

## 學習軌道理論應用於國小立體形體概念教學實驗研究

陳嘉皇<sup>1</sup> 詹晏瑜<sup>2</sup>

### 摘要

本研究旨在了解國民小學一年級學生立體形體概念學習的表現，利用「學習軌道」理論設計適合學生學習的立體形體任務，並進行四名個案之教學實驗，探討「學習軌道」理論實施立體形體教學之成效，並根據結果提出建議。研究發現：1. 在形體分類活動，學生可將呈現的各類形體依其特質區分平面、曲面，顯示能透過堆疊定義平面與曲面。2. 少數學生對立體形體拓印表現採取序列方式進行拓印，大部分學生採取隨機進行拓印。3. 學生能依形體性質進行分析與塑形，大部分學生是以整體的視覺觀進行形體塑形。4. 學生對各類立體形體平面化能運用立體心像辨認相同的立體形體。5. 學生能藉由立體形體的堆疊與移動，計數出積木的數量與辨認出積木移動後的位置。

**關鍵詞：**立體形體、教學實驗、幾何、學習軌道

---

1 國立臺中教育大學數學教育學系教授

2 臺中市太平區中華國小教師

通訊作者：陳嘉皇，E-mail: chench1109@mail.ntcu.edu.tw

## 壹、研究動機與目的

學生從陌生的學習內容起步至能夠精熟應用，首先要建立初步且具體的觀念，然後再逐步延伸、細緻與抽象化才能有所得。如此逐步堆疊完成的學習歷程，好似出外旅遊一般，從家裡出發經過數個中途站後抵達目的地，在途中難免會有走錯路或是躊躇不前的時候，因此需事先規劃路線，且需有熟悉路線的同伴全程陪同，甚至能依據中途發生的狀況修改路線，這樣才容易到達設定的目的。「學習軌道」(Learning trajectory, LT) 是種教學設計理論，包含師生任務設計、教學實施與學習成效的評量，在數學課程的設計上，將學習內容分割為數個小單元，鼓勵學生經由逐步達成來完成整個教學目標，在歷程裡老師負責設計小目標的教學與評量，預測學生可能會出現的思考模式進行佈題，評量的方式不限於紙筆作答，可以透過交互詰問、解題策略、實作等方式來診斷學生學習狀況並隨時偵錯。「學習軌道」的優勢在於教學上讓老師充分掌握學生的學習狀況與找出迷思概念，時時進行方向修正以契合學生的知識的需求；多樣的評量活動，訓練學生分析、推理、表達、操作、解釋等多元能力，強化學習數學的素養與興趣。

檢視數學領域各學習單元皆有其歸屬的概念脈絡，若要促進數學能力學習，可針對數學概念的發展順序，運用特殊的教學活動達成，「學習軌道」正是體現此一概念的理論。幾何是學生探究與發展數學概念的場域，培養圖形與空間的幾何推理能力可以支持學生的數學心智習性，並提供檢驗產出知識的一種實質保證。Goldenberg 和 Cuoco (1998) 就認為幾何可協助學生連結數學有關的概念和能力，培養學生一般化、推理的心智習性，提供的實例設計能讓學生對圖形與空間物件的宣稱進行論證 (Ellis, 2011)，在解題或研究的歷程明白數學家如何處理數學問題。在日常生活中，學生常看到不同的幾何形體，藉由對周圍的探索來覺察他們與空間的關係，幾何概念的形成是從物體的形狀抽象化而來。Battista (2007) 提出，幾何概念建構我們對外在環境的理解，可作為學習藝術、建築、物理和其他學科的基礎，幾何學習的其中一個要素為心像能力，學生在學習幾何的過程中，需要在腦海中建立和操作心像，這種心智能力會影響幾何的思維模式。低年級學生初學立體幾何形體，形成空間表徵是經由操作的歷程所建立經驗和內化逐步組織得來的 (Battista, 2007)，幾何概念在國小數學教材內容佔了重要的一部分，在即將上路的十二年國教中，提到低與中年級的學生正處於各種概念的基礎時期，應該由操作中去察覺、形成概念，甚至簡單連結各概念的各種操作活動 (國家教育研究院，2018)。因此，立體形體的概念建立絕不是來自於瀏覽書本，而是來自於教師規畫有連續性的教學活動，利用不同的教具引導學生體驗課程，累積具體經驗後建構完整的立體形體概念。學習軌道是課程理論和教學實務相互發展與應用 (陳嘉皇，2008)，就是運用系統化方式，從學生認知的歷程中設計教學活動，形成一道連續的學習軌道路徑建構學生的概念，教師透過教學

反思進而修正其學習軌道，以利於未來教學活動的課程設計。有鑑於此，作者希望藉由學習軌道理論研擬適合學生的立體形體教學活動，透過實作過程如：水彩拓印、塑形、積木堆疊的方式建立學生數學是有感的學習，且在課程中樂於分享看到、想到、學到、做到的點點滴滴，進而建立立體形體的概念。本研究目的在於了解國民小學一年級學生立體形體概念學習的情形；利用「學習軌道」理論設計適合學生學習的立體形體任務；探討「學習軌道」理論實施立體形體教學之成效；根據結果提出建議，供國小教育階段幾何教學實施與輔導之參考。研究問題如下：

- 一、一年級學生對於「立體形體分類」的表現為何？
- 二、一年級學生對於「立體形體拓印」的表現為何？
- 三、一年級學生對於「立體形體塑形」的表現為何？
- 四、一年級學生對於「立體形體翻轉」的表現為何？
- 五、一年級學生對於「立體形體堆疊」的表現為何？

## 貳、文獻探討

### 一、學生幾何形體的認知發展

國小數學關於幾何單元的編寫，大都參考荷蘭數學教育家van Hiele (1986)夫婦的幾何學習發展理論，van Hiele理論將幾何知識的建構分為五個層次：

#### (一) 視覺層次 (Visual Level)

此層次的學生能透過視覺觀察圖形的整體輪廓來辨認圖形，可以嘗試移動或旋轉圖形辨認出此圖形，例如：三角形、正方形、長方形、圓形，使用非標準語言或標準數學術描述圖形的形狀，並可造出一個與指定圖形相同的圖形，但這層次學生的思維仍受視覺與感覺的影響，無法瞭解圖形的特徵與組成要素進行分析。因此宜安排感官操作活動，進行分類、堆疊、描繪、著色、造型等活動，使學生感受到平面和曲面以便幫助學生建立初步的幾何概念。

#### (二) 描述分析層次 (The Descriptive-Analytic Level)

此層次的學生能夠分析圖形的組成要素及圖形性質，能夠辨認圖形不會因圖形方位改變而受到影響。學生已具有豐富的視覺辨識經驗，能察覺到三角形有三個邊和三個角；長方形有四個邊、四個角，兩組對邊平行且等長；正方形有四個等長的邊、四個角都是直角；圓形沒有角；平行四邊形有二組對邊平行且等長。他們能依據圖形的性質來歸類、並使用標準的語言描述圖形的性質，將類別一般化；能藉由實際疊合的方式辨認大小。

#### (三) 關係或非形式演繹層次 (Relation or Informal Deduction Level)

此層次的學生已能建立性質之間的關係及圖形之間相互關係。依據圖形的部份特徵來描述、定義或分類圖形，能使用演繹原理來建立原因以說明圖形的特

徵。此層次的學生也能進行非正式的推演，進一步瞭解圖形內在屬性關係及各圖形間的包含關係。例如能從長方形的性質推論出每個長方形皆為平行四邊形；正方形的性質推論出每個正方形皆為菱形，但他們還無法進行有系統的證明。

#### (四) 形式演繹層次 (Formal Deduction Level)

此層次的學生瞭解推論的重要性，知道定理的不同證明方法，例如證明三角形的內角和為180度，明白證明的方式不只一種，瞭解其充分或必要條件的內在關係，發覺正逆命題間的差異性，例如：能了解正方形的邊長均相等，四個內角都是直角，但邊長都等長的四邊形不一定是正方形。

#### (五) 嚴密性 (rigor) 或公理性 (Rigorous or Axiomatic Level)

此層次的學習者已具有嚴密的演繹能力，可在不同的公設系統中建立定理，並進行分析或比較不同的幾何系統之間的關係。例如能區別歐幾里德幾何與非歐幾何的差異，即使是專業的數學者也不易達到。

研究者指出van Hiele的理論在描述學生幾何推理的發展是正確的，然而van Hiele描述的層次是不夠詳細，因此Battista (2007) 提出以下較詳細的層次說明，包含：

#### 層次一：整體視覺的推理 (Visual-Holistic Reasoning)

學生根據物件的外觀作為視覺整體的形體，他們使用模糊的整體判斷，證明他們的形體識別，例如說某圖形為長方形是因為他看起來像門。

#### 層次二：元素分析的推理 (Analytic-Componential Reasoning)

學生透過描述他們部分和部分之間的空間關係明確地獲得、概念化和指定的形體，學生的描述和概念化在精緻程度上差異很大，使用日常生活的非正式語言，不精確地描述形體的部分和屬性，當獲得數學課程教導的正式幾何概念後，開始使用形體非正式和正式組合的描述，最後明確和使用正式的幾何概念和語言描述和概念化形體，以一組足夠的屬性來滿足指定的形體。

