學為進路」(編號：MOST 104-2511-S-134-003-MY3)與人文及社會科學研究發展司「師培者協助在職教師發展學生素養的教師專業發展」(編號：MOST 107-2511-H-007-004-MY3)。感謝菁菁老師和參與研究計畫的所有教師支持、研究生和助理幫忙資料蒐集和分析。

參考文獻

1. 呂玉琴、吳宣鋒(2015)。國小數學資優生解尋求規律數學問題的表現。**國民教育**，**55**(4)，67-72。

[Leu, Y.-C., & Wu, S.-F. (2015). The performance of elementary school mathematically-gifted students in finding mathematics patterns. *Elementary Education*, *55*(4), 67-72.]

2. 吳雅晴、李心儀(2017)。探討國小師資培育生提升學生數學創造力之教學活動設計。**教師專業研究期刊**，**13**，1-36。

   [Wu, Y.-C., & Lee, S.-Y. (2017). A study of the instructional design that may enhance mathematical creativity by elementary school prospective teachers. *Journal of Professional Teacher*, *13*, 1-36.]

3. 吳衛東、林碧珍、章勤瓊(2018)。變學科邏輯為教學邏輯：臺灣「素養導向臆測教學模式」的教育學審視。**教育發展研究**，**20**，62-67。

   [Wu, W.-D., Lin, P.-J., & Zhang, Q.-Q. (2018). From subject logic to pedagogical logic: An educational view on “literacy-oriented conjecturing teaching model” of Taiwan. *Research in Educational Development*, *20*, 62-67.]

4. 林碧珍(2015)。國小三年級課室以數學臆測活動引發學生論證初探。**科學教育學刊**，**23**(1)，83-110。doi:10.6173/CJSE.2015.2301.04

   [Lin, P.-J. (2015). The exploration of conjecturing provoking argumentation of mathematics in a third grade classroom. *Chinese Journal of Science Education*, *23*(1), 83-110. doi:10.6173/CJSE.2015.2301.04]

5. 林碧珍(2019)。主編序。收錄於林碧珍(編著)，**數學臆測任務設計與實踐：整數、分數與小數篇**(頁v-viii)。臺北市：師大書苑。

   [Lin, P.-J. (2019). Zhubianxu. In P.-J. Lin (Ed.), *Shuxue yice renwu sheji yu shijian: Zhengshu fenshu yu xiaoshupian* (pp. v-viii). Taipei, Taiwan: Shtabook.]

6. 林碧珍(2020)。素養導向的數學臆測教學模式。**小學教學**，**1**，8-11。

   [Lin, P.-J. (2020). Suyang daoxiang de shuxue yice jiaoxue moshi. *Xiaoxue Jiaoxue*, *1*, 8-11.]

7. 侯雅齡(2009)。幼兒資優特質與科學創造力之關係：心流經驗之中介效果。**特殊教育研究學刊**，**34**(2)，101-118。doi:10.6172/BSE200907.3402005

   [Hou, Y.-L. (2009). The relationship between the gifted traits of preschool children and scientific creativity: The mediating effect of the flow experience. *Bulletin of Special Education*, *34*(2), 101-118. doi:10.6172/BSE200907.3402005]

8. 教育部(2003)。**創造力教育白皮書**。臺北市：作者。

   [Ministry of Education. (2003). *White paper of creative education*. Taipei, Taiwan: Author.]

9. 國家教育研究院(2014年11月28日)。**十二年國民基本教育課程綱要：總綱**。查詢日期：2020年4月21日，檢自https://www.naer.edu.tw/upload/1/16/doc/288/%E5%8D%81%E4%BA%8C%E5%B9%B4%E5%9C%8B%E6%95%99%E8%AA%B2%E7%A8%8B%E7%B6%B1%E8%A6%81%E7%B8%BD%E7%B6%B1.pdf。

   [National Academy for Educational Research. (2014, November 28). *Curriculum guidelines of 12-*

year basic education: General guidelines. Retrieved April 21, 2020, from https://www.naer.edu.tw/upload/1/16/doc/288/%E5%8D%81%E4%BA%8C%E5%B9%B4%E5%9C%8B%E6%95%99%E8%AA%B2%E7%A8%8B%E7%B6%B1%E8%A6%81%E7%B8%BD%E7%B6%B1.pdf]

10. 曾千芝、曾麗錚、黃博聖(2017)。本國籍子女與新移民子女在數學成就與數學創造力的相關研究——以桃園地區國小六年級生為例。**創造學刊**，**8**(2)，1-18。

    [Tseng, C.-C., Tseng, L.-C., & Huang, P.-S. (2017). The relationship between mathematic achievement and mathematic creativity among native and immigrant sixth grade students of Taoyuan city. *Journal of Chinese Creativity*, *8*(2), 1-18.]