#### 層次三：以特徵為基礎的關係推理 (Relational-Inferential Property-Based Reason)

學生明確的將形體的幾何特徵進行內部關連，例如，會說如果某形體具有 X 的特徵，也可能有特徵 Y。學生開始實證的推論，注意何時看見特徵 X 發生、特徵 Y 隨之發生；其次，結論某特徵構建一個形體時，另一特徵也會發生，例如，學生結論如果四邊形具有四個直角，則其對邊是相等的，因為當透過一系列的順序繪製矩形時，它們不能使對邊不相等。在層次三最後的階段，學生使用邏輯推論將形體的分類重組為邏輯的階層，明白將正方形分類為矩形的必要理由。經由層次三，學生逐漸能夠針對形體的分類理解和評鑑最小的定義，也就是僅列出足夠的屬性以指定形體類型的定義，而不是類型具有的所有屬性。

#### 層次四：正式的演繹證明 (Formal Deductive Proof)

學生理解且能建構正式的幾何證明，也就是在公理的系統裡，可產出邏輯論證說明的順序。

Battista (2007) 認為傳統的教學順序常是固定的，很少彈性配合個別學生學習的需求，雖然此種方式可適合頂端優秀的20%學生，但不適合以下80%的學生，且這些頂端20%的學生對傳統的課程結構並未達到最大的效益。針對許多數學的議題，Battista發現學生數學概念和推理的發展，可透過「精緻的層次」(levels of sophistication) 加以描述。「學習軌道」提供顯示學生對幾何形體在這樣的層次上思考和學習發展的架構，此架構描述學生在學習軌道發生的「認知地形」(cognitive terrain)，包括學生通過從直觀的思想和推理，轉變為對數學概念更正式、精緻程度的理解、面對學習產生的認知困難、與強調概念發展和推理的基本心智歷程。圖1描繪學生對幾何形體的理解必須登上的認知地形，此地形從學生對幾何形體教學前的推理開始，結束於對幾何形體正式和深層的理解，並指出學生在途中達成的認知平台。需注意的是學生可能會以稍微不同的軌跡，通過這個認知地形上升，可能會在不同的地方結束他們的軌跡，這取決於他們所經歷的課程和教學。

理解與創造正式的證明，以整體視覺觀辨識形體

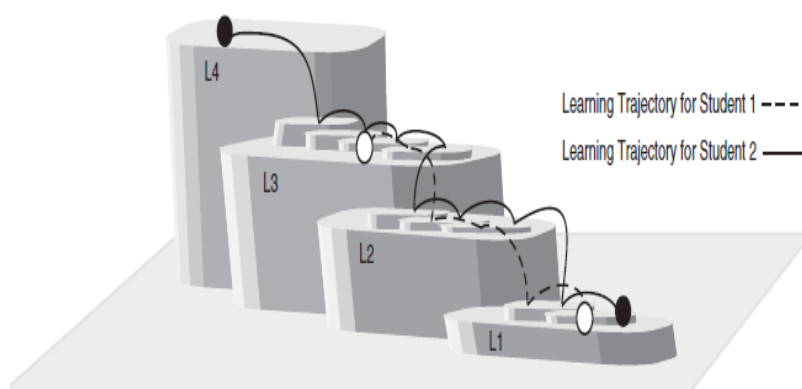


圖1 學生獲得幾何形體的認知地形

## 二、學習軌道理論與發展

學習軌道理論源於真實數學教育中情境或真實世界的問題，採用一種預想性的課程設計實驗，經由重要數學理念與目標以推測學生可能的學習路徑，沿此路徑以支持和組織學生學習。由於學生經由不同的學習路徑達到學習目標是因其各不相同的學習風格和思考方式，是故教師預先設計的學習路徑就稱為「假設性學習軌道」。LT 的發展是將真實情境融入教室，透過師生彼此與情境良好互動，引發學生思考與探究問題，提供教師掌握學生知識的發展，並促進目標順利達成。而此目標也包含教師針對特殊數學議題或內容，經由教學實驗驗證後，對此數學議題或內容所建立的一套教學信念、策略、方法與進程。

Clements 與 Sarama (2004) 指出諸多成功的數學課程發展及數學學習與教學研究，都採用 LT 概念。根據他們的論述，LT 的形成關乎：1. 對學生在某項重要數學觀念之學習路徑的臆測，2. 可支持沿著此假定的 LT 進行學習之教學活動

的臆測。意即教師必先對學生在某個數學概念的學習進程進行臆測，才能據以安排適當學習活動，並在各概念發展上透過活動或作業刺激，引發概念的調適，進而重構成為進階的概念。LT 包含學生的學習目標、計畫教學的活動及事先預測的學習步驟，讓教師進行數學概念的發展，且理解可引發學生學習的內容 (Gravemeijer, 2004)。此外，教師對班級活動的解釋將影響未來課程的計畫，透過對真實 LT 的理解而塑造教師預先設計的 LT，並在反身性、迭代的歷程形成 LT 和修正教室中的教學實務，進而導引對所欲強調的 LT 之建立。Gravemeijer (2004) 主張教師建立預設的 LT 會經歷 3 個階段（圖 2）。

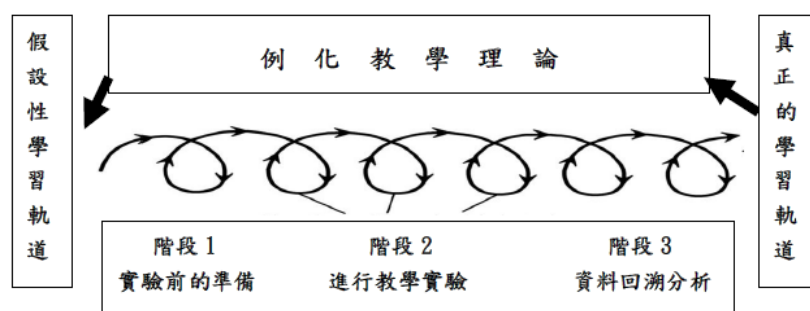


圖 2 教師 LT 建立的歷程

### （一）實驗前的準備

教師藉由經驗想像學生的能力，設計學生可理解之學習活動，建構預期性的教學實驗。這些實驗反映教師對所建構的 LT 的臆測，如何進行嘗試、意圖和改善設計的活動。像是當學生學習幾何形體的概念時，教師需對學生學習此概念設定明確的教學目標，如學生要能理解形體是具三維度空間特質的物件，那麼需進一步設想學生學習所需擁有的相關數學概念和能力，例如距離點線面之間關聯的知識，針對這些數學知識選擇合適之教材與方法設計教學活動，包含符應學生認知發展的內涵與學習規範的建議，並臆測推演學生學習這些活動的順序，進而形成 LT。此即 Clements 與 Sarama (2004) 強調的：數學的目標、作業活動、發展的進程 (developmental progressions)。

### （二）進行教學實驗

教師檢驗和修正之前設計的一系列教學活動，臆測和檢驗學生的心智表現與支持這些表現所採取之特殊策略兩者的關係。當臆測產生支持或被反駁，另一新的臆測就會順勢發展並被檢驗，不斷產生小型循環歷程，直至最終結果的發生。教學實驗包含檢驗預期的目標、教學活動的執行、教室裡進行事物的觀察和分析、與評量的臆測。

### （三）資料回溯分析

每種 LT 的目標有所不同，回溯分析的內容也不同，某一些主題建構的 LT 只是某個數學概念部分的目標，因此回溯分析在於重構改善 LT，以教學實驗的迴圈做為基礎，雖各有不同的重點，但彼此之間的連結可在實驗期間提供蒐集資



料的比對和驗證。資料回溯分析於教學準備階段即開始，持續進行至 LT 建構完成為止。因此，蒐集教室裡進行哪些教學活動，以及臆測和修正活動的理由，這些資料是最基本需要的。回溯分析能將在 LT 蒐集的資料提供創造與系統分析的機會，也能回饋新議題產生的資料，其功能可透過不同層次知識的往返分析而論證因果的關係，需強調的是這並非重複性的實驗設計，而是要探究在實驗期間或外在發展所獲得的啟示。

利用 LT 可提供數學概念學習的參考架構，對教材進一步分析，尋找適合學生的學習路徑，了解學生課堂學習狀況，亦重視師生解決問題的互動及回饋，提升學生的數學概念。而 LT 的回溯更提供教師在面對學生數學思考與問題解決表現的進一步理解與省思，針對不同程度的學生實施輔導，擴充學生的學習經驗。

### 三、立體形體概念之學習軌道分析

根據 The Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM, 2010) 的研究，學生幾何概念（含立體形體）之學習軌道包含以下循序漸進的內容：

- （一）識別並描述不同類型的直線（直線、曲線），識別並命名基本形狀（封閉、開放）。
- （二）使用形狀名稱描述環境中的物件，並使用諸如上面、下面、旁邊、前面、後面和在旁的術語描述這些物件的相對位置。
- （三）正確地命名形狀，而不管其方向或整體大小。
- （四）將形狀識別為二維（位於平面中、平坦）或三維（實心）。
- （五）使用非正式語言來分析和比較二維和三維形狀，以不同的大小和方向，使用非正式語言來描述它們的相似性、差異、部分（例如，邊和頂點/“角”的數量）和其他屬性（例如等長）。

學生在進入學校前就有操作立體形體物件的經驗，因此很自然的就可透過辨識其生活環境中的物件開始探索立體形體 (Clements & Sarama, 2009)，學生可利用：積木、方塊（矩形或柱體），球（球體），罐子（圓柱體），金字塔和錐體描述與命名基本的立體形體，學生完整描述立體形體是以視覺模型作為基礎，例如，學生常被要求在以下的四種情境辨認盒子（長方體）。

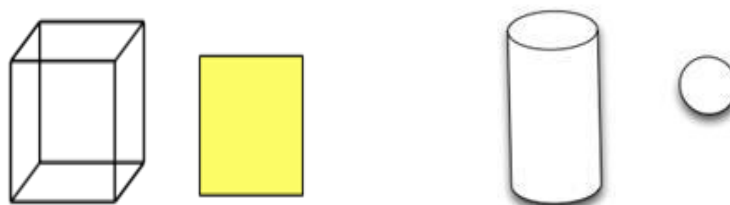


學生能夠熟練地識別立體形體時，教師可以逐漸引入其正式名稱，接著透過使用詞彙上方、下方、旁邊、前面、後面和在旁邊等來描述物件的相對位置。例

如，學生描述他們的立體形體如何排列在地板上：立方體在圓錐體後面，圓錐體在球體前面或球體在圓柱體下面。



描述物件的相對位置成為發展空間定位、繪製和閱讀地圖的基礎 (Gutierrez, 1996)，學生區分二維和三維形狀，一個常見的誤解是將二維形狀視為“瘦”的三維形狀 (Clements & Sarama, 2009)，這種誤解來自學生在日常生活中操縱的物體的材料屬性，區分 2D 的形狀為 3D 形狀的面/表面是很重要的，例如學生可以識別立方體上的表面為正方形，或圓柱體的頂部和底部（基部）為圓形。



學生需先在教室環境中使用 3D 形體，然後才能在紙上呈現這些形狀，學生以多種方式對物件進行排序，並建立方法來比較物件找出相似之處和差異。例如，學生發現一些 3D 物體可能與二維物體相關，如立方體和正方形，他們知道可以透過邊的數量（三角形，正方形）來排列物件的集合，從而導出新的形狀，例如五邊形和六邊形，除了計數邊外，他們學會計算角並將其視為與某些形狀相關聯。此時他們不知道哪些屬性是必需的，哪些只在某些情況下才能找到（六邊形可以具有相等或不等邊）。他們的語言可能是非正式的，例如將角度或角落描述為斜的或尖的。特質的識別包括相互關係的討論，例如注意三角形有三邊和三角 (Clements, Swaminathan, Hannibal, & Sarama, 1999)。

檢視現行教科書內容，在此單元的規畫是同時放入平面圖形與立體形體的內容，未安排教學活動分辨二者性質的不同，容易造成學生二維平面和三維立體形體的迷思概念，且大部分內容偏重平面圖形，且細目提到的平移、翻轉、比堆操作活動大部分也以平面圖形概念為主，在立體形體教學活動只進行立體形體的分



類及積木的數數，教材內容偏少並出現概念是片斷、活動之間沒有連貫性。教育部（2008）提到，數學的學習是連續的且有邏輯結構，故作者在設計教學活動時，重視每個活動之間的概念是否能順利遷移至下個活動，滿足不同程度學生的學習的需求，使學生喜歡數學課程提升學習動機，於是從歸類出 5 個教學任務：

（一）「立體形體分類」學生利用視覺化及觸覺操作，體驗積木的特徵再進行分類活動，建立立體形體的概念。

（二）「辨識形體的特徵及命名」，透過水彩拓印的方式應用立體形體的特徵，並觀察到立體形體與面的關係。

（三）「塑形活動」，透過黏土的方式讓學生能再次將概念應用進行翻轉、比堆操作活動，唯有透過操作、拓印、再造才能使學生建構完整的立體形體的概念。

（四）「立體形體的翻轉」將具體積木抽離使立體形體平面化，學生需嘗試運用立體心像策略找出相同的立體形體。

（五）「立體形體堆疊」，提供白色積木讓學生創意堆疊，其次為經驗體積的初步活動及立體積木移動，運用立體心像策略或積木方式找出積木移動後的位置。

## 參、研究方法與步驟

### 一、研究架構

本研究架構如圖 3 所示。

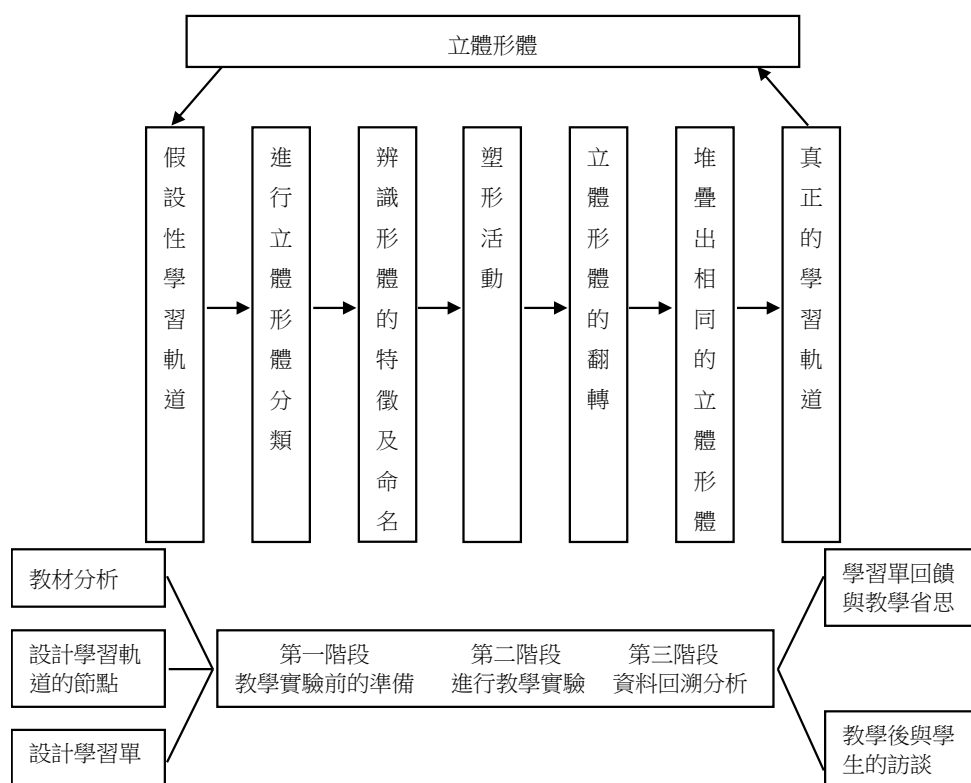


圖 3 立體形體之學習軌道的研究架構

在「教學實驗前準備」，先針對國內的教科書進行分析、與專家討論、設計教學任務、依據學習軌道設定每個活動的學習目標、學習單、了解學生的先備知識及臆測學生的解題策略與思考模式；「進行教學實驗」階段教師以引導式方式，讓學生盡情發揮對立體形體的想法，並且採實作方式為主，讓學生實際體驗後能產生豐富的具體經驗形成立體形體概念，最後請學生將自己的想法表達出來並完成學習單；「資料回溯分析」階段則根據錄影與質性訪談、學生的學習單、課堂表現、教學省思，進行整理與分析蒐集的資料內容，再與專家晤談分析內容，比對是否結果與初始的學習軌道內容相同或需要修正學習軌道內容，建構出一條較佳的學習軌道，做為日後教學的依據。

## 二、研究對象

研究對象以一年級學生為主，採立意抽樣、排除特殊身份別的學生。樣本為4位學生（匿名小捷、小鴻、小茵、小傑共4位學生）參與本教學研究，目前皆就讀臺中市某國小一年級。以下為學生的基本特質進行描述（如表1）：

表1 研究對象特質說明

樣本代號	家庭背景	父母親最高學歷	學生特質
小捷 (男)	父親從事環保工程、母親從事學校課後照顧班。教養方式威權民主式，對子女的教育歷程中給予很多的支持與鼓勵，在家中會適時陪伴小捷學習。	父親： 高中畢業 母親： 大學畢業	學業表現中上，思考與反應能力快，有自己的主見，小時候曾鑑定語言遲緩，口語表達稍弱，能融入學習，作業方面按時完成。個性活潑大方；興趣喜愛玩積木、拼圖、象棋；課後才藝參加跆拳道；放學後參加學校課照班，常幫忙老師指導學生。
小鴻 (男)	父親從事科技業、母親從事臺中某地區學校聽障巡輔師。教養方式威權民主型，對子女的教育歷程中給予很多的關心與陪伴，並鼓勵小鴻要積極認真學習。	父親： 專科畢業 母親： 大學畢業	學業表現中上，思考敏捷，曾參加坊間舉辦的數學競賽獲得優異成績。在課堂中踴躍發言能融入學習。個性溫和與同學相處融洽；興趣喜愛玩圍棋、跳棋、閱讀；課後才藝參加珠心算；放學後參加學校課照班，作業完成後會主動指導同學課業並專心的閱讀課外書。
小茵 (女)	父親從事汽車維修業、母親從事服務業。教養方式縱容式教養，對子女的教育歷程中多給予很多的關心與支持，父親在家中會適時陪伴小茵學習。	父親： 專科畢業 母親： 高中畢業	學業表現尚可，數學理解能力稍弱，在課堂中能專心聽講但較少發問問題，目前參加學校補救教學課程。個性溫和與同學相處融洽，人緣很好；興趣喜愛玩平板裡的小遊戲；放學後參加學校課照班，作業完成後會主動幫忙老師且陪伴同學閱讀。
小傑 (男)	父親從事製造業、母親從事服務業。教養方式威權民主型，對子女課業成績要求頗高，對子女的教育歷程也給予很多的關心與支持，並且常與老師聯繫了解孩子學習的狀況。	父親： 專科畢業 母親： 高中畢業	學業表現中上，思考與反應能力很快，口語表達能力佳，在課堂中踴躍發言並樂於學習。個性活潑且健談，自我要求很高；興趣喜愛踢足球；放學後參加學校課照班，常幫忙老師管理秩序。