11. 彭淑玲、陳學志、黃博聖(2015)。當數學遇上創造力：數學創造力測量工具的發展。**創造學刊**，**6**(1)，83-107。

    [Peng, P.-S., Chen, H.-C., & Huang, P.-S. (2015). When mathematics encounters creativity: The development of a measuring tool for mathematical creativity. *Journal of Chinese Creativity*, *6*(1), 83-107.]

12. 劉祥通、洪筱楠(2020)。五年級資優生在非例行性數線問題解題表現的個案研究。**臺灣數學教師期刊**，**41**(1)，1-25。doi:10.6610/TJMT.202004_41(1).0001

    [Liu, S.-T., & Horng, S.-J. (2020). Wunianji ziyousheng zai feilixingxing shuxian wenti jieti biaoxian de gean yanjiu. *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*, *41*(1), 1-25. doi:10.6610/TJMT.202004_41(1).0001]

13. Akgül, S., & Kahveci, N. G. (2017). Developing a model to explain the mathematical creativity of gifted students. *European Journal of Education Studies*, *3*(8), 125-147. doi:10.5281/zenodo.822804

14. Cañadas, M. C., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D., & Yevdokimov, O. (2007). The conjecturing process: Perspectives in theory and implications in practice. *Journal of Teaching and Learning*, *5*(1), 55-72. doi:10.22329/jtl.v5i1.82

15. Cropley, A. (2006). Functional creativity: A socially-useful creativity concept. *Baltic Journal of Psychology*, *7*(1), 26-38.

16. Ervynck, G. (1991). Mathematical creativity. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 42-53). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer. doi:10.1007/0-306-47203-1_3

17. Finke, R. A., Ward, T. B., & Smith, S. M. (1992). *Creative cognition: Theory, research, and applications*. Cambridge, MA: MIT Press.

18. Guberman, R. & Leikin, R. (2013). Interesting and difficult mathematical problems: Changing teachers' views by employing multiple-solution tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(1), 33-56. doi:10.1007/s10857-012-9210-7

19. Guilford, J. P. (1967). *The nature of human intelligence*. New York, NY: McGraw-Hill. doi:10.1126/science.162.3857.990-a

20. Haavold, P. Ø. (2018). An empirical investigation of a theoretical model for mathematical creativity. *The Journal of Creative Behavior*, *52*(3), 226-239. doi:10.1002/jocb.145
21. Haylock, D. (1997). Recognising mathematical creativity in schoolchildren. *ZDM—Mathematics Education*, *29*(3), 68-74. doi:10.1007/s11858-997-0002-y
22. Hong, E., & Milgram, R. M. (2010). Creative thinking ability: Domain generality and specificity. *Creativity Research Journal*, *22*(3), 272-287. doi:10.1080/10400419.2010.503535
23. Jeon, K.-N., Moon, S. M., & French, B. (2011). Differential effects of divergent thinking, domain knowledge, and interest on creative performance in art and math. *Creativity Research Journal*, *23*(1), 60-71. doi:10.1080/10400419.2011.545750
24. Kaufman, J. C., & Beghetto, R. A. (2009). Beyond big and little: The Four C Model of creativity. *Review of General Psychology*, *13*(1), 1-12. doi:10.1037/a0013688
25. Klein, S., & Leikin, R. (2020). Opening mathematical problems for posing open mathematical tasks: What do teachers do and feel? *Educational Studies in Mathematics*, *105*(3), 349-365. doi:10.1007/s10649-020-09983-y
26. Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago, IL: University of Chicago Press.
27. Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 129-145). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers. doi:10.1163/9789087909352_010
28. Leikin, R. (2013). Evaluating mathematical creativity: The interplay between multiplicity and insight. *Psychological Test and Assessment Modeling*, *55*(4), 385-400.
29. Leikin, R. (2018). Openness and constraints associated with creativity-directed activities in mathematics for all students. In N. Amado, S. Carreira, & K. Jones (Eds.), *Broadening the scope of research on mathematical problem solving* (pp. 387-397). Cham, Switzerland: Springer. doi:10.1007/978-3-319-99861-9_17
30. Leikin, R., & Elgrably, H. (2020). Problem posing through investigations for the development and evaluation of proof-related skills and creativity skills of prospective high school mathematics teachers. *International Journal of Educational Research*, *102*. Retrieved April 18, 2020, from https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.04.002
31. Leikin, R., & Lev, M. (2007). Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity. In J.-H. Woo, H.-C. Lew, K.-S. Park, & D.-Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 161-168). Seoul, South Korea: Korean Society of Educational Studies in Mathematics.
32. Leikin, R., & Lev, M. (2013). Mathematical creativity in generally gifted and mathematically excelling adolescents: What makes the difference? *ZDM—Mathematics Education*, *45*(2), 183-