由於一年級新生在入學前學校進行亂數編班，以達到每班學生在素質與能力趨於一致，因此學習成績差異不太，每班的班平均大約都在 90 分上下，小捷、小鴻、小傑在學校課堂上表現認真聽講且踴躍回答，小鴻課後才藝參加珠心算，母親要求較高，所以小鴻學期表現都很優秀；小捷和小傑反應很快但作答不夠細心，在學校表現雖亮眼但成績只維持在中上程度；小茵第二學期第一次成績為 88 分，第二次成績為 85 分，表示小茵在班級表現屬於中下程度，且目前課後參加補救教學，良好的學習軌道應符合每位學生的學習歷程，於是作者在挑選時盡量有低、中、高的學生，最後選取這 4 位研究對象，進而檢視學習軌道的教學活動是否符合每一位學生學習。

### 三、課程設計與實施

教學前的準備分成兩部份：教材分析與課程內容設計，分述如下：

#### (一) 立體形體教材分析

設計教學實驗課程前，先比較三版本教科書的內容，分析出其優缺點，提出改進的方法，接著與專家討論，共同研擬出教學實驗課程的活動，依照設計的任務進行教學，各版本教材分析如下：

K 版本將立體形體概念編排在一上第五單元名稱：「方盒、圓罐、球」、一下第九單元名稱：「做圖形」，共有 2 個教學活動分別為：堆疊與分類、立體堆疊，共 5 頁。K 版本之教材分析整理如下表（如表 2）：

表 2 K 版本立體形體教材分析表

課本內容的優點	缺點及改進方向
1. 使用生活中常見的生活素材，學生透過操作與觀察依物體外形做分類，進行第一次分類分成兩堆，平平的面和彎彎的面。	1. 課本已先分類好了，此部份應讓學生思考，讓學生先透過操作和觀察找出共同性，最後學生能分類出不同的方式。



（續後頁）

(接前頁)

課本內容的優點	缺點及改進方向
<p>1. 透過堆疊與滾動操作方式，將生活素材進行第二次分類分成三堆，學生能辨識出物體只有平平的、只有彎彎的面與同時有平平的面和彎彎的面的立體形體。</p> 	<p>1. 課本請學生操作，堆堆看和滾動，卻已將方法呈現出來，應讓學生多操作了解堆疊和滾動，最後能說出平面和曲面的特徵。</p> <p>2. 應引導學生進行分類的方式從 2 堆→3 堆，並說明分類的理由。</p>
	<p>1. 在課本詢問學生，有哪些平平的面和彎彎的面，卻將結果直接呈現，應讓學生操作後說出分類的理由。</p> <p>2. 課本生活素材應可再放入圓錐，生活中常會看見圓錐物體，例如：屋頂、圓錐警示牌。</p>
<p>1. 學生運用積木仿製課本堆疊出形體，安排學生自由創造的能力與數算積木的個數。</p> 	<p>1. 從上面的活動和積木堆疊呈現學習不連續性，應增加平面和曲面的實作活動，使習得概念能夠應用。</p> <p>2. 過於強調白色積木的數算，宜增積木的變化性，可增加積木移動或旋轉的題型，培養學生運用立體心像空間視覺化的能力，以及建立 3D 立體圖概念的重要性。</p>

資料來源：K 版國小數學課本第一、二冊。

H 版本將立體形體概念編排在一下第五單元名稱：「立體形體」，共有 3 個教學活動分別為：堆形體、立體形體、複製形體，共 5 頁。H 版本之教材分析整理如下（如表 3）：

表 3 H 版本立體形體教材分析表



課本內容的優點	缺點及改進方向
<p>1. 依生活經驗中所常見的馬、鐵塔、火車請學生堆疊出立體造形。</p> <p>2. 透過堆疊與滾動分類，讓學生辨識出物體只有平平的、只有彎彎的面與同時具備有平平的面和彎彎的面的物體。</p>	<p>1. 課本直接宣告分類，限制了讓學生思維方式，應該先讓學生們比較分類如：先分 2 堆再分成 3 堆，讓學生說出分類原因，最後教師再引導依性質做分類，使每個立體形體的特性都能清楚的區分。</p>
	
<p>1. 宣告立體形體的名稱「正方體」、「長方體」、「球體」、「圓柱」。</p> <p>2. 透過生活素材讓學生能辨識立體形體。</p>	<p>1. 課本直接宣告立體形體的名稱，限制住孩子發揮想像力的經驗，應該先讓學生嘗試說出立體形體的名稱，如果學生說出正方體是正方形；長方體是長方形，也能了解學生迷思概念，進行辨識平面圖形與立體形體的不同造成認知衝突，最後引導立體形體的正确名稱。</p>
	
<p>1. 使用立體積木在紙上描繪平面圖形。</p> <p>2. 學生運用積木仿製課本堆疊出形體，並數算積木的個數。</p>	<p>1. 從上面的活動和積木的描繪呈現出學習不連續性，應增加立體形體的實作活動，使習得概念能夠應用例如：水彩拓印的方式可讓學生觀察到圓柱體的側面拓印後會呈現出長方形；球體拓印後滾動出曲線，讓學生觀察每個立體形體特徵的變化。</p> <p>2. 此部分雖有描繪活動，但限制了學生思維，應該讓學生嘗試可描繪出哪些面，例如：學生能將正方體描繪出 6 個面，並且觀察出 6 個面一樣大；長方體描繪出 6 個面，觀察出相對的面一樣大，避免造成日後立體形體的命名活動是以一個面來進行命名。</p> <p>3. 過於強調白色積木的數算，宜增積木的變化性，可增加積木移動或旋轉的題型，培養學生運用立體心像空間視覺化的能力，以及建立 3D 立體圖概念的重要性。</p>
	

資料來源：H 版國小數學課本第二冊。



N 版本將立體形體概念編排在一上第七單元名稱：「分一分」，一下第五單元名稱：「圖形和形體」，共有 2 個教學活動分別為：分一分、堆形體，共 4 頁。N 版本之教材分析整理如下表（如表 4）：

表 4 N 版本立體形體教材分析表

課本內容的優點	缺點及改進方向
<p>1. 使用生活中常見的生活素材，學生透過操作與觀察依物體外形做分類，辨識出 3 堆只有平平的面、只有彎彎的面、同時有平平的面和彎彎的面。</p> <p>① 大家帶來了哪些東西？ 堆堆看，滾滾看，摸摸看。</p> <p>可以堆高，不容易滾動。 可以堆高，不容易滾動。 容易滾動，不能堆高。 容易滾動，不能堆高。</p> <p>② 分一分並說說看，你是怎麼分的？</p> 	<p>1. 課本直接呈現分成 3 堆，應該先引導學生們比較分類如：先分 2 堆再分成 3 堆，最後教師再引導依性質做分類，使每個立體形體的特性都能清楚的區分。</p>
<p>1. 感官活動的操作運用手掌感受立體形體的特性，平平的面和彎彎的面。</p> <p>② 它們有什麼不同？</p> <p>有平平的面，也有彎彎的面。 只有彎彎的面。 只有平平的面。 都是平平的面，而且每個面看起來都一樣大。</p> 	<p>1. 增加立體形體的實作活動，使習得概念能夠應用例如：水彩拓印的方式使學生觀察到正方體可拓印出 6 個全等的面；長方體可拓印出 2 個正方形與 4 個長方形或是 3 組一樣大的面；圓柱體的側面拓印後會呈現出長方形；球體拓印後滾動出曲線，讓學生觀察每個立體形體特徵的變化。</p>
<p>1. 生活經驗中所常見的物體堆疊出立體造形。</p> <p>2. 學生運用白色積木仿製課本堆疊出形體，並數算積木的個數。</p> <p>① 用帶來的盒子和罐子堆堆看。</p> <p>② 說說看，下面的形體像什麼？</p> <p>③ 拿出 8 個，堆堆看。</p> <p>④ 拿出 1 堆或右邊的形體，算算看你用了几個？</p> <p>試試看： 堆堆看，各用了幾個？ ① ②</p> 	<p>1. 教學活動順序顛倒，積木的堆疊活動應放在活動一，一開始就讓孩子操作立體形體，體驗立體形體的特性有平平的面和彎彎的面。</p> <p>2. 過於強調白色積木的數算，宜增積木的變化性，可增加積木移動或旋轉的題型，培養學生運用立體心像空間視覺化的能力，以及建立 3D 立體圖概念的重要性。</p>

資料來源：N 版國小數學課本第二冊。



#### 四、課程內容設計與教學實驗

立體形體的教學活動、教學內容、名稱、學習目標及臆測學生可能的反應，如表 5：

表 5 「學習軌道」立體形體教學活動設計

活動名稱	學習目標	臆測學生可能的反應
一、立體形體分類	學生透過堆疊和滾動的活動，找出： 1. 有平平的面立體形體。 2. 有彎彎的面立體形體。 3. 同時具有平平的面和彎彎的面立體形體。	學生可能的回答： 1. 二分法：分成一類是立體形體具有平平面；另一類立體形體具有彎彎的面。 2. 三分法：分成只有平平的面；只有彎彎的面；具有平平的面和彎彎的面。 3. 四分法：分成正方體、長方體、圓柱體、球體。
二、辨識形體的特徵及命名	1. 能利用積木拓印，說出立體形體與面的關係。 2. 透過拓印的活動，進行立體形體的命名，能說出立體形體的正確名稱正方體、長方體、圓柱體、球體。	學生可能的回答： 1. 拓印出正方體 6 個一樣大的面；長方體有 2 個正方形和 4 個長方形；圓柱體有 2 個平面和一個長方形；球體滾動後為一條彎彎的曲線。 2. 立體形體的命名，學生可能回答是正方形、長方形、圓形、球體。 3. 正正方方的體、長長的體、圓圓的體、球體。
三、塑形活動	1. 從立體形體的概念與觸覺體驗活動，進而能產生立體形體的結構特徵與心像。	學生可能的做法： 1. 可能將黏土壓成正方形、長方形、圓形、球。 2. 可能捏出完整的立體形體：正方體、長方體、圓柱體、球體。
四、立體形體的翻轉	1. 運用立體形體的心像空間視覺化的能力，找出符合的立體形體。	1. 學生可能根據立體形體的心像空間視覺化的能力，可能是進行面的比對、邊長的比對或立體形體翻轉。
五、形體概念的應用	1. 培養學生的創造力，創造出許多不同的立體形體樣貌。 2. 透過觀察堆疊出相同的立體形體。 3. 透過視覺與心像找出移動的積木。	學生可能的回答： 1. 學生可能透過同儕合作與討論創造出多元的形態。 2. 學生可能說出移動的積木不見。 3. 學生可能說出移動的積木在後面。

鑒於教科書分布的時段不同，本研究於一年級第二學期期末時實施，教學實驗時間利用期末考結束後的當週的星期六和星期日下午三點到五點，教學節數為一天二節課，進行四節課的教學活動。教學活動著重實作活動與發表，教學實驗過程中學生經由操作立體形體後，能根據視覺與觸覺的經驗，辨認立體形體的特性並進行分類，建立立體形體基本概念，接著，當學生已有立體形體的概念後，進行概念的應用與塑形，透過操作、拓印、再造活動，使學生產生立體形體的心像。教師在課室中以引導學生思考為主，鼓勵學生踴躍發言，肯定學生的學習表現，最後，請學生完成學習單。

## 五、資料蒐集與分析

為詳實記錄教學活動學生的作答情況、學習情形及師生互動的過程，採取「教學觀察與攝影紀錄」的方式，作為事後回顧教學歷程的資料參考依據，並注意學生在課堂學習時的反應與回答，以驗證該節所設計的教學活動是否符合學生的學習軌道與達到預期的教學目標。最後，將對話內容轉譯為文字稿，以此做為資料分析與探討的內容。教師並藉由學生的學習單、課堂中的互動與反應情形進行省思，檢視自身教學內容，修正設計的「學習軌道」做為日後的教學活動的依據。

## 肆、研究結果與討論

完成準備階段事宜後，進入教學實驗，關於立體形體學習軌道任務教學的成果與教師省思依任務簡述如下：

### 一、立體形體分類

分類的教學活動考量數學與學生知識結構的問題。從數學的知識結構觀點來說，先有點，產生線，進而有面，最後才有體的概念。從學生的生活經驗觀點來說，學生從小就接觸立體形體，平面形狀是依附在立體形體中，學生是透過大人或教師教他們認識平面形狀。此教學活動讓學生透過積木教具實際操作，體驗堆疊、滾動、觸摸，再進行立體形體分類，建立立體形體的初步概念。

#### (一) 小捷的學習表現

##### 【學習軌道 1.1—教學觀察紀錄】

T：請利用桌上的積木進行堆堆看，會堆什麼造型？

S：麥克風（圖 4）。

T：請問麥克風下面 3 個積木為什麼可以疊高？

S：因為 3 個積木都有平平的面。如果將積木橫放，就會滾下來。

T：為什麼，要把球放在最上面？

S：因為它會滾動。

小捷堆疊積木時迅速的選擇正方體、長方體、圓柱體平平的面進行堆疊，最後將球體放在最上面；其次，小捷認為圓柱體橫放會導致積木無法堆疊；最後，小捷說出正方體、長方體、圓柱體平平的面可以疊高，圓柱體的側面會滾動。



圖 4 小捷立體形體分類表現

【學習軌道 1.2—教學觀察紀錄】

T：想想看你會把積木分成幾類？

S：2 類。

T：為什麼①和②要放在一起？有什麼地方相同嗎？

S：因為①和②有正方形、平平的面。

T：為什麼③和④要放在一起？有什麼地方相同？

S：因為③和④會滾動。

T：如果重新再分類？你會分成幾堆？

S：①、②、③、④積木各一類。

T：為什麼①一類？

S：6 個正方形。

T：小捷，為什麼②要一類？

S：2 個正方形、4 個長方形。

T：①和②有什麼不一樣？

S：因為②的積木很長，①的積木很短。

T：為什麼③要一類？

S：側面可以滾動。

T：為什麼④要一類？

S：可以滾動。

T：③和④有什麼不一樣？

S：因為④沒有像柱子一樣長。

小捷能清楚區分平面和曲面的差別；追問積木①、②有什麼差別時？觀察出他能觸摸到邊，說出積木①②有長長的邊，積木①短短的；再追問積木③、④有什麼差別時？他說積木④沒有像柱子一樣長；再詢問小捷哪個積木具有平平的和彎彎的面？小捷能說出積木③。雖然小捷未能分出 3 堆，但經由老師提問哪個積木具有平平的面和彎彎的面，他仍能正確的指出來。

（二）小鴻學習表現

【學習軌道 1.1—教學觀察紀錄】

T：球能不能放在下面堆疊？（圖 5）

S：可以，我把它做成車子。

T：球能不能放在下面堆疊??

S：不可以，但可以利用其他積木檔著。

小鴻堆疊積木選擇正方體、長方體、圓柱體平平的面進行堆疊，最後將球體放在最上面，詢問是否能把球放在最下面堆疊，小鴻馬上創造出另一個積木的造型，再追問最上面的積木能不能放在下面堆疊？小鴻說出不能，因為球會滾動，旁邊可放積木擋住。



圖 5 小鴻立體形體分類表現

## 【學習軌道 1.2—教學觀察紀錄】

T：你會把積木分成幾類？（圖 6）

S：2 類，①、②、③都有平平的面；③和④都有彎彎的面。

T：如果重新再分類能不能分成 3 類？

S：①和②一堆；③一堆；④一堆。

T：請你把分類的理由再說清楚？

S：①和②都有平平的面；③有平平的面和彎彎的面；④只有彎彎的面。

小鴻一開始說分成 2 類，區分的方式是以平平的面和彎彎的面，再詢問是否可以分成 3 類，這時候小鴻表示可以再分成只有平平的面、只有彎彎的面和具有平平的面和彎彎的面。

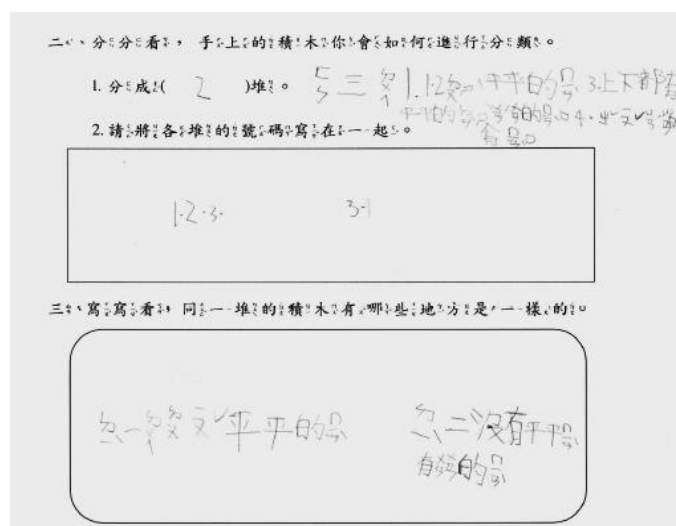


圖 6 小鴻立體形體分類表現

## （三）教師省思

## 1. 學習目標

學生能夠運用積木平平的面進行堆疊，將保麗龍球放置頂端，並說出平面與曲面的差異性。進行積木分類，學生很容易的將只有平平的面和可以滾動的分成 2 堆，透過教師引導能從 2 類轉乘 3 類的分類甚至分成 4 類，達成本階段設定的學習目標。

## 2. 學生創造能力的提升

學生充滿許多想像能力，能說出堆疊的造型為麥克風、避雷針、車子、船、高塔。可讓學生多一些時間操作積木，讓學生創造出更多的造型，或小組合作一起堆疊積木，進行作品的發表。

## 3. 課程設計

這個部分和各大版本的教材所使用的教具不同，作者希望學生能專注在積木的操作，將積木與真實世界做結合，可要求學生從家中帶一至兩個盒子與積木進行比對，表達所帶的盒子像哪個積木，與學生生活經驗做連結。

## 4. 學習單習得知識統整

透過積木操作與學習單設計，引導學生進行立體形體分類，雖然活動過程順利，學生的表現很棒，但活動結束前幾分鐘，應讓學生統整觀念，再次說出立體形體平面與曲面的差別。

# 二、立體形體拓印

學生透過立體實體的操作後，利用拓印方式從拓印出來的圖形外觀進行判斷，說出正確名稱，也能區分與三維形體的差異性。

## (一) 小捷學習表現

### 【學習軌道 2.1—課後訪談紀錄】

T：拓印完後，你發現了什麼？（圖 7）

S：都是正方形。

T：還有看見什麼呢？

S：有數字。

T：看到幾個數字呢？

S：有 6 個數字，6 個正方形。

T：要進行命名，叫做什麼名稱呢？

S：正方體。

觀察小捷拓印的過程，他會依序從積木的側面先拓印，最後再拓印積木的上和下兩個面。詢問小捷從拓印中發現什麼？小捷能描述出正方形，接著再追問還有什麼發現？小捷更具體的說出有 6 個正方形，因小捷在學校已上過立體形體的命名，所以在訪談中可以快速的回答出正確的名稱。