197. doi:10.1007/s11858-012-0460-8

33. Leikin, R., & Pitta-Pantazi, D. (2013). Creativity and mathematics education: The state of the art. *ZDM—Mathematics Education*, *45*(2), 159-166. doi:10.1007/s11858-012-0459-1

34. Levav-Waynberg, A. & Leikin, R. (2012). The role of multiple solution tasks in developing knowledge and creativity in geometry. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(1), 73-90. doi:10.1016/j.jmathb.2011.11.001

35. Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically* (2nd ed.). London, UK: Pearson Education.

36. Milgram, R. M., & Hong, E. (2009). Talent loss in mathematics: Causes and solutions. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 149-163). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

37. Polya, G. (1973). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

38. Runco, M. A., & Jaeger, G. J. (2012). The standard definition of creativity. *Creativity Research Journal*, *24*(1), 92-96. doi:10.1080/10400419.2012.650092

39. Shriki, A. (2010). Working like real mathematicians: Developing prospective teachers' awareness of mathematical creativity through generating new concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(2), 159-179. doi:10.1007/s10649-009-9212-2

40. Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM—Mathematics Education*, *29*(3), 75-80. doi:10.1007/s11858-997-0003-x

41. Silver, E. A., & Mesa, V. (2011). Coordinating characterizations of high quality mathematics teaching: Probing the intersection. In Y. Li & G. Kaiser (Eds.), *Expertise in mathematics instruction: An international perspective* (pp. 63-84). Boston, MA: Springer. doi:10.1007/978-1-4419-7707-6_4

42. Sriraman, B. (2005). Are giftedness and creativity synonyms in mathematics? *Journal of Secondary Gifted Education*, *17*(1), 20-36. doi:10.4219/jsge-2005-389

43. Sriraman, B. (2017). Mathematical creativity: Psychology, progress and caveats. *ZDM—Mathematics Education*, *49*(7), 971-975. doi:10.1007/s11858-017-0886-0

44. Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. New York, NY: Teachers College Press.

45. Sternberg, R. J., & Lubart, T. I. (1996). Investing in creativity. *American Psychologist*, *51*(7), 677-688. doi:10.1037/0003-066X.51.7.677

46. Sweller, J., van Merrienboer, J. J. G., & Paas, F. (2019). Cognitive architecture and instructional design: 20 years later. *Educational Psychology Review*, *31*(2), 261-292. doi:10.1007/s10648-

019-09465-5

47. Torrance, E. P. (1974). *Torrance tests of creative thinking*. Princeton, NJ: Personal Press/Ginn and Company.
48. Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
49. Weisberg, R. W. (2015). Toward an integrated theory of insight in problem solving. *Thinking & Reasoning*, *21*(1), 5-39. doi:10.1080/13546783.2014.886625

科學教育學刊
2020, 第二十八卷特刊 , 429-455
DOI:10.6173/CJSE.202012/SP_28.0002

Chinese Journal of Science Education
2020, 28(S), 429-455

Assessment of Mathematical Creativity for Students Performing in Conjecturing Tasks

Pi-Jen Lin*

Graduate Institute of Mathematics and Science Education, National Tsing Hua University

Abstract

The purpose of the study was to construct and examine an assessment framework for measuring mathematical creativity in the use of conjecturing tasks. The assessment framework employed the element of elaboration adapted from Leikin's (2009) framework. Two research questions were investigated in this study. One teacher and the students in her two fifth-grader mathematics classes were the subjects of the study. The tasks and students' individual conjectures, group conjectures, and whole-class conjectures were the main sources of data collected for the study. Two scoring rubrics for the assessment framework were developed and used to evaluate students' cognitive learning outcomes and mathematical creativity. Results showed that researchers were successful in using this framework to evaluate students in various learning tasks from a mathematics creativity perspective. The generalization of an institutional objective is potential to ignite students' thinking of elaboration. The assessment framework revealed students' thinking in fluency, flexibility, originality, and elaboration while performing in conjecturing tasks, counting on the number, category, novelty, and generalization of the conjectures that students proposed in the classroom.

Key words: Primary School Students, Assessment Framework, Mathematical Creativity, Conjecturing Tasks

* Corresponding author: Pi-Jen Lin, linpj@mx.nthu.edu.tw