### 【學習軌道 2.2—課後訪談紀錄】

T：拓印完後你發現了什麼？（圖 8）

S：有 2 個正方形和 4 個長方形。

T：要進行命名，叫做什麼名稱呢？

S：長方體。

小捷拓印的方式和正方體積木拓印的方式一樣，依序從積木的側面先拓印，再拓印積木的上和下兩個面。詢問小捷從拓印中發現什麼？他回答看見 2 個正方形和 4 個長方形。



圖 7 小捷正方體形體拓印表現

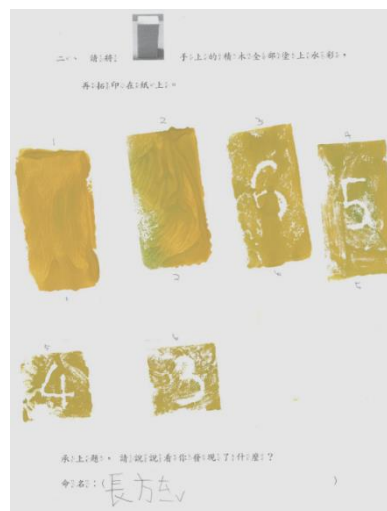


圖 8 小捷長方體形體拓印表現

#### 【學習軌道 2.3—課後訪談紀錄】

T：拓印完後你發現了什麼？（圖 9）

S：有 2 個圓形和 1 個長方形。

T：為什麼會有長方形？

S：滾出來的。

T：我們要進行命名，叫做什麼名稱呢？

S：圓柱體。

小捷拓印的方式仍依序從積木的側面先拓印，最後再拓印積木的上和下面，建立有順序的拓印方式。詢問小捷從拓印中發現什麼？他回答看見 2 個正方形和 1 個長方形，作者追問學生為什麼會有長方形？小捷比出圓柱體的側面說出滾出來的。

#### 【學習軌道 2.4—課後訪談紀錄】

T：拓印完後你發現了什麼？（圖 10）

S：彎彎的。

T：我們要進行命名，叫做什麼名稱呢？

S：球體。

小捷拓印的方式一直滾動球體，詢問小捷發現什麼？他描述都是彎彎的，詢問小捷能不能將全部的面拓印出來？小捷搖頭表示不行，再追問小捷發現什麼？小捷描述球體會一直滾動出彎彎的線。





圖 9 小捷立體形體拓印表現

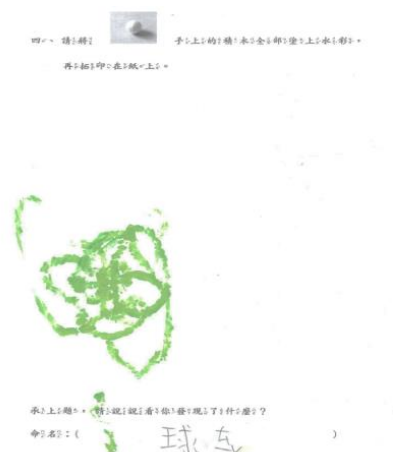


圖 10 小捷立體形體拓印表現

## (二) 小鴻學習表現

### 【學習軌道 2.6—課後訪談紀錄】

T：拓印完後你發現了什麼？（圖 11）

S：有 2 個圓形和 1 個長方形。

T：要進行命名，叫做什麼名稱呢？

S：圓柱體。

觀察小鴻拓印過程，小鴻拓印的方式先從上下兩個面著手拓印，詢問從拓印中發現什麼？小鴻回答 2 個圓形和 1 個長方形。幫積木命名，他說：「圓柱體」。



圖 11 小鴻圓柱體體形體拓印表現

## (三) 教師省思

### 1. 學習目標

學生在一年級上學期學過直線、曲線、正方形、長方形、圓形，透過水彩拓印，看見立體形體的與面的關係。引導學生認識立體形體名稱，進行積木拓印後再命名，學生可順利達成教學目標。

## 2. 課程設計

課程規劃認識立體形體的名稱與面的關係，讓學生動手操作立體形體拓印後進行討論立體形體的名稱。教具採用海棉積木容易進行拓印，看似簡單但操作上有需再注意的部分，例如：顏料過多，積木拓印時無法呈現出數字；學生拓印時，會滑動積木導致正方形會變成長方形；水彩的水過少，積木拓印時無法體認出圓柱體的側面會滾動出長方形，進行圓柱體拓印時，滾動到直線表示側面拓印完成，才不會導致出拓印出長方形、正方形或出現大小長方形，在顏料與水的比例方面，老師調配好後再給學生使用，可降低上面描述的情形。

## 3. 教學活動的改善

原教學活動方式是拓印完一個積木立即進行立體形體的命名，作者省思應讓學生全部拓印後再進行討論，一方面節省時間一方面討論不會中斷，學習方面會更連續性，最後需再次進行觀念統整，以利對立體形體概念的發展。

## 三、立體形體塑形

### (一) 小鴻學習表現

#### 【學習軌道 3.5—教學觀察紀錄】

T：請你利用黏土，黏出和它們一樣大的形狀。

T：說看看，你如何完成作品？（圖 12）

S：利用刀子把它切開後，和正方體積木比對大小。

T：為什麼你只用正方體積木的一個面和黏土比對呢？

S：都是平平的。

T：面的大小有一樣大嗎？

S：都是一樣的。

小鴻在實作過程中，一開始利用刀子將黏土切出一塊正方體，接著將黏土和正方體積木互相比對，詢問小鴻為什麼只用一個面比對，小鴻回答是平平的面，再詢問面的大小有一樣大嗎？小鴻說都是一樣大，雖然未清楚表答正方體的面大小相同，但經過引導，小鴻能將觀察到的回答出面的大小是一樣，透過實作察覺到正方體的外部性質。

#### 【學習軌道 3.7—教學觀察紀錄】

T：說看看，你如何完成作品？（圖 13）

S：利用刀子把它切開後，用滾的做出彎彎的面。

T：可以說說看，你上面的圓形如何做的？

S：先拿一些黏土壓平，再將積木的圓形壓下去。

觀察小鴻實作過程，一開始利用刀子將黏土切出一塊長方體，接著將黏土滾動，拿出刀子測量高度是否相同，詢問小鴻作品的圓形和圓柱體的圓形一樣大嗎？如果不一樣大那要如何做？小鴻再拿一些黏土壓出 2 個圓形黏上去，完成作品。



圖 12 小鴻正方體體形體塑形表現



圖 13 小鴻圓柱體體形體塑形表現

## (二) 小茵學習表現

### 【學習軌道 3.9—教學觀察紀錄】

T：說看看，你如何完成作品？（圖 14）

S：捏一坨黏土在手上，用手將面鋪平並把它用的尖一點。

T：你指的尖一點是哪裡嗎？

S：好（尖就是指頂點）。

T：你的作品每個面都有一樣大嗎？

S：大部份一樣大。

T：你看到幾個面？（老師指著正方體）

S：6 個面。

T：請妳指出哪 6 個面。

小茵一開始利用刀子將黏土切出一塊，再捏一些黏土在手中，接著手掌中搓成一個球體，發覺球體大了一些再拿刀子切除一些黏土，接著又在手掌中搓成一個球體，開始和正方體比對大小，並利用正方體的面將黏土的曲面壓平，也利用大姆指和食指將上下的面、左右的面和前後的的面壓平，最後完成作品，作者請小茵將作品和正方體積木再比對一次，確認作品和正方體積大一樣大。



圖 14 小茵正方體體形體塑形表現

### 【學習軌道 3.11—教學觀察紀錄】

T：說看看，你如何完成作品？（圖 15）

S：捏一坨黏土在桌上滾動著，最後在比對有沒有一樣長。

T：你的作品和圓柱體有一樣大嗎？

S：沒有。

T：想一想怎麼做呢？

S：（沉默不語）

T：能不能再拿一些黏土放入？

S：可以。

T：你再繼續把它完成。

小茵一開始捏一些黏土在桌上滾動，再和圓柱體比較長短，多出的部分用刀子切掉，詢問小茵作品和圓柱體有一樣大嗎？小茵說沒有，詢問可以怎麼做？小茵沒有說話，提示小茵能不能再拿一些黏土放入，小茵說可以，再請小茵做做看，最後小茵完成的作品和圓柱體一樣大，作者發現小茵會將圓柱體的底面和作品的底面比對大小，再次確認作品和積木一樣大。



圖 15 小茵圓柱體形體塑形表現

### （三）教師省思

#### 1. 學習目標

學生依具體實物進行塑形，發覺大部分學生依照立體形體整體進行塑形產出實心的作品，而小捷卻是依照立體形體的特性進行塑形，產出空心的作品，出乎意料作者當初臆測的學習模式，此活動學生皆能達成學習目標。

#### 2. 課程設計

課程規畫利用黏土當作媒材，因黏土可塑性強非常適用於立體形體的的塑形，可從前面學習到的概念遷移到塑形活動中，建立立體形體的概念。

### 四、立體形體翻轉

教學活動把具體教具抽離，透過學習單將立體形體平面化，引導學生觀察形體的不同面向，能產生立體形體的心像，圈出平面立體圖片上的積木。

#### （一）小茵學習表現

##### 【學習軌道 4.3—課後訪談】

T：你如何知道選項 1 和正方體相同？指出來給老師看嗎？

S：這裡和這裡一樣。（圖 16）

T：為什麼知道選項 2 和題目一樣？

S：這裡和這裡是長方形。  
T：說看看，第三題是什麼形體？  
S：圓柱體。  
T：你如何判斷選項 4 和圓柱體相同？  
S：中間是圓的，有平平的面。  
T：說看看，第四題是什麼形體？  
S：球體。  
T：你如何知道選項 3 和球體相同？  
S：都是圓的。

小茵能清楚的表達自己的想法，依據立體形體面的特性與邊做為思考策略，已有完整的立體心像概念。

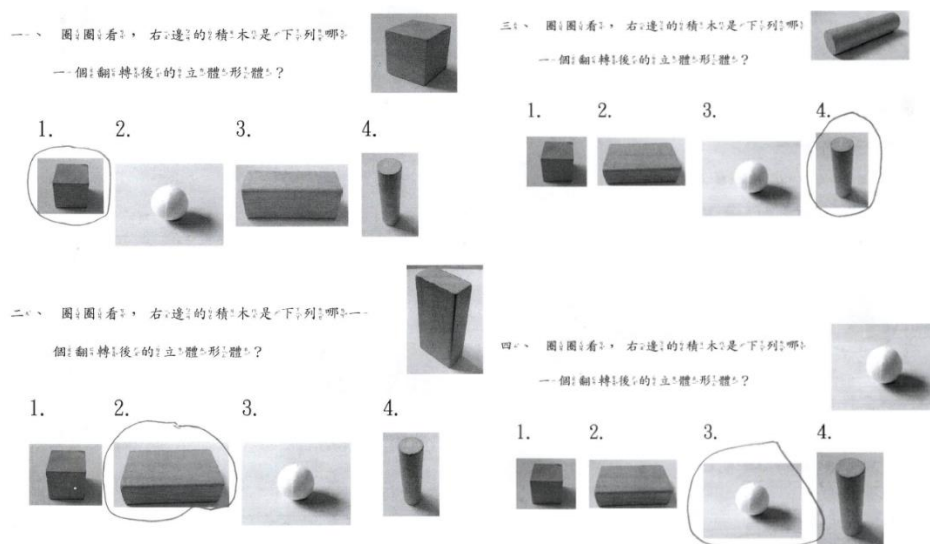


圖 16 小茵立體形體翻轉表現

## (二) 小傑學習表現

### 【學習軌道 4.4—課後訪談】

T：你如何知道選項 1 和正方體相同？指出來給老師看嗎？  
S：這裡和這裡一樣，有正方形。(圖 17 指題目的上面和選項的上正)  
T：你如何知道選項 2 和長方體相同？  
S：這裡長長的和那裡長長的一樣。(圖 17 題目的右邊和選項的前面一樣)  
T：還有什麼地方一樣嗎？  
S：這裡和這裡一樣。(圖 17 題目的前面和選項上面)  
T：說看看，第三題是什麼形體？  
S：圓柱體。  
T：你如何知道選項 4 和圓柱體相同？

S：旁邊是長度長長的很像，都是圓圓的。

T：說看看，第四題是什麼形體？

S：球體。

T：你如何知道選項 3 和球體相同？

S：都圓圓的，形狀很像球。

小傑能清楚的表達自己的想法，依據立體形體面的特性做為思考策略，已有完整的立體心像概念並達成學習目標。

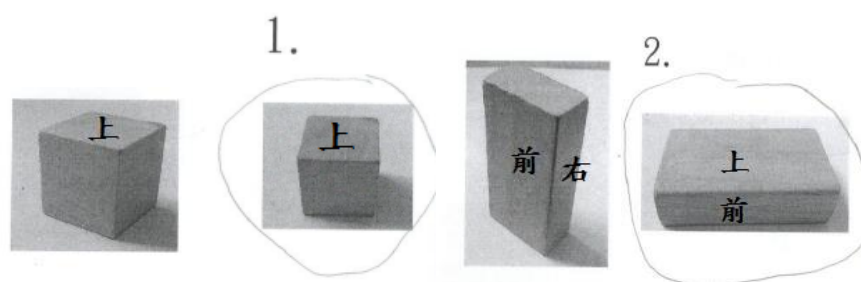


圖 17 小傑立體形體翻轉表現

### （三）教師省思

#### 1. 學習目標

學生能回答學習單的題目圈選出翻轉後的立體形體，說出、指出該形體的面一樣大或該形體的長度一樣長，正確辨認立體形體。

#### 2. 課程設計

透過立體形體塑形所建立的概念遷移至本次教學活動中，學生將具體物抽離，把立體形體平面化，能在心中或腦海裡嘗試著翻轉，慢慢建立立體心像。

## 五、立體形體堆疊

活動是學生利用白色小積木堆疊出喜歡的造型，並利用白色積木仿造出指定的立體形體，再進行點數正確的積木數，察覺體積。接著將立體形體翻轉遷移過來，平面化形成心像，學生要能想像白色積木移動後的立體形體能力。

### （一）小捷學習表現

#### 【學習軌道 5.1—教學觀察紀錄】

T：請你利用 8 個積木堆疊出一個正方體？（圖 18）

T：第二大題（1）可以告訴老師，你怎麼數？

S：想像將最上面積木移動到第二層，2、4、6 有 6 個

T：第二大題（2）可以告訴老師，你怎麼數？

S：下面有 3 個，如果沒有下面就會倒下去，所以  $3+3+3=9$

T：第三大題（1）可以告訴老師怎麼移動？

S：最上面的積木移過去。

T：第三大題（2）可以告訴老師怎麼移動？

S：跑到後面。



小捷在第二大題不用積木操作就點數出數量，詢問小捷如何數數，小捷想像將積木移到第二層進行二個一數，詢問小捷在第二大題第二小題中如何數數？小捷清楚告知下面還有一層，把隱藏的積木說出來，小捷會運用立體心像進行數數並且也會進行心像的移動來達成學習目標。

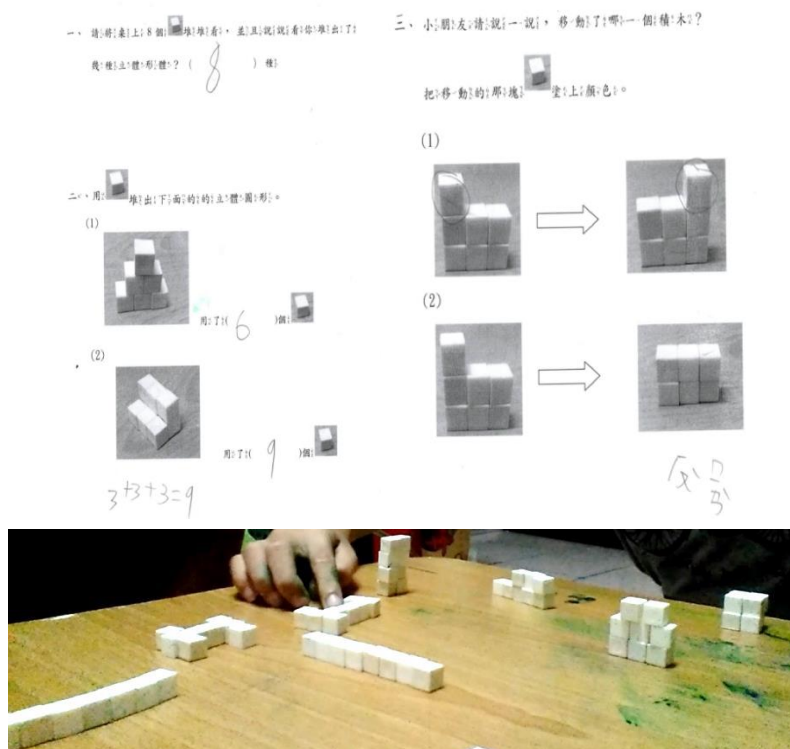


圖 18 小捷立體形體堆疊表現

## (二) 小傑學習表現

### 【學習軌道 5.4—教學觀察紀錄】

T：請你利用 8 個積木堆疊出一個正方體？（圖 19）

S：這一個嗎？

T：不是哦！等一會兒，我把之前黏土的作品拿出來。

T：說看看這是什麼立體形體？

S：正方體和長方體。

T：說說看，你看到的正方體有幾個面？

S：6 個。

T：第二大題（2）可以告訴老師，你怎麼數？

S：上面一排 3 個、下面一排 3 個、這裡也有一排 3 個。

T：第三大題（1）可以告訴老師怎麼移動？

S：最上面的積木移過去。

T：第三大題（2）可以告訴老師怎麼移動？

S：在後面。

小傑利用 8 個積木堆疊出一個正方體，透過之前的黏土積木作品詢問積木的名稱，小傑能說出正確的名稱。詢問小傑如何數數，小傑以一排有 3 個積木合起來數數，並清楚說出隱藏的積木在下面，依循自己的立體心像進行思考，並能運用立體心像進行積木移動來達成學習目標。



圖 19 小傑立體形體堆疊表現

### (三) 教師省思

#### 1. 學習目標

學生能利用白色小積木堆疊出指定的造型，且能試著運用立體心像能力畫出或圈出移動的積木。三位學生不需透過白色小積木的操作進行數數，能清楚表達隱藏積木的位置，學生已有初步的立體心像的能力。一位學生運用立體心像能力進行移動或數數仍有困難，透過白色積木操作仍可達成學習的目標。

#### 2. 課程設計

教學活動與教科書相同的地方都是運用白色積木進行數數，讓學生體驗體積的經驗；相異之處在於安排立體形體的移動，透過立體形體的移動可建立一年級學生立體心像運用策略，有利於二年級學習立體形體的性質。

#### 3. 總結

透過每堂課的教學觀察、課後訪談與教師反思發現，每一個學習目標環環相扣，學生能將所習得的概念順利遷移至下個活動中，且教學活動過程也符合差異化教學，能帶領學生達到學習目標，作者討論出本研究設計的「立體形體」學習軌道是條適合學生的學習軌道，可作為教師教學的參考依據。

## 伍、結論與建議

本研究旨在了解國民小學一年級學生立體形體概念學習的情形，利用「學習軌道」理論設計適合學生學習的立體形體任務，探討「學習軌道」理論實施立體形體教學之成效，並根據結果提出建議。

## 一、研究結論

(一) 在形體分類活動，學生可將呈現的各類形體依其特質區分平面、曲面，顯示能透過堆疊定義平面與曲面。

學生藉由實際操作過程體驗堆疊、滾動、觸摸，再進行正方體、長方體、圓柱體、球體積木進行分類，大部分學生能區分平面與曲面，會運用非標準的數學語言，形容曲面，例如：滾動、彎彎的面、圓圓、滑滑。經由引導，分類方式從 2 類推演至 3 或 4 類。對照過去相關文獻，張英傑（2001）的研究結果顯示兒童觸覺辨形的能力優於優於視覺辨認能力，而本研究的結果與張英傑（2001）的研究的情形相符合，學生透過實作後能清楚區分出形體面的性質。此結果也與翁子婕（2016）提出經過多種感官體驗，學生能以性質的觀點描述相對應。

(二) 少數學生對立體形體拓印表現，採取序列方式進行拓印，大部分學生採取隨機進行拓印。

少數同學在進行拓印時，以有規則的方式進行拓印完成，先拓印側面部分再進行上下面的拓印，但大部分學生則為隨機拓印並無固定的順序。可知學生能透過實作表現出自己思維的模式，與陳嘉皇、李函（2016）透過教具製作骨架圖連結形體透視圖之概念，呈現解題的策略與方法結果一致。

(三) 學生能依形體性質進行分析與塑形，大部分學生是以整體的視覺觀進行形體塑形。

學生在形體塑形有二種表現，第一種是直接分析形體性質，透過黏土直接進行塑形。例如利用正方體積木的面壓出 6 個正方形組合成相同的正方體；利用圓柱體積木壓出 2 個圓形，再將黏土壓平捲起來與 2 個圓形組合成相同的圓柱體。第二種是以視覺整體進行塑形，完全依照視覺所觀察形體仿製出相同的立體形體，再經由比對面、長度、厚度確認為相同的立體形體。結果顯示與吳德邦、鄭佳昇（2001）發現國小學生對於立體幾何的表徵能力可分為兩階段，第一階段以平面幾何認知擴展立體幾何的知識；第二階段能夠直接分析立體形體的結果一致。

(四) 學生對各類立體形體平面化能運用立體心像辨認相同的立體形體。

學生能觀察學習單中立體形體平面化的圖案，圈選出相同的立體形體，學生嘗試將形體的面、邊、長度及立體形體翻轉，判別出相同的立體形體。研果顯示透過實作操作後能建構學生的立體形體心像與 Koester（2003）的研究發現學生從製作形體的過程中，建立立體形體的概念結果相符合。

(五) 學生能藉由立體形體之堆疊與移動，計數出積木的數量與辨認出積木移動後的位置。

3 位學生經由視覺觀察從給定的圖案中計數出積木的數量，且表達出隱藏積木的位置與辨認出移動的積木與移動後的位置，少部分學生立體心像空間能力較弱可運用白色小積木操作來達成學習目標。本研究在隱藏積木的數量與位置的部份，透過立體心像與白色小積木操作表現與楊凱翔、葉淑珍、譚寧君（2014）提

出正確計算立體形體的體積，應透過實物堆疊、操作建立學生操弄的經驗及心像模型，理解立方體被隱藏的問題，才能理解平面圖所表徵的立體心像，相互呼應。

## 二、建議

(一) 教學實務可根據學習軌道的規劃立體形體課程，建構出一套完整的數學幾何概念發展教材

目前國內甚少針對一年級立體形體單元進行研究，透過學習軌道理論設計出有系統的立體教學任務，促使學生將所習得的概念順利遷移至下個活動中，符合差異化教學能帶領每位學生達到學習目標，是條適合學生的學習軌道。此學習軌道融入立體形概念教學活動，可提供給現職教師及相關研究人員參考。

(二) 幾何課程中在學習的初始階段即應加入立體形體名稱，促進平面與立體形體的辨示

CCSSM (2010) 明確規定應從幼兒園開始辨別和命名各種幾何圖形，使兒童能夠分析二維和三維幾何圖形的特徵和性質。所以建議在課程中，應從一年級初始學習階段，就開始指導學生立體形體的正確名稱，區辨立體形體與平面圖形的差異性，避免學生二維平面與三維立體形體之間混淆。

(三) 立體形體課程可加入水彩與黏土體驗教學，宜增加立體形體的感覺和分析

現今教科書在立體形體的課程內容過少，所呈現的立體形體單元也都偏向平面視覺化，學生很難感受到空間感，容易造成學生平面視圖作為立體的錯覺。教科書所附給學生的教具，學生只需剪裁下來組合完成，沒讓學生體驗到立體形體與面的關係，建議可提供材料如水彩顏料與黏土，讓學生實作，而不是只有視覺觀察而忽略納入其他感官的體驗課程規劃。另外加入水彩與黏土教學，可使學生在提升學習興趣，翻轉學習數學就是反覆的演練不斷的計算刻板印象。

## 參考文獻

- 吳德邦、鄭佳昇（2001）。由表徵觀點初探國小兒童立體幾何概念之研究。論文發表於「中華民國第十七屆科學教育學術研討會」，臺北市。
- 翁子婕（2016）。學習軌道融入一年級平面圖形概念教學實驗之研究。國立臺中教育大學數學教育學系碩士論文，未出版，臺中。
- 張英傑（2001）。兒童幾何形體概念之初步探究。國立臺北師範學院學報，14，491-528。臺北市：國立臺北師範學院。
- 教育部（2008）。國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域。臺北市：教育部。
- 陳嘉皇（2008）。國小面積資訊教材學習軌道設計與教學成效探討。高雄師大學報：自然科學與科技類，25，103-124。
- 陳嘉皇、李函（2016，2月）。學習軌道融入國小柱體與錐體概念教學實驗之研究。論文發表於國立臺中教育大學主辦之「第二屆新教育與新教師學術研討會」，臺中市。
- 楊凱翔、葉淑珍、譚寧君（2014）。在建立立體心像教學活動之國小體積課程設計本位研究。國立臺灣科技大學人文社會學報，10（3），225-252。
- 國家教育研究院（2018）。十二年國民基本教育課程綱要——數學領域：國民中小學暨普通型高級中等學校。臺北市：國家教育研究院。
- Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age; Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Common Core State Standards Initiative [CCSSM] (2010). Common Core State Standards for Mathematics. Retrieved June 25, 2014, from <http://www.corestandards.org/Math>
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 81-89.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectory approach*. Florence: Routledge.
- Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z., & Sarama, J. (1999). Young children's concept of shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 192-212.
- Ellis, A. B. (2011). Generalizing-promoting actions: How classroom collaborations can support students' mathematical generalizations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(4), 308-345.

- Goldenberg, E. P., & Cuoco, A. A. (1998). What is dynamic geometry? In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 351-367). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as a means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6, 105-128.
- Koester, B. (2003). Prisms and pyramids: constructing three-dimensional models to build understanding. *Teaching Children Mathematics*, 9(8), 436-442.
- van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. New York: Academic Press.



# **Experimental Research on the Application of Learning Trajectory Theory to the Concept Teaching of the Three-dimensional Shapes**

Chia-Huang Chen<sup>1</sup> Yen-Yu Chan<sup>2</sup>

## **Abstract**

The purpose of this study was to understand the performance of the concept of three-dimensional shapes learning of the first grade elementary school students. The "learning trajectory" theory was used to design a three-dimensional shapes task to fit the students' learning. Four cases of teaching experiments were conducted to explore the effect of the "learning trajectory" theory and provide some suggestions and recommendations based on the results. The findings of the study reveal that 1. in the classification activity of the shapes, the students can distinguish the planes and curved surfaces according to their characteristics, and display the plane and the surface through the stack; 2. a small number of students performed a series of printouts on the three-dimensional form, and most of the students adopted randomized rubbing; 3. Most of the students are able to analyze and shape with a holistic view according to the nature of the shapes; 4. students can use the stereoscopic image to identify the same three-dimensional shape for all kinds of three-dimensional shapes planarization; and 5. students are able to count the number of blocks and to identify the position after the block is moved by stacking and moving the three-dimensional shapes.

**Keywords: geometry, learning trajectory theory, teaching experiment,  
three-dimensional shapes**

---

1 Professor, Department of Mathematics Education, National Taichung University

2 Teacher, Taichung Chung-Huang Primary school

Corresponding Author: Chia-Huang Chen, E-mail: chench1109@mail.ntcu.edu.tw